CE 426 - Diadema

Dicas complementares

Material didático 3º ano Ensino Médio

MATEMÁTICA

Ensino Médio

Última atualização: 21/03/2025 - 10h15min

Capítulo 2 - até o ex. 19.

Prof. Me. Rafael de Lima Moreira

Diadema - SP

2025

SUMÁRIO

Capítulo 1 - ERATÓSTENES COMPROVOU O QUE HOJE OS ASTRONAUTAS VÊEM DO ESPAÇO

Exercício 1) Atividade prática.

1.d) $1\,rad = 57,2958°$ **1.e)** Aproximadamente 6 vezes.

2 Complete a tabela.

RAD — GRAUS

π — 180

x — 90

$\Rightarrow 180x = 90\pi \quad :90$

$\Rightarrow x = \dfrac{9\cancel{0}\pi}{18\cancel{0}} = \dfrac{\pi}{2}\,rad$

$:90$

Radianos	Graus
2π rad	360°
π rad	180°
$\frac{\pi}{2}$ rad	90°
$\frac{\pi}{3}$ rad	60°
$\frac{\pi}{4}$ rad	45°
$\frac{\pi}{6}$ rad	30°
$\frac{2\pi}{3}$ rad	120°
$\frac{5\pi}{6}$ rad	150°
$\frac{3\pi}{2}$ rad	270°
	315°

3 Quando escrito na forma decimal, π equivale ao número irracional 3,1415926535... Para facilitar os cálculos, utilizamos o valor aproximado π = 3,14. Sabendo disso, responda:

a. Qual é o comprimento de uma circunferência cujo raio mede 10 cm?

$$C = 2\pi r \quad \ldots\ldots$$

$$C = 62{,}8 \text{ cm}$$

b. Se o comprimento de uma circunferência mede 25,12 cm, qual é o valor do seu raio?

$$C = 2\underset{3{,}14}{\pi} r \Rightarrow 25{,}12 = 2 \cdot 3{,}14 \cdot r \ldots$$

$$\ldots \quad r = 4 \text{ cm}$$

3) c) $C = 2\pi r = 2\pi \cdot 6 = 12\pi \text{ cm}$

1 volta : 360°

$$\begin{array}{ccc} 360° & — & 12\pi \\ 45° & — & x \end{array} \Rightarrow 360x = 45 \cdot 12\pi$$

$$\Rightarrow x = \frac{540\pi}{360} \begin{array}{c} :18 \\ :18 \end{array} = \boxed{\frac{3\pi}{2} \text{ cm}}$$

$$\cong \frac{3 \cdot 3{,}14}{2} = \boxed{4{,}71 \text{ cm}}$$

d) $$\begin{array}{ccc} 360° & — & 2\pi \cdot 12 \\ \alpha & — & 12{,}56 \end{array} \Rightarrow 360 \cdot 12{,}56 = 75{,}36\alpha$$

$$\boxed{\alpha = 60°}$$

4) a)

$$\pi \text{ rad} \text{ — } 180^\circ$$
$$1 \text{ rad} \text{ — } x$$

$$\Rightarrow x \cdot \pi = 180$$

$$\Rightarrow x = \frac{180}{\pi} \cong \frac{180}{3{,}14} = \boxed{57{,}32^\circ}$$

b)

$$\pi \text{ rad} - 180^\circ$$
$$y \text{ — } 1$$

$$\boxed{y \cong 0{,}01\overline{74}}$$

a. Qual é o perímetro de cada engrenagem?

Menor: $2\pi \cdot 2 = 4\pi$ cm

Maior: $2\pi \cdot 6 = 12\pi$ cm

b. Quando a engrenagem maior dá uma volta completa, quantas vezes a engrenagem menor gira?

MAIOR = 3 . menor

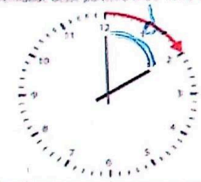
$$\frac{12\cancel{\pi}^{:2}}{4\cancel{\pi}_{:2}} = \frac{6}{2} = \boxed{3 \text{ voltas}}$$

c. De modo genérico, sendo r_1 e r_2 os raios de duas engrenagens em contato, estabeleça uma relação entre as medidas dos arcos que cada um descreve.

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{l_1}{l_2}$$

l_i: arco da engrenagem i

6 O ponteiro dos minutos de um relógio mede 6 cm. Qual é o comprimento do arco percorrido pela extremidade desse ponteiro entre 14h e 14h10min? Utilize $\pi = 3{,}14$



d: arco

$$360\cancel{^\circ} \text{ — } 2\pi \cdot 6 \Rightarrow 6d = 12\pi$$
$$6\cancel{0^\circ} \text{ — } d \Rightarrow d = 2\pi$$

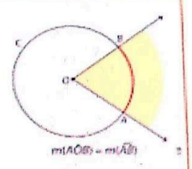
$\therefore \boxed{d \cong 6{,}28 \text{ cm}}$

…IZANDO AS IDEIAS

O ângulo central de uma circunferência é aquele cujo vértice se encontra no seu centro e cujos lados determinam um arco sobre ela. Esse ângulo tem a mesma medida do arco, como representado na imagem.

Não se sabe ao certo como surgiu a convenção, mas já na Grécia antiga a circunferência era dividida em 360 partes. Cada parte media 1°. E foi ainda na Grécia que Ptolomeu subdividiu o grau em 60 partes, que mais tarde foram denominadas minutos ('), e cada minuto em outras 60 partes, os segundos ("). Assim:

$$1^\circ = 60'$$
$$1' = 60''$$
$$\text{Logo, } 1^\circ = 3600''$$



$m(A\hat{O}B) = m(\widehat{AB})$

Exercício 7.a) $-270°$; ângulo negativo - **ângulo côncavo**. **ERRATA (19/10/2022 -10h35min):** foi inserida a nomenclatura "ângulo côncavo". Muito obrigado pela correção, **ALEXANDRE AMORIM** e **MELISSA BATTISTELLI DE SOUZA**!!

7.b) 90°; ângulo positivo.

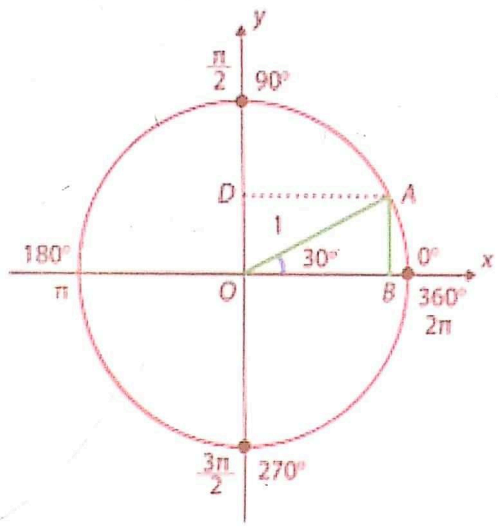
8)

1º Q	30°	45°	60°
2º Q	150°	135°	120°
3º Q	210°	225°	240°
4º Q	330°	315°	300°

f. Agora, preencha a mesma tabela colocando os valores dos ângulos em radianos.

1º Q	$\frac{\pi}{6}$ rad	$\frac{\pi}{4}$ rad	$\frac{\pi}{3}$ rad
2º Q	$\frac{5\pi}{6}$ rad	$\frac{3\pi}{4}$ rad	$\frac{2\pi}{3}$ rad
3º Q	$\frac{7\pi}{6}$ rad	$\frac{5\pi}{4}$ rad	$\frac{4\pi}{3}$ rad
4º Q	$\frac{11\pi}{6}$ rad	$\frac{7\pi}{4}$ rad	$\frac{5\pi}{3}$ rad

g. No ciclo trigonométrico, o raio da circunferência é unitário, ou seja, têm medida 1. Observe o ângulo de 30° no primeiro quadrante. Veja que é possível formar um triângulo retângulo com as medidas das projeções nos eixos x e y.

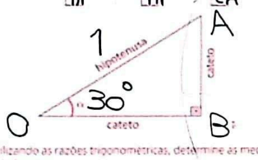


- Qual segmento representa o cateto adjacente ao ângulo de 30°? OB
- Qual segmento representa o cateto oposto ao ângulo de 30°? AB
- Qual segmento representa a hipotenusa desse triângulo retângulo? OA

h. Você já estudou as razões trigonométricas de um triângulo retângulo. Utilizando as siglas, relembre como calculamos o seno, o cosseno e a tangente de um ângulo α em um triângulo retângulo.

CA → cateto adjacente   CO → cateto oposto   Hi → hipotenusa

$\text{sen}\,\alpha = \frac{CO}{Hi}$ $\cos\alpha = \frac{CA}{Hi}$ $\text{tg}\,\alpha = \frac{CO}{CA}$



i. Agora, utilizando as razões trigonométricas, determine as medidas dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{OB}$ do **item g**.

$$\text{sen}\,30^\circ = \frac{AB}{1} \therefore AB = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{OB}{1} \therefore OB = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

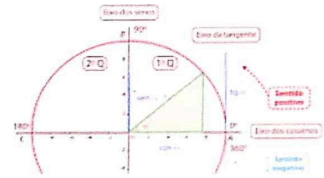
j. O eixo das ordenadas, ou eixo y, também é chamado de eixo dos senos, e o eixo das abscissas, ou eixo x, é chamado de eixo dos cossenos. Indique no ciclo trigonométrico os respectivos nomes dos eixos x e y.

k. Com a régua, trace uma reta paralela ao eixo dos senos que tangencie a circunferência do ciclo trigonométrico. Denominamos essa reta como eixo da tangente. Indique no ciclo o eixo da tangente.

ORGANIZANDO AS IDEIAS

Chamamos de **ciclo trigonométrico** toda circunferência orientada em que:

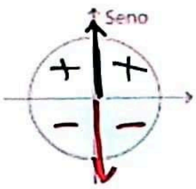
- O centro é a origem do plano cartesiano;
- O raio é unitário ($r = 1$);
- O sentido positivo é o anti-horário;
- O ponto $A\,(1, 0)$ é a origem dos arcos;
- O eixo x e o eixo y dividem o ciclo em quatro quadrantes;
- O eixo x é chamado de eixo dos cossenos. O eixo y é chamado de eixo dos senos. A reta perpendicular ao eixo x no ponto A é chamada de eixo das tangentes. O eixo das tangentes tem origem em A e tem mesmo sentido e unidade do eixo dos senos;
- O seno ou o cosseno de um ângulo é um número positivo ou negativo que vai de −1 a 1 → → [−1, 1], enquanto a tangente pode ser qualquer número real;
- As coordenadas dos pontos A, B, C, D com as intersecções dos eixos são indicadas por: $A\,(1, 0)$, $B\,(0, 1)$, $C\,(-1, 0)$, $D\,(0, -1)$

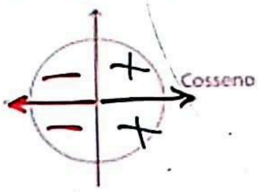


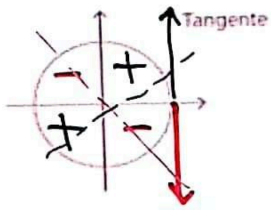
9 Faça uma análise dos valores do seno, do cosseno e da tangente dos ângulos do ciclo trigonométrico do **Encarte 11**. Com os sinais de + e de −, indique na tabela se o seno, o cosseno e a tangente de um ângulo do primeiro, segundo, terceiro ou quarto quadrante é positivo ou negativo.

	1º Q	2º Q	3º Q	4º Q
Seno				
Cosseno				
Tangente				

Faça a marcação de sinais nas imagens a seguir também.







10 Agora, utilizando 1, −1, 0 ou o símbolo ∄ (não existe), indique o valor do seno, do cosseno e da tangente dos seguintes ângulos.

	0°	90°	180°	270°	360°
Seno	0	1	0	−1	0
Cosseno	1	0	−1	0	1
Tangente	0	∄	0	∄	0

Exercício 11)

	30°	45°	60°
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Exercício 12)

	Arcos simétricos a 30°			Arcos simétricos a 45°			Arcos simétricos a 60°		
	150°	210°	330°	135°	225°	315°	120°	240°	300°
Seno	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	1	-1	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$

Exercício 13) IMPORTANTE: a fórmula indicada no material didático para o alcance horizontal **está INCORRETA**. Consideraremos a fórmula a seguir e $g = 10\, m/s^2$ para facilitar os cálculos. Assim, temos:

- Alcance horizontal: $A = \frac{v_0^2 \cdot sen\ 2\theta}{g} = \frac{25^2 \cdot sen\ 90°}{10} = \frac{625 \cdot 1}{10} = \frac{625}{10} = 62,5\, m$
- Altura máxima: $h_{máx} = \frac{v_0^2 \cdot sen^2\theta}{2g} = \frac{25^2 \cdot sen^2 45°}{2 \cdot 10} = \frac{625 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{20} = \frac{125 \cdot \frac{1}{2}}{4} = \frac{125}{8} = 15,625\, m$

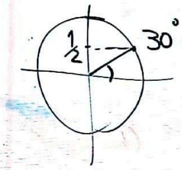
14 Toda equação que possua razões trigonométricas de ângulos de medida desconhecida é chamada de equação trigonométrica. Sendo x a medida de um arco correspondente a um ângulo do primeiro quadrante, considere a equação $\text{sen}\ x = \frac{1}{2}$.

a. Qual valor é conhecido: o seno ou o arco?

O valor do seno.

b. Resolva essa equação, descrevendo os procedimentos.

1º Q:



$30^\circ = \frac{\pi}{6}$ rad

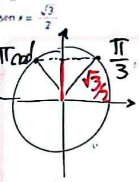
c. Se a medida do arco se encontrasse no intervalo $[0, 2\pi]$, explique o que mudaria na resolução.

O valor do 2º Q poderia ser inserido na resposta (arco simétrico a 30°): $150^\circ = \frac{5\pi}{6}$ rad

15 Com base na atividade anterior, resolva as equações trigonométricas, considerando $0 \leq x \leq 2\pi$.

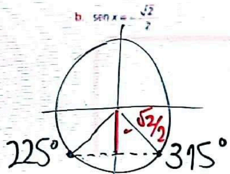
a. $\text{sen}\ x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$120^\circ = \frac{2\pi}{3}$ rad $\qquad \frac{\pi}{3}$ rad $= 60^\circ$



$$V = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right\}$$

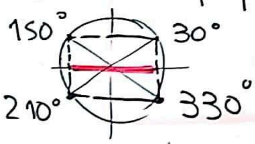
b. $\text{sen}\ x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$



$$V = \left\{\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$$

c. $\cos^2 x = \frac{3}{4}$

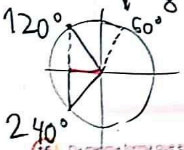
$$\cos x = \pm\sqrt{\frac{3}{4}} \therefore \cos x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$V = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$$

d. $(\cos x)^3 = -\frac{1}{8}$

$$\cos x = \sqrt[3]{-\frac{1}{8}} \therefore \cos x = -\frac{1}{2}$$



$$V = \left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$$

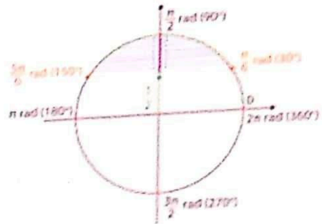
16 Da mesma forma que existem equações trigonométricas, também existem inequações trigonométricas. Por exemplo: para quais arcos $\text{sen}\ x > \frac{1}{2}$, com $0 \leq x \leq 2\pi$?

Para resolver as inequações trigonométricas, é importante que você tenha compreendido a resolução de equações trigonométricas. Podemos seguir os seguintes passos:

1º) Determinar os valores de x que satisfazem as equações $\text{sen}\ x > a$, $\cos x > a$ ou $\text{tg}\ x > a$, em que a é uma constante.

2º) Construir o ciclo trigonométrico e determinar o intervalo que corresponde à solução da respectiva inequação.

No intervalo $0 \leq x \leq 2\pi$, vamos analisar primeiro os arcos nos quais $\text{sen}\ x = \frac{1}{2}$. A solução será $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$. Agora, basta procurar os valores de x cujo valor do seno

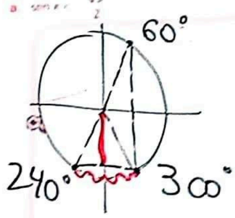


Solução da inequação $\text{sen}\ x > \frac{1}{2}$

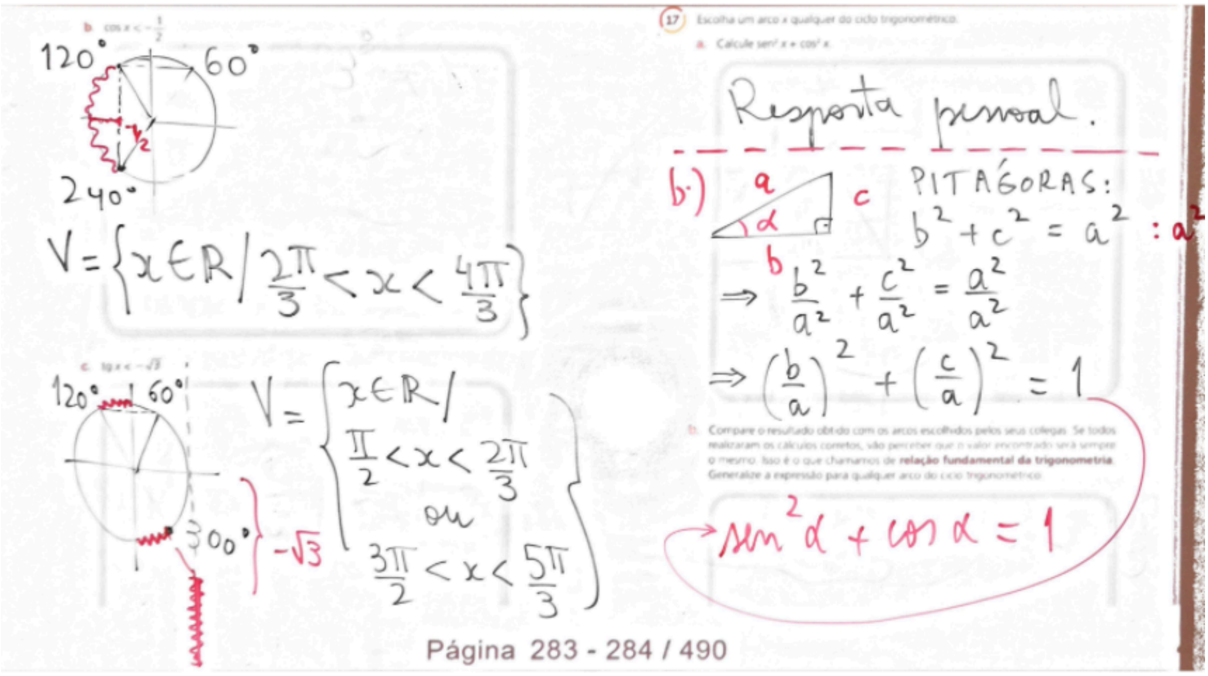
Portanto, a solução de $\text{sen}\ x > \frac{1}{2}$ será $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}\right\}$

Sabendo disso, determine para $0 \leq x \leq 2\pi$ as soluções das inequações:

a. $\text{sen}\ x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$

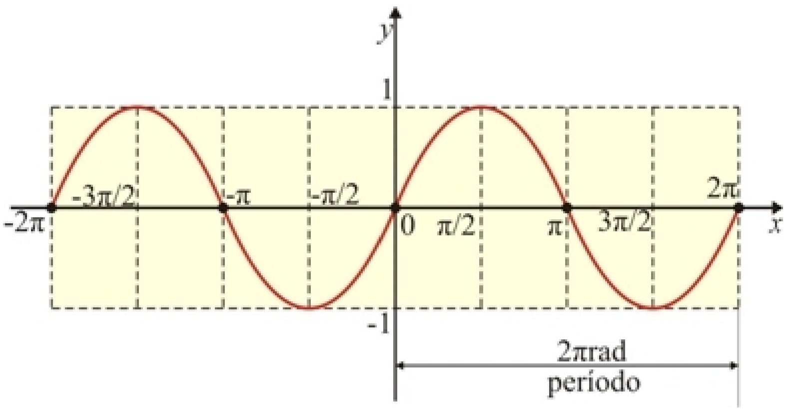


$$V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{4\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}\right\}$$



17.b) O valor do cosseno na imagem acima não está elevado ao quadrado. A Relação Fundamental da Trigonometria é dada por $sen^2x + cos^2x = 1$. **ERRATA (28/10/2022 -09h45min):** Muito obrigado pela correção, **KAROLINNE RIBEIRO DE MOURA**!!

Exercício 18) a)



b) O domínio abrange o conjunto dos números reais: $D[f(x)] = R$.

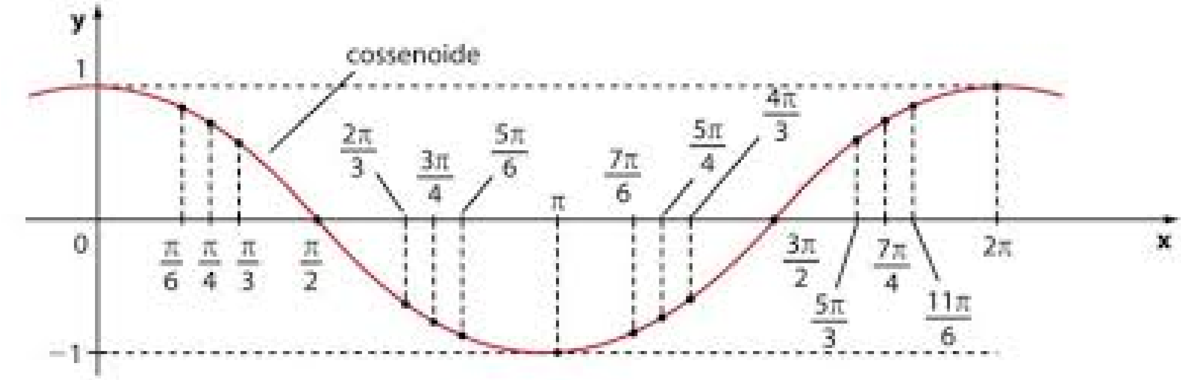
c) Temos o valor mínimo -1 e o valor máximo 1. Assim, $Im[f(x)] = [-1, 1]$.

d) Temos a monotonicidade indicada nos seguintes intervalos:

- $[0, \frac{\pi}{2}]$: crescente;
- $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$: decrescente;
- $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$: crescente.

e) A função seno possui período $p = 2\pi$.

Exercício 19) a)



b) O domínio abrange o conjunto dos números reais: $D[f(x)] = R$.

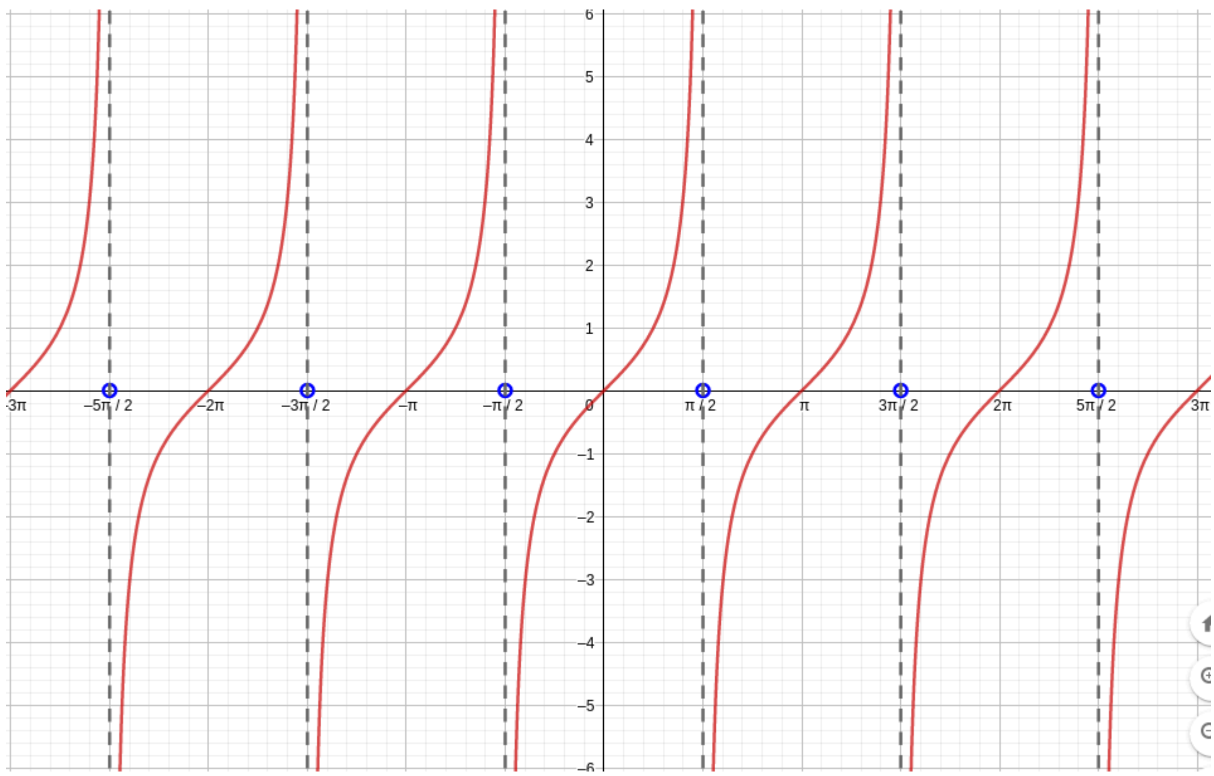
c) Temos o valor mínimo -1 e o valor máximo 1. Assim, $Im[f(x)] = [-1, 1]$.

d) Temos a monotonicidade indicada nos seguintes intervalos:

- $[0, \pi]$: decrescente;
- $[\pi, 2\pi]$: crescente.

e) A função cosseno possui período $p = 2\pi$.

Exercício 20) a)



b) O domínio abrange o conjunto dos números reais: $D[f(x)] = \left\{x \in R \mid x \neq \frac{(2k+1)\cdot\pi}{2},\ com\ k \in Z\right\}$.

c) Não temos valor mínimo ou valor máximo na função tangente. Assim, $Im[f(x)] = R$.

d) A função tangente é crescente, de acordo com as definições do domínio.

e) A função tangente possui período $p = \pi$.

Exercício 21) a) Pesquisar!!

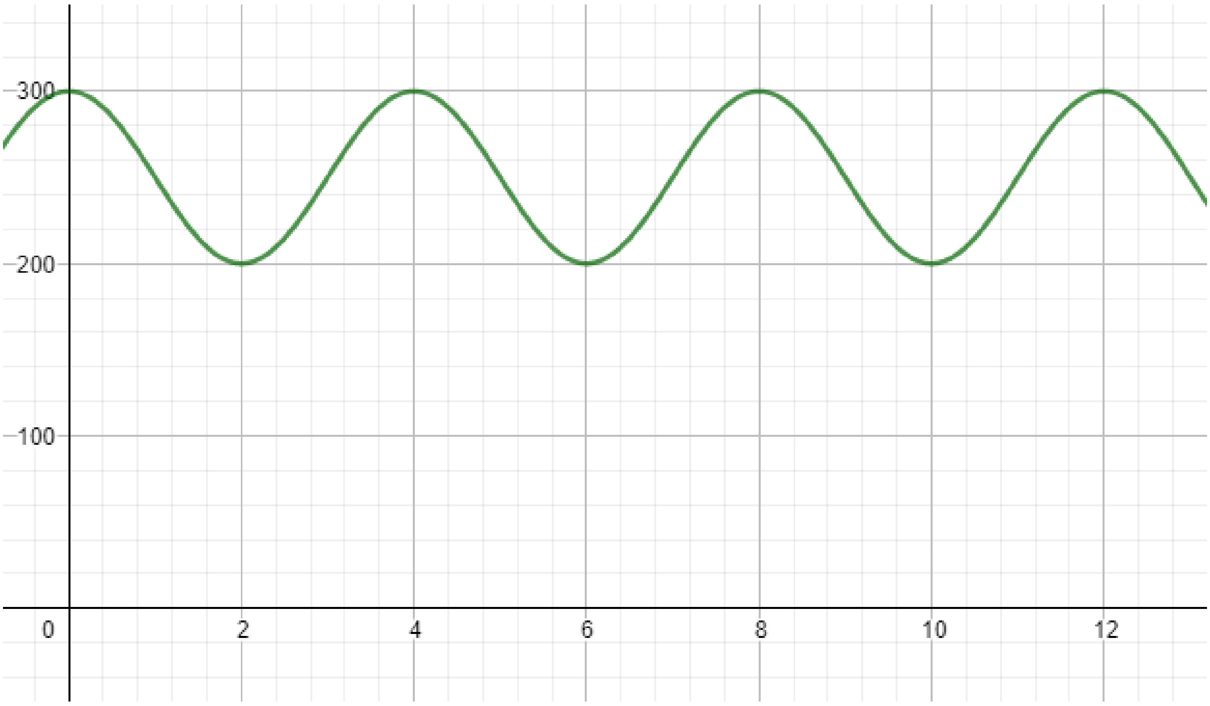
b) Abril, Agosto e Dezembro ($0\, rad = 2\pi\, rad$: por quê?).

c) Fevereiro, Junho e Outubro ($\pi\, rad$: por quê?).

d) Devemos substituir $t = 3$:

$$P(3) = 250 + 50 \cdot cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 250 + 50 \cdot 0 = 250$$

e) GeoGebra:



f) Discussão coletiva.

Exercício 22) No início da contagem, temos $t = 0$. Assim:

$$f(0) = 100 - 20 \cdot cos\left(\frac{800\cdot 0}{3}\right) = 100 - 20 \cdot cos\, 0 = 100 - 20 \cdot 1 = 100 - 20 = 80$$

Exercício 23) Pelo enunciado, devemos substituir $t = 14$:

$$T(14) = -52 + 2 \cdot sen\left(\frac{14\pi}{12} + \frac{8\pi}{6}\right) = -52 + 2 \cdot sen\left(\frac{5\pi}{2}\right) = -52 + 2 \cdot 1 = -50$$

Exercício 24) Antes de substituir o valor numérico, vamos realizar algumas simplificações algébricas:

$$\frac{\frac{1}{cos\,x}\cdot\frac{1}{sen\,x} - \left(\frac{1}{cos\,x}\right)^2}{\frac{cos\,x}{sen\,x} - 1} = \frac{\frac{sen\,x \cdot cosx - sen^2 x}{sen^2 x \cdot cos^2 x}}{\frac{cos\,x - sen\,x}{sen\,x}} =$$

$$\frac{sen\,x \cdot (\,cos\,x - sen\,x)}{sen^2\,x \cdot cos^2\,x} \cdot \frac{sen\,x}{(cos\,x - sen\,x)} = \frac{sen^2\,x}{sen^2\,x \cdot cos^2\,x} = \frac{1}{cos^2\,x}$$

Substituindo-se o valor fornecido no enunciado, temos:

$$\frac{1}{cos^2\,x} = \frac{1}{0{,}25^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{16}} = 1\,\cdot\frac{16}{1} = 16.$$

Jogos educativos:

- BowMasters;
-

Capítulo 2 - PONTE FAROL ESPELHO FORNO MONTANHA-RUSSA

Exercício 1.a) Funções quadráticas ou funções do 2º grau.

1.b) O vértice é dado pelas coordenadas $V(3, 9)$.

1.c) Graficamente, as raízes são as intersecções com o eixo x, pois nestes casos $y = 0$. Assim, temos $x_1 = 0$ e $x_2 = 6$.

1.d) O discriminante é positivo, pois admite duas raízes reais distintas.

1.e) O coeficiente a é negativo, pois a concavidade está voltada para baixo.

1.f) O coeficiente c é nulo, ou seja, igual a zero. Observe que a intersecção da parábola com o eixo y ocorre exatamente em $y = 0$.

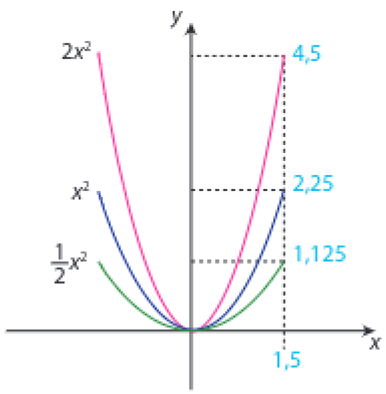
Exercício 2.a) Sugestão: construa no GeoGebra.

2.b) A imagem é dada por $[0, \infty)$, ou seja, $Im(f) = \{y \in \Re \,/\, y \geq 0\}$.

2.c) O vértice da parábola é dado por $V(0, 0)$ e $y_V = 0$ representa um valor mínimo, pois a concavidade da parábola está voltada para cima ($a > 0$).

2.d) O eixo y.

2.e) O parâmetro a altera a "abertura" da parábola:



2.f) Se $a < 0$, então y_V será um valor máximo, pois temos a concavidade da parábola voltada para baixo.

2.g) O parâmetro c desloca a parábola na vertical:

- para cima, se $c > 0$;
- para baixo, se $c < 0$.

2.h) Em ambas as situações, teremos valor mínimo (-1 ou 1), pois as concavidades estão voltadas para cima.

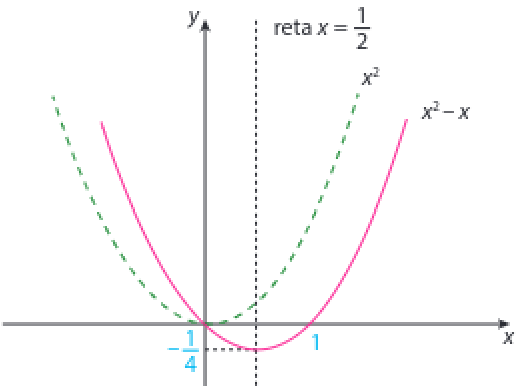
2.i) Novamente, o parâmetro c desloca a parábola na vertical conforme item acima.

2.j) Sim, pois $b = 0$.

2.k)

$f(x) = ax^2 + c$ e $a \neq 0$	Quantidade de zeros de $f(x)$
$c = 0$	1
$a > 0$ e $c > 0$	0
$a > 0$ e $c < 0$	2
$a < 0$ e $c > 0$	2
$a < 0$ e $c < 0$	0

2.l) Podemos perceber que ocorre um deslocamento simultâneo na horizontal e na vertical.



Exercício 3) Sugestão: para conferir seus esboços, realize as construções dos gráficos em https://www.geogebra.org/classic?lang=pt (disponível também nas versões de aplicativos para dispositivos móveis).

3.a) Valor mínimo: 0; Imagem: $Im[f(x)] = [0, +\infty[$; Vértice: $V(1, 0)$.

3.b) Valor máximo: 1; Imagem: $Im[f(x)] =]-\infty, 1]$; Vértice: $V(0, 1)$.

3.c) Valor mínimo: 2; Imagem: $Im[f(x)] = [2, +\infty[$; Vértice: $V(-1, 2)$.

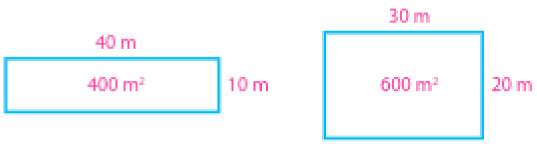
Exercício 4.a) Para que a função dada admita um valor de mínimo, é necessário que o coeficiente a seja positivo, ou seja:

$3k - 1 > 0 \Rightarrow 3k > 1 \Rightarrow k > \frac{1}{3}$

4.b) Como $a < 0$, então a função admite valor máximo. Nas condições estabelecidas, temos:

$x_V = -\frac{b}{2a} \Rightarrow -\frac{(k+1)}{2\cdot(-4)} = 1 \Rightarrow \frac{k+1}{8} = 1 \Rightarrow k + 1 = 8 \Rightarrow k = 7$

Exercício 5.a) Consideraremos terrenos com formato retangular. Assim:



5.b) Dado que um dos lados será dado por x, vamos determinar o lado y do outro lado do retângulo:

$x + x + y + y = 100 \Rightarrow 2x + 2y = 100 \Rightarrow 2(x + y) = 100 \Rightarrow x + y = 50$

Logo, a outra medida será dada por $50 - x$.

5.c) A área de um retângulo é dada pelo produto das medidas dos lados, ou seja:

$A(x) = x \cdot (50 - x) \Rightarrow A(x) = 50x - x^2$

5.d) GeoGebra.

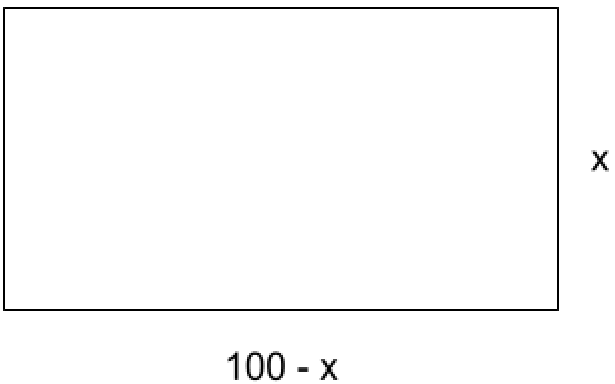
5.e) As coordenadas do vértice serão dadas por:

- $x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{50}{2\cdot(-1)} = \frac{50}{2} = 25;$
- $y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{2\,500}{4\cdot(-1)} = \frac{2\,500}{4} = 625$

Assim, as coordenadas do vértice serão dadas por $V(25,\ 625)$.

5.f) O valor de área máxima será encontrado em $x_V = 25$ m. Logo, a outra dimensão do retângulo será dada por $50 - 25 = 25$ m.

Exercício 6) Pelas informações dadas no enunciado, podemos ilustrar a situação apresentada da seguinte maneira:

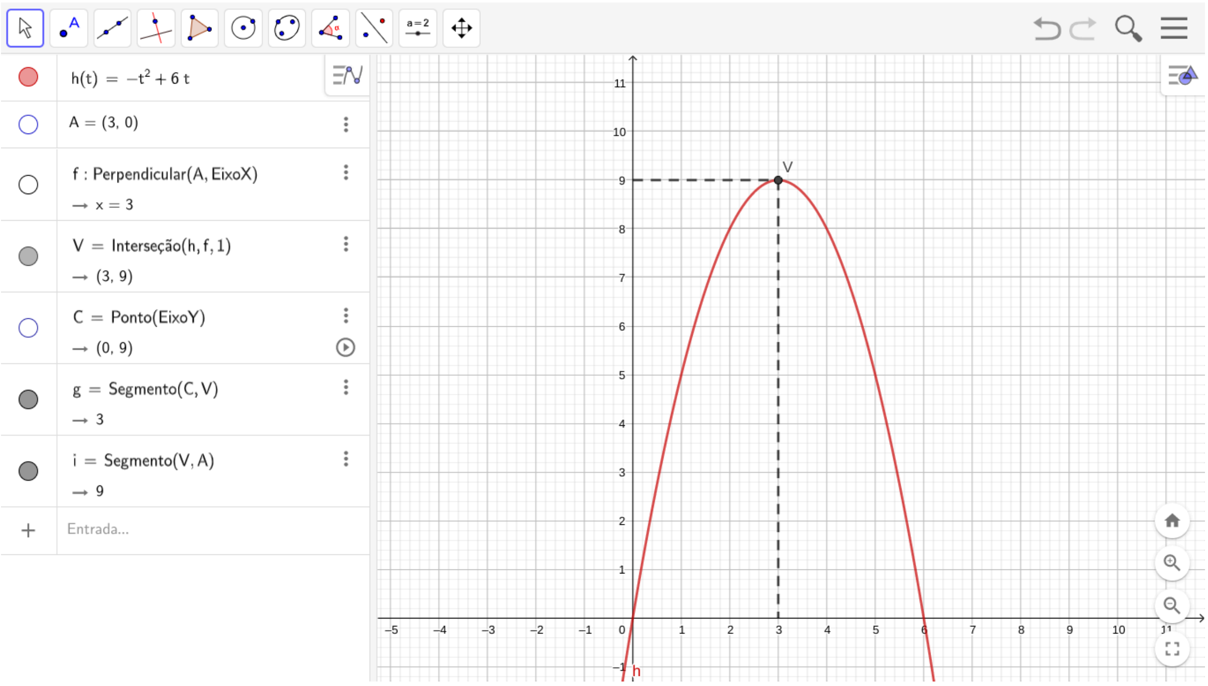


Observe que o perímetro da quadra será dado por $(100 - x) \cdot 2 + 2x = 200 - 2x + 2x = 200$. Como devemos determinar o valor de x para que a área seja a maior possível, então devemos utilizar uma função que determine a área da região delimitada pela fita. Assim, temos:

$A(x) = (100 - x) \cdot x = \ - x^2 + 100x$

Logo, observando $a =- 1 < 0$, podemos concluir que a parábola possui a concavidade voltada para baixo e admite um valor máximo em $-\frac{b}{2a} = \ -\frac{100}{2\cdot(-1)} = \ -\frac{100}{-2} = 50$. Sendo $x = 50$, podemos afirmar que as dimensões do retângulo serão 50 m e $100 - 50 = 50$ m. Portanto, concluímos que a área máxima ocorrerá com um quadrado de lado 50 m.

Exercício 7) Pela função dada, sabemos que a concavidade estará voltada para baixo, pois $a = \ - 1 < 0$. Assim, teremos o valor máximo y_v (y do vértice da parábola) no instante x_v (x do vértice da parábola). Após realizar os cálculos a partir das fórmulas apresentadas, teremos a altura máxima $y_v = 9$ m no instante $t = 3$ s.



Exercício 8.a) Podemos observar que o valor do coeficiente a é positivo e, assim, a concavidade da parábola está para cima e o custo será mínimo no valor de sua abscissa do vértice. Assim, temos:

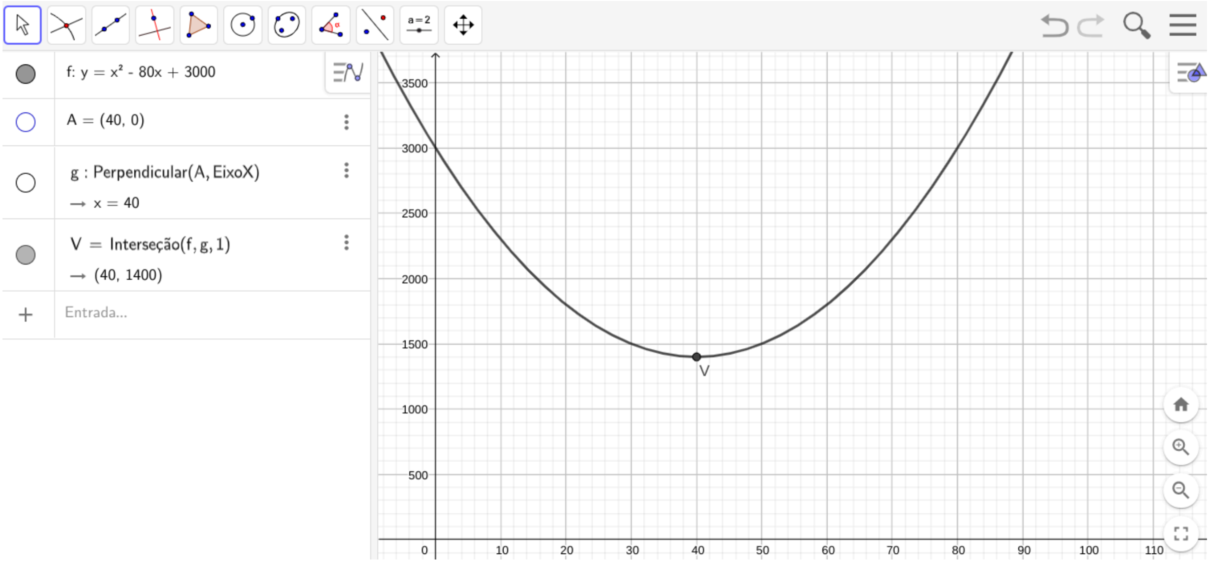
$x_V = \ -\frac{b}{2a} = \ -\frac{(-80)}{2\cdot 1} = \frac{80}{2} = 40$ unidades.

8.b) O valor mínimo do custo é dado pela ordenada y_V do vértice da parábola. Logo:

$y_V = \ -\frac{\Delta}{4a} = \ -\frac{(6400-12000)}{4\cdot 1} = \frac{5600}{4} = 1400$

Portanto, o valor mínimo do custo para as 40 peças será de $R\$\ 1\,400,00$.

8.c)



Exercício 9.a) Dado que após $1\ s$ a pedra atingiu $5\ m$ de altura, então:

$h(1) = 5 \Rightarrow a \cdot 1^2 + b \cdot 1 = 5 \Rightarrow a + b = 5\ (i)$

Pela fórmula do vértice de uma parábola, também sabemos que:

$$x_V = \frac{-b}{2a} = 1 \Rightarrow -b = 2a \Rightarrow b = -2a\ (ii)$$

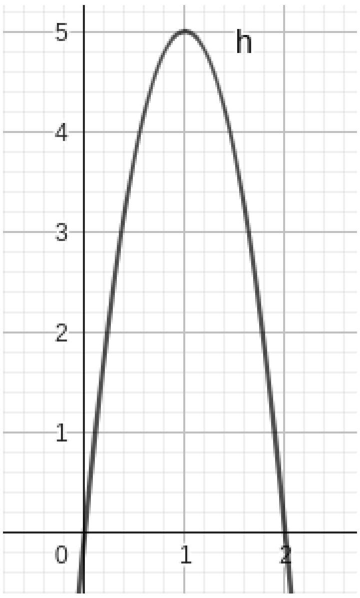
Substituindo-se (ii) em (i), temos:

$a + b = 5 \Rightarrow a + (-2a) = 5 \Rightarrow -a = 5 \Rightarrow a = -5$

Logo, $b = -2 \cdot (-5) = 10$ e, assim, $h(t) = -5t^2 + 10t$.

9.b) Em $t = 2$, temos $h(2) = -5 \cdot 2^2 + 10 \cdot 2 = -20 + 20 = 0$. Outra maneira seria observar o eixo de simetria da parábola, pois como $c = 0$ e $x_V = 1$, concluímos que $x = 1 + 1 = 2$ também será uma raiz da função dada.

9.c)



9.d) Os tempos são equivalentes.

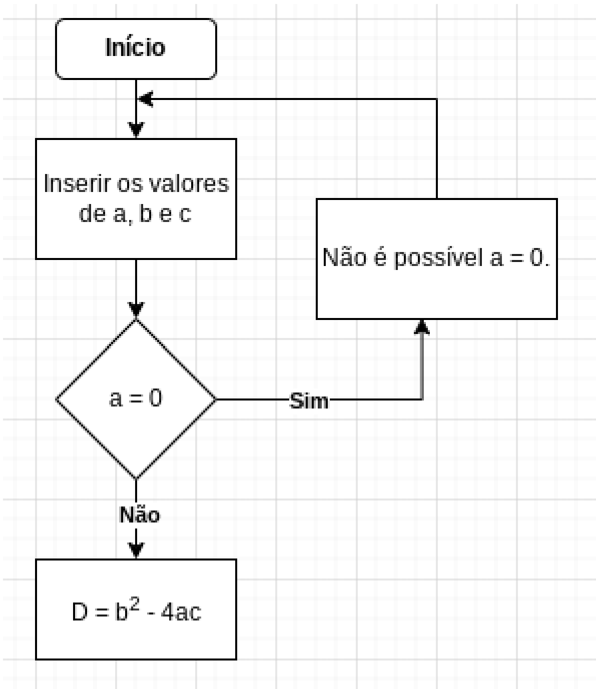
Exercício 10) Para verificar os instantes nos quais o objeto passa pela posição zero, basta encontrar os valores de t para os quais $p(t) = 0$. Assim, temos:

$p(t) = 0 \Rightarrow \ - t^2 + 4t - 3 = 0$

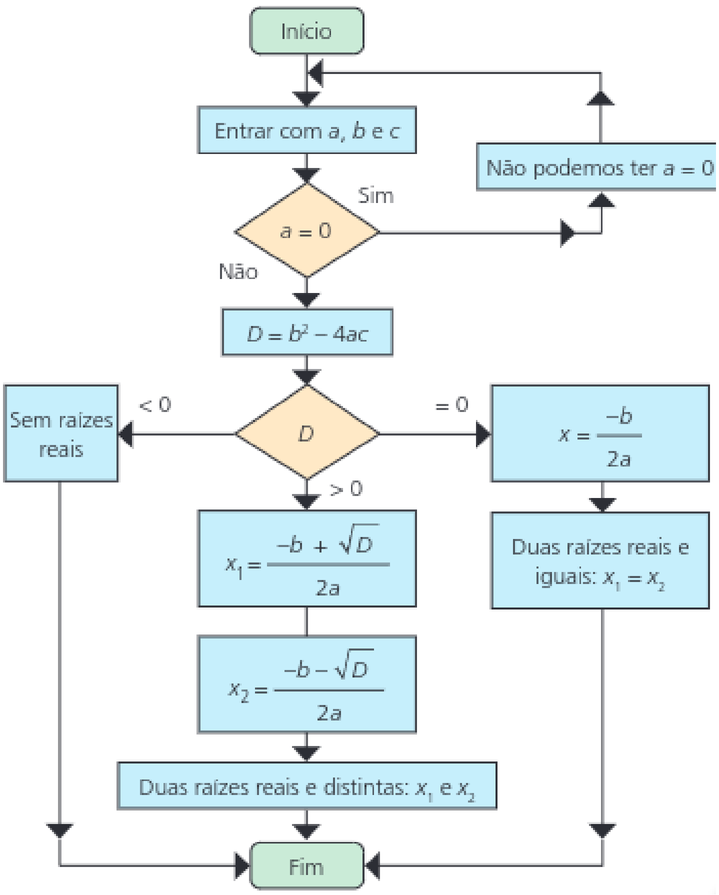
$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot (- 1) \cdot (- 3) = 16 - 12 = 4$

$t = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-4 \pm 2}{-2} \Rightarrow t = 1$ ou $t = 3$

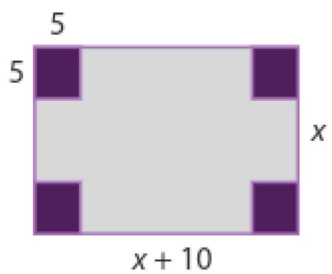
Exercício 11) Resposta pessoal. Indicação: https://www.drawio.com/ .



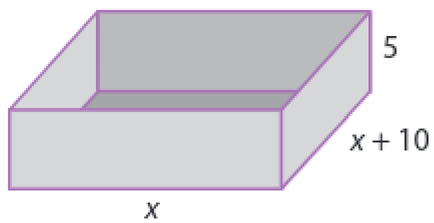
Exercício 12) Resposta pessoal. Indicação: https://www.drawio.com/ .



Exercício 13.a) Modelo sugerido:



13.b) Devemos multiplicar a área da base pela sua altura, i.e.:



$V(x) = x \cdot (x + 10) \cdot 5 = 5x \cdot (x + 10) \Rightarrow V(x) = 5x^2 + 50x$

13.c) Para determinar as dimensões solicitadas, devemos igualar o volume definido no item anterior a $1\,000\ cm^3$:

$V(x) = 5x^2 + 50x = 1\,000 \Rightarrow 5x^2 + 50x - 1\,000 = 0$

Vamos dividir ambos os membros da igualdade por 5 para simplificar os cálculos:

$x^2 + 10x - 200 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-200) = 100 + 800 = 900$

$x = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-10\pm\sqrt{900}}{2\cdot1} = \frac{-10\pm30}{2} \Rightarrow x =- 20$ ou $x = 10$

Como a medida deve ser positiva ($x > 0$), então a medida deve ser de $x = 10\ cm$.

13.d) A partir da relação de equivalência entre $1\ m^3$ e $1\ 000\ L$, concluímos que $1\ 000\ cm^3$ equivale a $1\ L$. **Observação:** converta as unidades a partir de uma regra de três simples.

Exercício 14) Inicialmente, vamos determinar as raízes da equação:

$f(x) = x^2 - 2x - 3 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16$

$x = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2)\pm\sqrt{16}}{2\cdot1} = \frac{2\pm4}{2} \Rightarrow x =- 1$ ou $x = 3$

Pela definição da forma fatorada, temos:

$f(x) = 1 \cdot (x - (-1)) \cdot (x - 3) \Rightarrow f(x) = (x + 1)(x - 3)$

Exercício 15) A partir das ideias apresentadas no exercício anterior e da análise gráfica, sabemos que a função dada pode ser dada por:

$f(x) = a \cdot (x - (-1)) \cdot (x - 3) \Rightarrow f(x) = a(x + 1)(x - 3)$

Além disso, podemos observar que em $x = 0$ temos $y = 2$, ou seja:

$f(0) = 2 \Rightarrow a \cdot (0 + 1)(0 - 3) = 2 \Rightarrow - 3a = 2 \Rightarrow a =- \frac{3}{2}$

Assim, a função é definida por $f(x) =- \frac{3}{2}(x + 1)(x - 3) \Rightarrow f(x) = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 2$

Para finalizar o exercício, devemos determinar o valor máximo através do cálculo de $y_V = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{8}{3}$.

Solução alternativa - sistemas lineares:

A partir da análise do gráfico, concluímos que $c = 2$ (basta substituir $x = 0$ na expressão geral da função quadrática $y = ax^2 + bx + c$). Podemos montar um sistema linear com os pontos $(-1, 0)$ e $(3, 0)$ que definem as raízes no gráfico. Deste modo, temos:

$a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + 2 = 0 \Rightarrow a - b = -2\ (i)$

$a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + 2 = 0 \Rightarrow 9a + 3b = -2\ (ii)$

Aplicando-se o método da adição, realizamos $3 \cdot (i) + (ii)$ e temos:

$12a = -8 \Rightarrow a = -\frac{2}{3}$ e, consequentemente, $b = \frac{4}{3}$.

Assim, a função é definida por $y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 2$.

Para finalizar o exercício, devemos determinar o valor máximo através do cálculo de $y_V = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{8}{3}$.

Exercício 16) Para que $f(x)$ seja do 2º grau, é necessário que:

$(m - 4) = 0$ e $(m^2 - 16) \neq 0 \Rightarrow m = 4$ e $m^2 \neq 16 \Rightarrow m = 4$ e $m \neq \pm \sqrt{16}$

Logo, $m = 4$ e $m \neq \pm 4$. Portanto, como o valor m não pode ser igual e diferente a 4 simultaneamente, concluímos que a situação solicitada é impossível.

Exercício 17) Se $x = -1$ é raiz de $f(x)$, então $f(-1) = 0$. Logo, temos:

$(-1)^3 + 4 \cdot (-1)^2 - a \cdot (-1) + 1 = 0 \Rightarrow -1 + 4 + a + 1 = 0$

$\Rightarrow a + 4 = 0 \Rightarrow a = -4$.

Exercício 18) Como uma raiz deve ser o dobro da outra, então $x_1 = 2x_2$. Pela soma e produto, temos:

$x_1 + x_2 = 3k \Rightarrow x_1 + 2x_1 = 3k \Rightarrow 3x_1 = 3k \Rightarrow x_1 = k$

$x_1 \cdot x_2 = k + 6 \Rightarrow x_1 \cdot 2x_1 = k + 6 \Rightarrow 2x_1^2 = k + 6 \Rightarrow 2k^2 - k - 6 = 0$

Solucionando-se a equação quadrática na variável k, temos $k = 2$ ou $k = -\frac{3}{2}$. Como o enunciado solicita o valor de k positivo, então concluímos que $k = 2$. Assim, a função quadrática será dada por $f(x) = x^2 - 6x + 8$, cujas raízes são 2 e 4.

Exercício 19) A partir da forma fatorada abordada nos exercícios anteriores, sabemos que uma função quadrática pode ser escrita como $f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$, onde x_1 e x_2 são suas raízes. Logo, para qualquer valor $a \neq 0$, a função $f(x) = a \cdot (x + 3) \cdot (x - 2)$ possui raízes -3 e 2.

Exercício 20.a) Colocando-se o x em evidência, temos:

$f(x) = (x^3 + 2x^2) - (x + 2) = x^2 \cdot (x + 2) - 1 \cdot (x + 2) = (x + 2)(x^2 - 1)$

20.b) Determinando-se as raízes, temos:

$f(x) = (x + 2)(x + 1)(x - 1)$

Logo, as raízes da função serão -2, -1 e 1.

20.c) As intersecções do gráfico com o eixo x ocorrem nos valores das raízes determinadas no item anterior.

20.d) Podemos concluir que os gráficos serão os mesmos.

Exercício 21.a) Aplicando-se o Dispositivo Prático de Briot-Ruffini, temos:

Escrevemos os coeficientes do polinômio:

$$\begin{array}{c|cccc} -1 & 1 & 1 & -3 & -3 \\ & & -1 & 0 & 3 \\ \hline & 1 & 0 & -3 & 0 \end{array}$$

O último valor da última linha é **zero**, confirmando que $x+1$ é um fator do polinômio.

Após a divisão, obtemos o polinômio reduzido:

$$x^2 + 0x - 3 = x^2 - 3$$

Agora, resolvemos:

$$x^2 - 3 = 0$$

$$x^2 = 3$$

$$x = \pm\sqrt{3}$$

Portanto, as raízes são dadas por $S = \{-\sqrt{3},\ -1,\ \sqrt{3}\}$.

21.b) Analogamente ao item anterior, temos:

Escrevemos os coeficientes do polinômio:

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & -1 & -1 & -2 \\ & & 2 & 2 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Como o último valor na linha inferior é **zero**, confirmamos que $x-2$ é um fator do polinômio.

Após a divisão, o polinômio reduzido é:

$$x^2 + x + 1 = 0$$

Agora resolvemos:

$$x^2 + x + 1 = 0$$

Utilizamos a **fórmula de Bhaskara**, onde:

- $a = 1$,
- $b = 1$,
- $c = 1$.

Calculamos o discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4(1)(1) = 1 - 4 = -3$$

Como o discriminante é negativo, então concluímos que a única raiz real é dada por $x = 2$.

21.c) Analogamente aos itens anteriores, temos:

Exercício 22.a) Analisando-se as intersecções com o eixo x, podemos concluir que as raízes da função f são dadas por $-3, -2, 2$ e 3.

22.b) Resposta pessoal.

22.c)

Definimos $y = x^2$, então x^4 pode ser escrito como y^2, resultando na equação:

$$y^2 - 13y + 36 = 0$$

Agora temos uma equação quadrática na variável y.

A equação quadrática é:

$$y^2 - 13y + 36 = 0$$

Utilizamos a **fórmula de Bhaskara** ($y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$), onde:

- $a = 1$,
- $b = -13$,
- $c = 36$.

Primeiro, calculamos o discriminante:

$$\Delta = (-13)^2 - 4(1)(36) = 169 - 144 = 25$$

Portanto, as soluções para y são:

$$y = \frac{13 + 5}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

$$y = \frac{13 - 5}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

Lembramos que $y = x^2$, então:

1. $x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$
2. $x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

Capítulo 3 - A BELEZA ESTÁ NOS OLHOS DE QUEM VÊ

1) a) % — pessoas

$$\begin{array}{ccc} 70 & — & 126{,}9 \\ 100 & — & x \end{array}$$

$\Rightarrow 7\cancel{0}x = 126{,}9 \cdot 10\cancel{0}$

$\therefore x \cong 181{,}28$ milhões

b) % — domicílios

$$\begin{array}{ccc} 67 & — & 46{,}5 \\ 33 & — & x \end{array}$$

$\therefore x \cong 22{,}9$ milhões

100% − 67%

2) % — L

$$\begin{array}{ccc} 100 & — & 30\,000 \\ 11 & — & x \end{array}$$

$\therefore x = 3\,300$ L

3) a) $65{,}1 - 58{,}6 = 6{,}5\,\%$

b) Dez/18.

c) % — famílias

100 — $20\,000$

$65{,}1$ — x

$x = 13020$ famílias

d) Pesquisar!

4) $(10\%)^2 = \left(\frac{1\cancel{0}}{10\cancel{0}}\right)^2 = \frac{1^2}{10^2} = \frac{1}{100} = 1\%$

5) $\underbrace{\overset{100\%}{?}}_{y} \xrightarrow{+8\%} R\$\,60{,}00 \xrightarrow{-25\%} \underbrace{R\$\,45{,}00}_{x}$

?

$$\begin{array}{ccc} R\$ & \text{——} & \% \\ 60 & \text{——} & 100 \\ x & \text{——} & 75 \end{array} \quad \cdots \quad x = 45$$

$$\begin{array}{ccc} R\$ & \text{——} & \% \\ 60 & \text{——} & 108 \\ y & \text{——} & 100 \end{array} \Rightarrow 108y = 6000 \quad \therefore y = 55{,}56$$

Economia: $55{,}56 - 45 = \boxed{R\$\,10{,}56}$

6.) % — torcedores

100 — 41 000

P — 36 080

$\therefore$ P = 0,88 = 88%

7.)

R$ 1000 $\xrightarrow{-20\%}$ R$800 $\xrightarrow{+10\%}$ R$880

X: NOV Y: DEZ

a.) R$ — %

1000 — 100

x — 80

$\therefore$ x = 800

b.) R$ — %

800 — 100

Y — 110

$\therefore$ Y = 880

12%.

c.) NÃO, SÃO IGUAIS !!! * Realize os cálculos!

8·) a·) $\% \text{ — } €$ $\Rightarrow 476x = 100 \cdot 65{,}4$

$100 \text{ — } 476$ $\therefore x \cong 13{,}74\%$

$x \text{ — } 65{,}4$

b·) Cotação em 15/01/2019:

$€1 = R\$4{,}2425$

Renda: $476 \cdot 4{,}2425 = R\$2019{,}43$

Transporte: $65{,}4 \cdot 4{,}2425 = R\$277{,}46$

c·) Pesquisar!!!

9·) DIAS — BOLOS $\Rightarrow 3x = 24 \cdot 10$

$3 \text{ — } 24$ $\therefore x = 80$

$10 \text{ — } x$

Lucro: $80 \cdot 50 = 4000$

Sim, ela alcançará a meta.

Exercício 10) Resolução de problemas: atividade em grupos.

Máquinas — Dias

11.) $(1\ m)^3 = (10\ dm)^3 \therefore 1\ m^3 = 1000\ dm^3$

$\Rightarrow 3\,000\ dm^3 = 3\ m^3 \therefore \boxed{V = 3\ m^3}$

$d = \dfrac{m}{V}$

- $\underline{80°C}$: $971{,}8 = \dfrac{m}{3} \therefore \boxed{m = 2915{,}4\ Kg}$

- $\underline{15°C}$: $999{,}1026 = \dfrac{m}{3} \therefore \boxed{m = 2997{,}3078\ Kg}$

12.)

		LÁPIS	CANETAS
Meninos	3	1.3 = 3	2.3 = 6
Meninas	4	2.4 = 8	1.4 = 4
	TOTAL	11	10

Portanto, temos:

$$\boxed{\frac{\text{CANETAS}}{\text{LÁPIS}} = \frac{10}{11}}$$

Capítulo 4 - TRÂNSITO, ALIMENTAÇÃO EQUILIBRADA, CIRCUITOS ELÉTRICOS... É CULPA DO(S) SISTEMA(S)!

Editor de equações online:
https://latex.codecogs.com/legacy/eqneditor/editor.php?lang=pt-br

Avaliação Oral:
https://docs.google.com/document/d/1thcjOZ0C5FXpGTuNSnTyWVPORmN6PeYDcp-JB1xao-o/edit?usp=sharing

Exercício 1.a) Devemos multiplicar o valor de cada nota pela representação de sua respectiva quantidade: $20x + 50y = 200 \Rightarrow 2x + 5y = 20$.

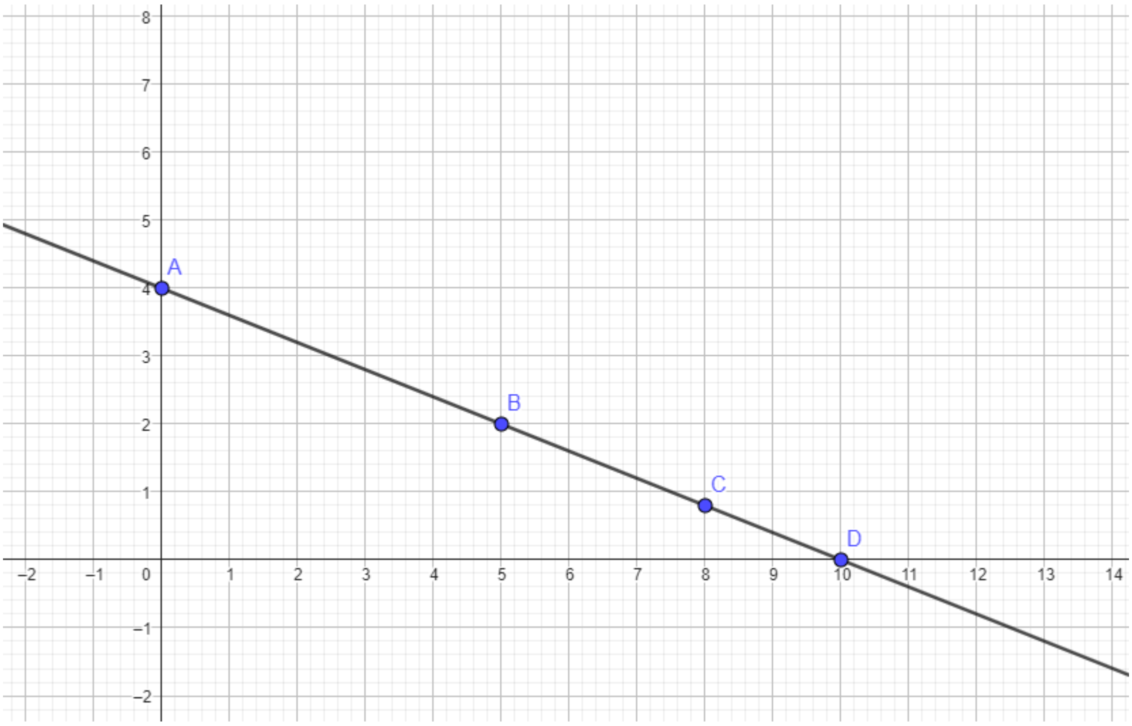
1.b) Basta isolar uma das variáveis a partir da equação obtida no item anterior. Temos duas possibilidades:

- isolar a variável y: $5y = 20 - 2x \Rightarrow y = \frac{20-2x}{5} \Rightarrow y = 4 - \frac{2}{5}x$;
- isolar a variável x: $2x = 20 - 5y \Rightarrow x = \frac{20-5y}{2} \Rightarrow x = 10 - \frac{5}{2}y$.

1.c)

x	y
0	4
5	2
8	0,8
10	0

1.d) https://www.geogebra.org/classic/jxcznjmr



Exercício 2.a) Será possível transportar todas as caixas ao mesmo tempo apenas se o elevador estiver apenas com as caixas, pois $10 \cdot 5 + 17 \cdot 20 = 390$.

2.b) $(1, 1)$, pois $5 \cdot 1 + 20 \cdot 1 = 25 \leq 400$.

2.c) Na situação apresentada, a melhor representação será dada pela inequação $5c + 20v \leq 400$, onde c : caixas de 5 kg e v : caixas de 20 kg.

Exercício 3.a) Pelas informações do enunciado, temos:

$$x + y = 274$$
$$0,5x + 0,25y = 100$$

3.b) Aplicando-se o método da soma, temos:

$$x + y = 274 \Rightarrow x + y = 274$$
$$0,5x + 0,25y = 100 \cdot (-2) \Rightarrow -x - 0,5y = -200 \Rightarrow 0,5y = 74 \Rightarrow y = 148$$

Substituindo-se o valor encontrado em uma das equações anteriores, temos:

$x + 148 = 274 \Rightarrow x = 274 - 148 = 126$

3.c)

https://www.proenem.com.br/enem/matematica/regra-de-cramer-e-discussao-de-sistemas-lineares/

Exercício 4.a) Pelas informações do enunciado, temos:

$4v + 2b = 498$

$2v + 3b = 367$

4.b) Aplicando-se o método da soma, temos:

$4v + 2b = 498 \quad \Rightarrow \quad 4v + 2b = 498$

$2v + 3b = 367 \cdot (-2) \Rightarrow -4v - 6b = -734 \Rightarrow -4b = -236 \Rightarrow b = 59$

Substituindo-se o valor encontrado em uma das equações anteriores, temos:

$2v + 3 \cdot 59 = 367 \Rightarrow 2v = 367 - 177 \Rightarrow 2v = 190 \Rightarrow v = 95$

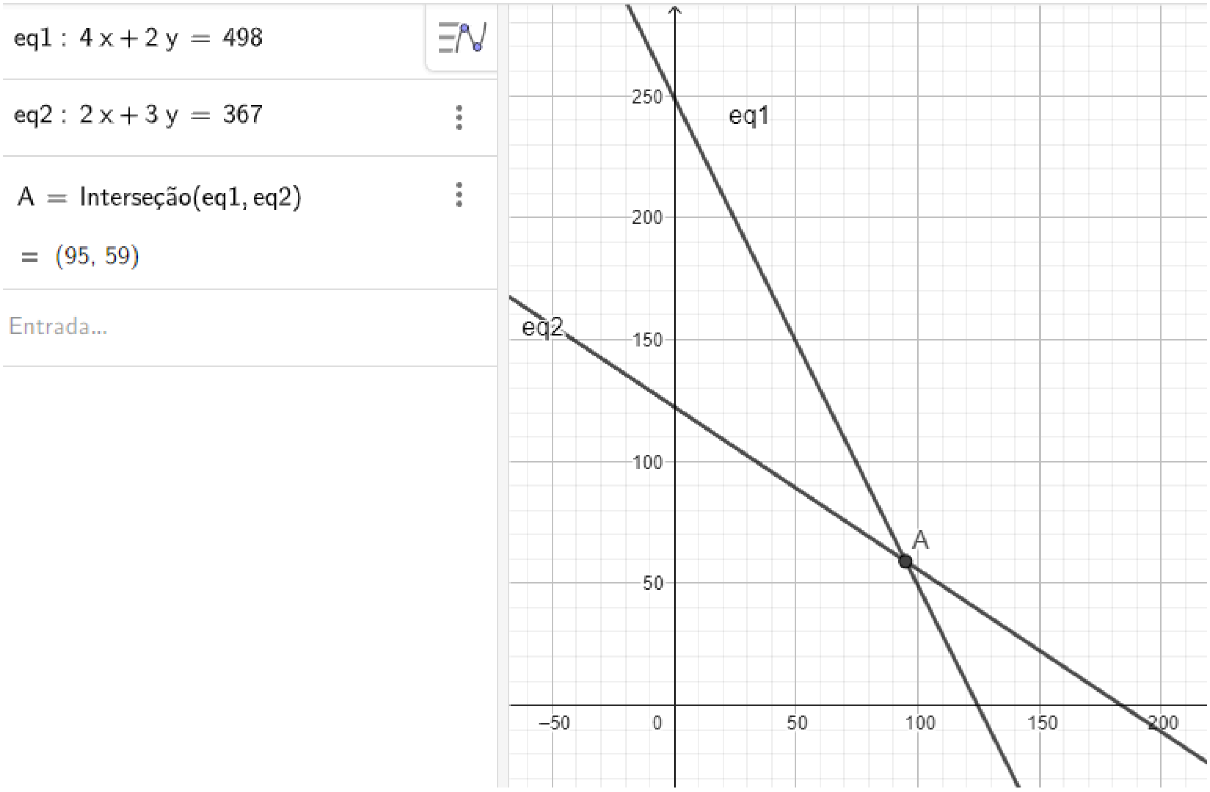
4.c) $v + b = 95 + 59 = 154 < 180$

Portanto, José gastou menos de R$ 180,00.

4.d)

v	b (Eq. 1)	b (Eq. 2)
0	249	122,33
25	199	105,67
50	149	89
75	99	72,33
100	49	55,67

4.e) https://www.geogebra.org/classic/ebmenvfj



4.f) O ponto $(95,\ 59)$ representa a solução do sistema.

4.g) Sistema Possível Determinado (SPD).

Exercício 5.a.I) Sugestão: multiplicar a 1ª equação por $(-\ 4)$ e a 2ª equação por (3):

$$-\ 12x\ -\ 8y\ =\ \ -\ 80$$

$$12x\ +\ 9y\ =\ \ \ 30\ \ \Rightarrow\ y\ =\ \ -\ 50$$

Substituindo-se o valor encontrado em uma das equações, temos:

$3x\ +\ 2\cdot(-\ 50)\ =\ 20 \Rightarrow 3x\ -\ 100\ =\ 20 \Rightarrow 3x\ =\ 120 \Rightarrow x\ =\ 40$

Portanto, temos SPD, sendo $(40,\ \ -\ 50)$ a solução do sistema.

5.a.II) Sugestão: multiplicar a 1ª equação por $(-\ 3)$:

$$-\ 3x\ -\ 3y\ =\ \ -\ 54$$

$$3x\ +\ 3y\ =\ \ \ 42\ \ \Rightarrow\ 0\ =\ \ -\ 12$$

Portanto, temos SI (sistema impossível - nenhuma solução).

5.a.III) Pelas informações do enunciado, temos:

$$x\ +\ y\ =\ 200$$

$$\frac{x+y}{2}\ =\ 100\ \Rightarrow\ x\ +\ y\ =\ 200$$

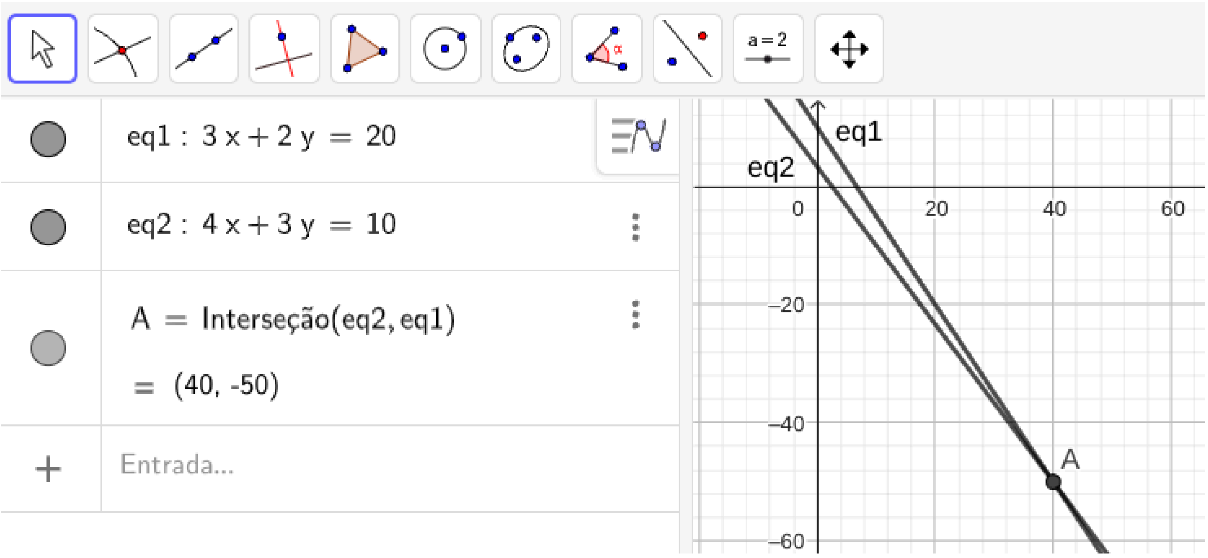
Sugestão: multiplicar a 1ª equação por $(-\ 1)$:

$- x - y = - 200$

$x + y = 200 \Rightarrow 0 = 0$

Portanto, temos SPI (sistema possível indeterminado - infinitas soluções).

5.b) https://www.geogebra.org/classic/kdjnvx4n



5.c) II; III; I.

5.d) Resposta pessoal.

Exercício 6.a.) Pelas informações do enunciado, temos:

Terreno 1: $2x + 2y = 200$ (1ª equação)

Terreno 2: $4x + 2y - 70 = 200 \Rightarrow 4x + 2y = 270$ (2ª equação)

Multiplicando-se a 1ª equação por $(- 2)$ e aplicando-se o método da soma, temos:

$- 4x - 4y = - 400$

$4x + 2y = 270 \Rightarrow - 2y =- 130 \Rightarrow y = 65$

Substituindo-se o valor encontrado em uma das equações, temos:

$x + y = 100 \Rightarrow x = 100 - 65 \Rightarrow x = 35$

Logo, as dimensões dos terrenos são dados por:

- Terreno 1: 35 m X 65 m;
- Terreno 2: 70 m X 30 m.

Exercício 7) Pesquisa na internet. Dica:

https://matematicabasica.net/matrizes/

Exercício 8.a)

$$\begin{pmatrix} 15 & 12 & 10 & 16 & 20 \\ 8 & 16 & 11 & 3 & 5 \\ 9 & 7 & 6 & 13 & 10 \end{pmatrix}$$

8.b) 3 linhas e 5 colunas; ordem $3 \ X \ 5$.

Exercício 9.a) Menor: dia 1 e instante 3; $a_{13} = 35$; Maior: dia 3 e instante 1: $a_{31} = 40,3$.

9.b) Ordem $3X6$; 3 linhas e 6 colunas; temperatura aferida 6 vezes ao dia durante 3 dias.

9.c) $a_{24} = a_{16} = 39,8$; as temperaturas são iguais.

Exercício 10.a) As matrizes apresentadas nos exercícios indicados não possuem lei de formação.

10.bc.d.e) Pesquisa na internet. Dica:

https://matematicabasica.net/matrizes/

Exercício 11.a) Inicialmente, devemos indicar os elementos genericamente para facilitar o acompanhamento da resolução:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Observe que:

- $i < j$ ocorre em a_{12}, a_{13} e a_{23}: utilizar a 1ª fórmula;
  - Exemplo: $a_{12} = 2 \cdot 1 - 2^2 = 2 - 4 = \ -2$
- $i = j$ ocorre em a_{11}, a_{22} e a_{33}: utilizar a 2ª fórmula;
  - Exemplo: $a_{22} = 2 + 2 = 4$
- $i > j$ ocorre em a_{21}, a_{31} e a_{32}: utilizar a 3ª fórmula;
  - Exemplo: $a_{32} = 3^2 + 2 = 9 + 2 = 11$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -7 \\ 5 & 4 & -5 \\ 10 & 11 & 6 \end{pmatrix}$$

11.b)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 7 & 10 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercício 12) Pesquisa na internet. Dica:
https://matematicabasica.net/matrizes/

Exercício 13.a)

$$F = \begin{pmatrix} 95 & 63 \\ 125 & 51 \\ 82 & 32 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 90 & 42 \\ 147 & 75 \\ 102 & 41 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 102 & 37 \\ 134 & 62 \\ 99 & 35 \end{pmatrix}$$

13.b)

$$F + M + A = \begin{pmatrix} 95 + 90 + 102 & 63 + 42 + 37 \\ 125 + 147 + 134 & 51 + 75 + 62 \\ 82 + 102 + 99 & 32 + 41 + 35 \end{pmatrix} \rightarrow V_t = \begin{pmatrix} 287 & 142 \\ 406 & 188 \\ 283 & 108 \end{pmatrix}$$

13.c)

$$M - A = \begin{pmatrix} 90 - 102 & 42 - 37 \\ 147 - 134 & 75 - 62 \\ 102 - 99 & 41 - 35 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -12 & 5 \\ 13 & 13 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Os valores acima representam a quantidade vendida a mais no mês de Março em relação ao mês de Abril.

Exercício 14.a) Para definir os gastos totais, devemos somar os gastos da universidade e dos transportes:

$$G_t = \begin{pmatrix} 0 + 300 \\ 309{,}94 + 420 \\ 779{,}28 + 450 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 300 \\ 729{,}94 \\ 1229{,}28 \end{pmatrix}$$

14.b) Resposta pessoal.
14.c) Matriz coluna.

Exercício 15.a) Adicionando 3% de reajuste no valor de cada produto, temos:

$$\begin{pmatrix} 411{,}90 & 1697{,}44 & 1032{,}99 & 1080{,}47 & 1904{,}47 & 513{,}97 \end{pmatrix}$$

15.b) Matriz linha.

Exercício 16.a) Multiplicando-se as matrizes dadas, temos:

$$M_{1\times 3} = \begin{pmatrix} 18 & 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot N_{3\times 1} = \begin{pmatrix} 0{,}70 \\ 3{,}49 \\ 8{,}99 \end{pmatrix} = (12{,}60 + 17{,}45 + 26{,}97) \rightarrow (57{,}02)$$

16.b)

$$\begin{pmatrix} 18 & 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}70 & 0{,}65 \\ 3{,}49 & 3{,}55 \\ 8{,}99 & 8{,}20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12{,}60 + 17{,}45 + 26{,}97 & 11{,}70 + 17{,}75 + 24{,}60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 57{,}02 & 54{,}05 \end{pmatrix}$$

Exercício 17) F / V / V.
Descrever as condições para a multiplicação de matrizes.

Exercício 18.a) Devido às condições da operação de multiplicação de matrizes, podemos apenas realizar $B \times A$, pois a quantidade de colunas de B é igual ao número de linhas de A.

ERRATA (15/05/2025 - 07h30min): anteriormente, a palavra linhas estava incorretamente trocada por colunas. Muito obrigado, **JÚLIA MENDES DE SOUZA** e **MARIA CLARA MAGALHÃES DE SOUSA**!

18.b)

$$\begin{pmatrix} 28 + 6{,}6 + 18{,}2 \\ 1{,}2 + 2 + 2{,}45 \\ 36 + 10 + 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 52{,}8 \\ 5{,}65 \\ 46 \end{pmatrix}$$

Exercício 19.a) Multiplicando-se a 1ª equação por (2) e aplicando-se o método da soma, temos:

$4x + 2y = 36$

$3x - 2y = 20 \Rightarrow 7x = 56 \Rightarrow x = 8$

Substituindo-se o valor encontrado em uma das equações, temos:

$2x + y = 18 \Rightarrow 2 \cdot 8 + y = 18 \Rightarrow 16 + y = 18 \Rightarrow y = 18 - 16 \Rightarrow y = 2.$

19.a)

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 20 \end{bmatrix}$$

19.b)

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 18 \\ 3 & -2 & 20 \end{bmatrix}$$

19.c) Aplicando-se o método do escalonamento, temos:

$$\begin{cases} 2 & 1 & \vdots 18 \\ 3 & -2 & \vdots 20 \end{cases} \xrightarrow[2L_1+L_2]{} \begin{cases} 2 & 1 & \vdots 18 \\ 7 & 0 & \vdots 56 \end{cases} \xrightarrow[L_2:7]{} \begin{cases} 2 & 1 & \vdots 18 \\ 1 & 0 & \vdots 8 \end{cases} \xrightarrow[-2L_2+L_1]{} \begin{cases} 0 & 1 & \vdots 2 \\ 1 & 0 & \vdots 8 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[L_{12}]{} \begin{cases} 1 & 0 & \vdots 8 \\ 0 & 1 & \vdots 2 \end{cases}$$

Exercício 20) Seja u: população de Ourinhos e s: população de Santa Cruz do Rio Pardo. Pelas informações fornecidas, temos:

$u + s = 162\,500 \Rightarrow \quad u + \quad s = 162\,500 \rightarrow L_1 + L_2 \Rightarrow u + \quad s = 162\,500$

$u = 3s - 27\,500 \Rightarrow -u + 3s = 27\,500 \qquad\qquad\qquad 4s = 190\,000$

$\Rightarrow s = \frac{190\,000}{4} \Rightarrow s = 47\,500$

Substituindo-se o valor de s em uma das equações:

$\Rightarrow u + 47\,500 = 162\,500 \Rightarrow u = 162\,500 - 47\,500 = 115\,000.$

Exercício 21) Sejam:

- c: quantidade de canetas;
- b: quantidade de borrachas;
- l: quantidade de lápis.

Pelo enunciado:

$$\begin{cases} 2 & 1 & 1 & 21,3 \\ 3 & 2 & 0 & 31,7 \\ 1 & 0 & 4 & 14,9 \end{cases} \xrightarrow[L_{13}]{} \begin{cases} 1 & 0 & 4 & 14,9 \\ 2 & 1 & 1 & 21,3 \\ 3 & 2 & 0 & 31,7 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[-3L_1+L_3]{-2L_1+L_2} \begin{cases} 1 & 0 & 4 & 14,9 \\ 0 & 1 & -7 & -8,5 \\ 0 & 2 & -12 & -13 \end{cases} \xrightarrow[-2L_2+L_3]{} \begin{cases} 1 & 0 & 4 & 14,9 \\ 0 & 1 & -7 & -8,5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{cases}$$

- Observação: L_{ij} significa trocar de posição a linha i com a linha j.

Então:

$\Rightarrow 2l = 4 \Rightarrow l = 2$

$\Rightarrow b - 7l =- 8,5 \Rightarrow b - 14 =- 8,5 \Rightarrow b =- 8,5 + 14 \Rightarrow b = 5,5$

$\Rightarrow c + 4l = 14,9 \Rightarrow c + 8 = 14,9 \Rightarrow c = 14,9 - 8 \Rightarrow c = 6,9$

Portanto, temos l: R$ 2,00; b: R$ 5,50 e c: R$ 6,90.

Exercício 22) Sejam:

- e: quantidade de litros de etanol;
- g: quantidade de litros de gasolina.

$$\begin{cases} e + g = 45 \\ 2,79e + 3,79g = 137,6 \end{cases}$$

A matriz completa é dada por:

$$\begin{cases} 1 & 1 & 45 \\ 2,79 & 3,79 & 137,6 \end{cases} \xrightarrow[-2,79L_1+L_2]{} \begin{cases} 1 & 1 & 45 \\ 0 & 1 & 12,05 \end{cases}$$

Assim, temos $g = 12,05$ e $e = 45 - 12,05 = 32,95$.

Exercício 23.a)

$$\begin{cases} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 1 & 10 \end{cases} \xrightarrow[-L_1+L_3]{-2L_1+L_2} \begin{cases} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{cases}$$

Assim, temos:

$y = 4$

Substituindo o valor encontrado na 2ª linha, temos:

$\Rightarrow -4 - z = -5 \Rightarrow -z = -5 + 4 \Rightarrow -z = -1 \Rightarrow z = 1$

Substituindo os valores encontrados na 1ª linha, temos:

$\Rightarrow x + 4 + 1 = 6 \Rightarrow x = 6 - 5 \Rightarrow x = 1$

Portanto, a solução do sistema é dada por $(1, 4, 1)$.

23.b)

$$\begin{cases} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \end{cases} \xrightarrow[-2L_1+L_3]{-L_1+L_2} \begin{cases} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & -2 \end{cases} \xrightarrow[L_2+L_3]{} \begin{cases} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & -1 \end{cases}$$

Assim, temos:

$\Rightarrow z = \frac{1}{7}$

Substituindo o valor encontrado na 2ª linha, temos:

$\Rightarrow y - \frac{2}{7} = 1 \Rightarrow y = 1 + \frac{2}{7} = \frac{9}{7}$

Substituindo os valores encontrados na 1ª linha, temos:

$\Rightarrow x + \frac{9}{7} + \frac{3}{7} = 4 \Rightarrow x + \frac{12}{7} = 4 \Rightarrow x = \frac{28-12}{7} = \frac{16}{7}$.

Portanto, a solução do sistema é dada por $\left(\frac{16}{7}, \frac{9}{7}, \frac{1}{7}\right)$.

Exercício 24) Inicialmente, devemos calcular o determinante da matriz principal:

$$|D| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-2) = 1 + 4 = 5$$

Agora, substituindo-se os valores na coluna da variável x pelos termos independentes, temos:

$$|D_x| = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 15 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot 1 - 15 \cdot (-2) = 0 + 30 = 30$$

Agora, substituindo-se os valores na coluna da variável y pelos termos independentes, temos:

$$\left|D_y\right| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 15 \end{vmatrix} = 1 \cdot 15 - 0 \cdot 2 = 15 - 0 = 15$$

Por curiosidade, segue a escrita da expressão acima no formato **LaTeX** - [o que é isso?]()

\begin{vmatrix}
D_{y}
\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}
1 & 0\\
2 & 15
\end{vmatrix}=1\cdot 15-0\cdot 2=15-0=15

Pela Regra de Cramer, podemos concluir que:
x=\frac{\left | D_{x} \right |}{\left | D \right |}=\frac{30}{5}=6

$$x = \frac{|D_x|}{|D|} = \frac{30}{5} = 6$$

y=\frac{\left | D_{y} \right |}{\left | D \right |}=\frac{15}{5}=3

$$y = \frac{|D_y|}{|D|} = \frac{15}{5} = 3$$

Portanto, a solução do sistema é dada por $(6, 3)$.

Exercício 25) Inicialmente, devemos calcular o determinante da matriz principal:

$$\left|D\right| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 8 + 2 + 3 - (-1) - (-4) - 12 = 13 + 5 - 12 = 6$$

Agora, substituindo-se os valores na coluna da variável x pelos termos independentes, temos:

$$\left|D_x\right| = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -8 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 20 - 16 + 12 - 8 + 16 - 30 = 24 - 30 = -6$$

Agora, substituindo-se os valores na coluna da variável y pelos termos independentes, temos:

$$\left|D_y\right| = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -8 & -4 \end{vmatrix} = -32 + 10 - 8 - 4 + 20 + 32 = 18$$

Agora, substituindo-se os valores na coluna da variável z pelos termos independentes, temos:

$$\left|D_z\right| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & -8 \end{vmatrix} = 16 + 4 + 15 + 5 + 8 - 24 = 48 - 24 = 24$$

Pela Regra de Cramer, podemos concluir que:

$$x = \frac{|D_x|}{|D|} = \frac{-6}{6} = -1$$

$$y = \frac{|D_y|}{|D|} = \frac{18}{6} = 3$$

$$z = \frac{|D_z|}{|D|} = \frac{24}{6} = 4$$

Portanto, a solução do sistema é dada por $(-\ 1, 3, 4)$.

Exercício 26) Substituindo-se os valores numéricos das razões trigonométricas, temos:

$$|N| = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \sqrt{3} & 0 \end{vmatrix} = 0 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 0 - 0 - \frac{3}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{4}$$

Exercício 27)

Sejam:

- p: quantidade de alunos no 1º ano;
- s: quantidade de alunos no 2º ano;
- t: quantidade de alunos no 3º ano.

O sistema linear que representa a situação é:

$$\begin{cases} p + s = 96 \\ s + t = 77 \\ p + t = 109 \end{cases}$$

$$|D| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 + 0 - 0 - 0 - 0 = 2$$

$$|D_x| = \begin{vmatrix} 96 & 1 & 0 \\ 77 & 1 & 1 \\ 109 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 96 + 109 + 0 - 0 - 77 - 0 = 128$$

$$|D_y| = \begin{vmatrix} 1 & 96 & 0 \\ 0 & 77 & 1 \\ 1 & 109 & 1 \end{vmatrix} = 77 + 96 + 0 - 0 - 0 - 109 = 64$$

$$|D_z| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 96 \\ 0 & 1 & 77 \\ 1 & 0 & 109 \end{vmatrix} = 109 + 77 + 0 - 96 - 0 - 0 = 90$$

Pela Regra de Cramer, concluímos que:

$$x = \frac{|D_x|}{|D|} = \frac{128}{2} = 64$$

$$y = \frac{|D_y|}{|D|} = \frac{64}{2} = 32$$

$$z = \frac{|D_z|}{|D|} = \frac{90}{2} = 45$$

Portanto, a solução é dada por $(64, 32, 45)$.

Exercício 28.a) Calcule os determinantes de ordem 2 e, após isso, resolva a inequação. **IMPORTANTE:** ao multiplicar ou dividir uma inequação por um número negativo devemos **inverter** o sinal da desigualdade.

$16 - 4x > \ - 20 + 12 \Rightarrow - 4x >- 8 - 16 \Rightarrow - 4x >- 24 \ \cdot (- 1)$

$\Rightarrow 4x < 24 \Rightarrow x < 6.$

28.b) Calcule o determinante de ordem 3 e, após isso, resolva a equação:

$2x^2 + 0 - 2 - 0 - 4 - 4x = 0 \Rightarrow 2x^2 - 4x - 6 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$

Ao resolver a equação quadrática acima, concluímos que $x =- 1$ ou $x = 3$.

Sugestão: podemos aplicar o método da “soma e produto” ou a “fórmula de Bháskara”, por exemplo.

Capítulo 5 - ARQUIMEDES E CAVALIERI: UMA DUPLA DE MUITA CAPACIDADE!

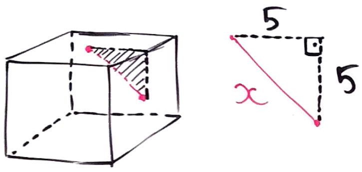
1) $A_T = 600\ cm^2$

a) $6a^2 = 600\ cm^2 \cdots \therefore \boxed{a = 10\ cm}$

b) $V = a^3 = 10^3 \therefore \boxed{V = 1000\ cm^3}$

c) $d_c = a\sqrt{3} \therefore \boxed{d_c = 10\sqrt{3}\ cm}$

d)



$\therefore \boxed{x = 5\sqrt{2}\ cm}$

e) Aresta a: $V = a^3$; $A_T = 6a^2$

Aresta 2a: $V_1 = (2a)^3 = 8a^3 \therefore \boxed{V_1 = 8V}$

$A_{T_1} = 6(2a)^2 = 6.4a^2 \therefore \boxed{A_{T_1} = 4A_T}$

Aresta $\frac{a}{2}$: $V_2 = \left(\frac{a}{2}\right)^3 = \frac{a^3}{8} \therefore \boxed{V_2 = \frac{V}{8}}$

$A_{T_2} = 6\left(\frac{a}{2}\right)^2 = 6.\frac{a^2}{4} \therefore \boxed{A_{T_2} = \frac{A_T}{4}}$

f) Aresta : Ka

$\Rightarrow V_K = (Ka)^3 = K^3 . a^3 \therefore \boxed{V_K = K^3 . V}$

$\Rightarrow A_{T_K} = 6.(Ka)^2 = 6K^2a^2 \therefore \boxed{A_{T_K} = K^2 . A_T}$

g) Aumento : 20% $\rightarrow$ linear nas diagonais;

$d = a\sqrt{3} \Rightarrow \boxed{d_1 = 1{,}2a\sqrt{3} = 1{,}2\,d}$

Área : $A_T = 6a^2$

$A_{T_1} = 6.(1{,}2a)^2 = 6.1{,}44a^2 = 1{,}44\,A_T$

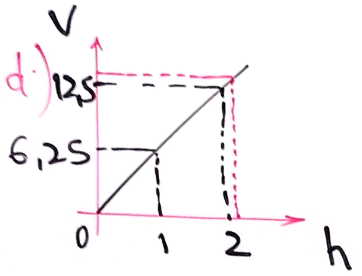
$\hookrightarrow$ $\boxed{\text{aumento de } 44\%.}$

2) a) $V = 2{,}5^2 . h \therefore \boxed{V = 6{,}25h}$

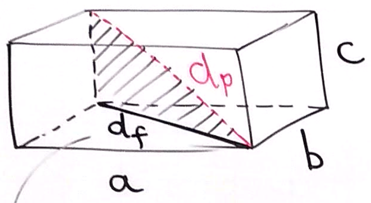
b) Diretamente proporcionais, pois a razão entre as grandezas V e h é constante: $\frac{V}{h} = 6{,}25.$

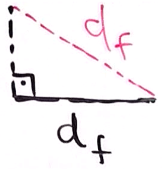
c) $13\,500 \text{ L} \xrightarrow[\div 1000]{} = 13{,}5 \text{ m}^3$

$\Rightarrow 6{,}25\,h = 13{,}5 \Rightarrow h = \dfrac{13{,}5}{6{,}25} \therefore \boxed{h = 2{,}16 \text{ m}}$

d) 

Observe que o limite será atingido quando $h = 2{,}16$ m.

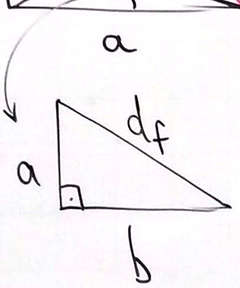
3a) 



$\Rightarrow d_f^2 = d_f^2 + c^2$

$\Downarrow$ (i)

$\Rightarrow d_f^2 = \underbrace{a^2 + b^2}_{d_f^2} + c^2$



$\Rightarrow d_f^2 = a^2 + b^2$ (i)

$\therefore \boxed{d_p = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

b) $S = 2ab + 2bc + 2ac \therefore \boxed{S = 2(ab + bc + ac)}$

c) $V = abc$

d) Considere a aresta c (análogo com as demais arestas):

$V_1 = ab \cdot 2c = 2abc \therefore \boxed{V_1 = 2V}$

e) $V_2 = ab \cdot 3c = 3abc \therefore \boxed{V_2 = 3V}$

f) $V_3 = 2a \cdot 3b \cdot 4c = 24\,abc \therefore \boxed{V_3 = 24V}$

4) a) $V = 0{,}8 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}6 = 0{,}24\ m^3 \xrightarrow{\cdot 1000}$ $\boxed{\text{Capacidade: } 240\ L}$

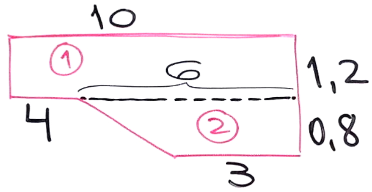
b) Ideal: $2\ mg/L \Rightarrow \dfrac{x}{240} = 2 \therefore \boxed{x = 480\ mg/L}$

5) Resposta pessoal (definir uma constante K para multiplicar 1, 3 e 4). Exemplo:

Seja $K = 10 \Rightarrow$ dimensões: 10 cm, 30 cm e 40 cm.

6) a) Sim: considerar como bases as faces frontal e traseira.

b)



$A_b = A_{①} + A_{②}$ TRAPÉZIO!

$$A_b = 10 \cdot 1{,}2 + \boxed{\frac{(6+3) \cdot 0{,}8}{2}}$$

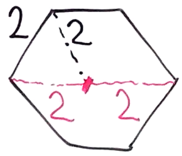
$$A_b = 12 + 9 \cdot 0{,}4 \therefore A_b = 15{,}6\ m^2$$

$$\Rightarrow V = A_b \cdot h = 15{,}6 \cdot 6 \therefore \boxed{V = 93{,}6\ m^3}$$

c) Seja x o preço em R$ do m^3 de terra.
Então:

$$93{,}6 \cdot x = 3276 \ \ldots \ \therefore \boxed{x = 35}$$

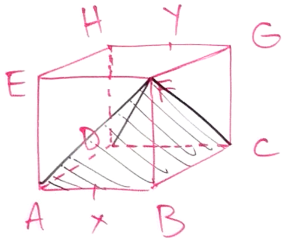
7) Pelo Teorema de Pitágoras, concluímos que a altura do prisma é $h = 3$ cm.
Na base, temos:



$$A_b = \frac{3 \cdot 2^2\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}\ cm \Rightarrow V = 6\sqrt{3} \cdot 3$$

$$\therefore \boxed{V = 18\sqrt{3}\ cm^3}.$$

8.) a.)



As bases são coincidentes (a mesma).

b.) $A_c = A_p = 4^2 = \boxed{16\ cm^2}$

c.) $V_c = 4^3 = 64\ cm^3$; $V_p = \frac{64}{3}\ cm^3$

$$\boxed{\frac{V_{Pirâmide}}{V_{prisma}} = \frac{1}{3}}$$

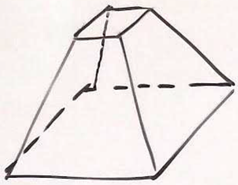
9.) Razão de semelhança : $K = \frac{2}{3}$

Logo, a razão entre as áreas será dada por:

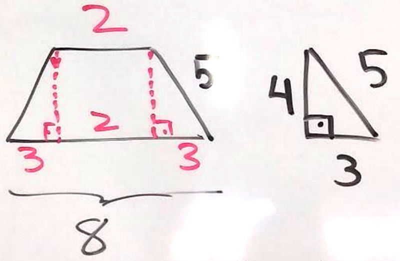
$$\frac{A_{menor}}{A_{MAIOR}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow A_{menor} = \frac{4}{9} \cdot A_{MAIOR} = \frac{4}{9} \cdot 225$$

$$\therefore \boxed{A_{menor} = 100\ m^2}$$

10.) a.)



b.)



$$A = \frac{(8+2)\cdot 4}{2} = 20\ cm^2$$

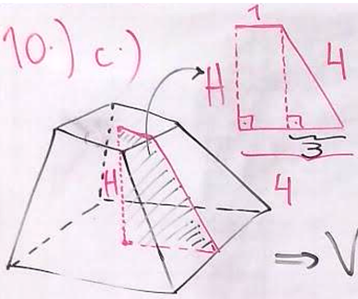
$$A_{peça} = 4\cdot 20 + 8^2 + 2^2$$
$$= 80 + 64 + 4$$
$$= 148\ cm^2$$

100 peças: $14\,800\ cm^2$

$1{,}48\ m^2$ $\xleftarrow{:10\,000}$

Desperdício: $\boxed{0{,}02\ m^2}$

10.) c.)



$\Rightarrow 4^2 = 3^2 + H^2 \;\dots\; H = \sqrt{7}$

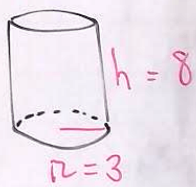
$V_{Tronco} = \frac{H}{3} \cdot \left(A_B + \sqrt{A_B \cdot A_b} + A_b \right)$

$\Rightarrow V_{Tronco} = \frac{\sqrt{7}}{3} \cdot \left(8^2 + \sqrt{8^2 \cdot 2^2} + 2^2 \right)$

item d.)

$\therefore \boxed{V_{Tronco} = 28\sqrt{7} \text{ cm}^3} \cong \boxed{74{,}1 \text{ mL}}$

11.) a.)



b.) $A_T = 2\pi r(r+h) =$

$= 2 \cdot 3{,}14 \cdot 3 \cdot (3+8) = 66 \cdot 3{,}14$

$\therefore \boxed{A_T = 207{,}24 \text{ cm}^2}$

$V = \pi r^2 h = 3{,}14 \cdot 3^2 \cdot 8 \therefore \boxed{V = 226{,}08 \text{ cm}^3}$

12.) Obs: desconsidere $r = 13$.

$h = 4r \,(i) \Rightarrow 2\pi r(r+h) = 270$

$\overset{(i)}{\Rightarrow} 2 \cdot 3 \cdot r(r + 4r) = 270 \Rightarrow 6r \cdot 5r = 270$

$\dots \;\therefore r = 3\text{cm} \wedge h = 12\text{cm}$

$\Rightarrow V = \pi r^2 h = 3 \cdot 3^2 \cdot 12 = 324 \text{ cm}^3 = \boxed{324 \text{ mL}}$

13.) Cilindro A : $r = 20$; $h = 12$:

$\Rightarrow V_A = \pi . 20^2 . 12 = \pi . 400 . 12$

$\therefore \boxed{V_A = 4800\pi \ cm^3}$

Cilindro B : $r = 10$; $h = 24$:

$\Rightarrow V_B = \pi . 10^2 . 24 = \pi . 100 . 24$

$\therefore \boxed{V_B = 2400\pi \ cm^3}$

14.) $\frac{V}{2} = 157 \therefore V = 324 \ mL$

Cubos de gelo : $V_c = 10 . 3^3 \therefore V_c = 270 \ cm^3$

Assim, temos:

$\frac{V}{2} + V_c = 157 + 270 =$

$= 427 > V$ Portanto, o líquido será derramado!

Errata (30/05/22 - 11h20min): Considere $V = 314 \ mL$.

15.) a.) Cone.

b.) $g^2 = 12^2 + 5^2$ .... $\boxed{g = 13\ cm}$

c.) $V_{cone} = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi . 5^2 . \cancel{12}^{4}}{\cancel{3}}$ ....

$\therefore \boxed{V_{cone} = 100\pi\ cm^3}$

$A_T = \pi r (r+g) = \pi . 5 (\underbrace{5+13}_{18})$

$\therefore \boxed{A_T = 90\pi\ cm^2}$

16.) $V_{cone} = \frac{1}{3} . V_{cilindro}$

17.) $\pi r^{\cancel{2}} = \frac{\cancel{2}\cancel{r}.h}{\cancel{2}} \therefore h = \pi r$

18) $d = 8 \Rightarrow r = 4\ cm$

$$\Rightarrow V = \frac{\pi \cdot 4^2 \cdot \cancel{12}^{4}}{\cancel{3}} = \pi \cdot 16 \cdot 4$$

$$\Rightarrow V = 64\pi\ cm^3$$

$$\therefore \boxed{V \cong 200{,}96\ mL}$$

19) a) 

b) $4\pi R^2 = 4\pi$

$\Rightarrow R = 1 \therefore D = 2\ cm$

c) $V = \frac{4}{3}\pi \cdot 1^3 = \frac{4\pi}{3}\ cm^3$

d) $K^3 = 1000\,000$

$\Rightarrow K = \sqrt[3]{1000\,000} \therefore \boxed{K = 100}$

20) Seja $r_1 = 2r$. Então:

$S = 4\pi r^2 \Rightarrow S_1 = 4\pi r_1^2 =$

$\Rightarrow S_1 = 4\pi.(2r)^2 = 4\pi.4r^2 =$

$= 4 \cdot 4\pi r^2 \therefore S_1 = 4S$.

Seja $r_2 = 3r$. Então:

$\Rightarrow S_2 = 4\pi r_2^2 \ldots\ldots \therefore S_2 = 9S$.

21) $V = 12$ gomos $= 12 . 3\pi$

$\Rightarrow V = 36\pi$

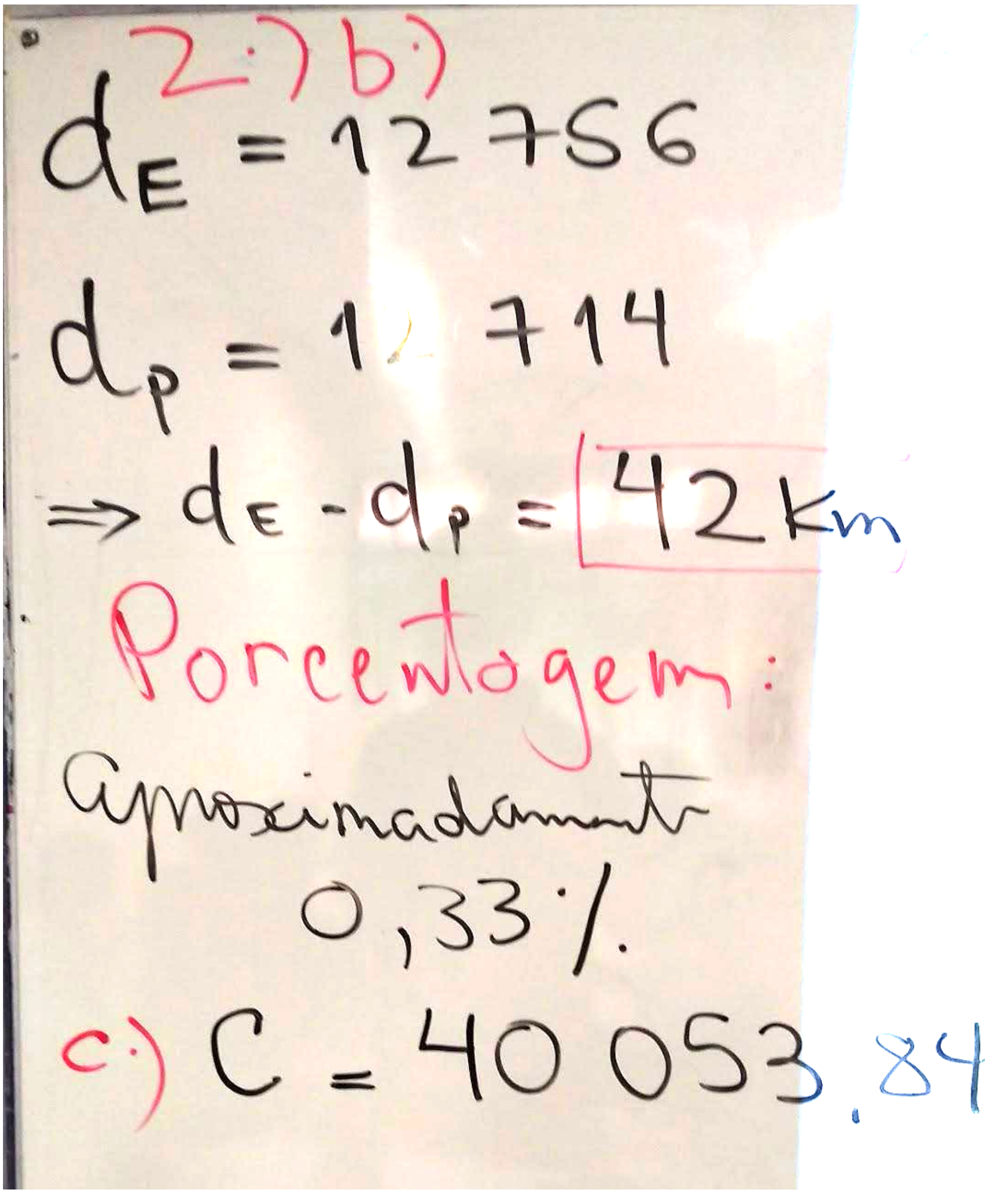
$\Rightarrow \frac{4}{3}\cancel{\pi} R^3 = 36\cancel{\pi} \ldots \Rightarrow R^3 = 27$

$\Rightarrow R = \sqrt[3]{27} \therefore R = 3\text{ cm}$

22) Basta substituir o raio dado na fórmula do volume:

$V \cong 1,09751 \times 10^{12}\ Km^3$

Capítulo 6 - DA ESFERA PARA O PLANO



Observação: Diâmetro Polar $d_p = 12\ 714\ km$.

3.) Imagine que fosse possível dar a volta ao mundo caminhando sobre a linha do Equador. Se a velocidade média de uma pessoa caminhando for de 5 km/h e ela caminhar 8 horas diariamente, quantos dias serão necessários para que percorra toda a extensão da linha do Equador, ou seja, para dar uma volta equatorial ao redor do planeta? Considere que o raio equatorial terrestre mede 6 378 km e que $\pi = 3{,}14$.

1 dia : 40 Km

$$\begin{array}{r|l} 1001 & 365 \\ -730 & 2 \text{ anos} \\ \hline 271 & 30 \\ & 9 \text{ meses} \end{array}$$

Km	dia
40	1
40 053,84	x

$x = 1001{,}3\ldots$

3.) a) $80 \cdot 24 = 1920\,h$

$$v = \frac{40\,053{,}84}{1920}$$

$$\therefore \boxed{\vec{v} \cong 20{,}9\ Km/h}$$

b) $$\vec{v} = \frac{40\,053{,}84}{24}$$

$$\therefore \boxed{\vec{v} = 1668{,}91\ Km/h}$$

4a.) 7% de

8 510 295,914 Km^2

HN: 595 720,71 Km^2

b.) 93%:

HS: 7 914 575,2 Km^2

5.) b.) Raio do globo: 10 cm;

Raio da Terra:

637100000 cm

Escala numérica:

$$\frac{1\cancel{0}}{63710000\cancel{0}} \Rightarrow \boxed{1 : 63\,710\,000}$$

5c)

$$\begin{array}{ccc} cm & \text{——} & Km \\ 1 & \text{——} & 1000 \\ x & \text{——} & 6\,371 \end{array}$$

$$\therefore \boxed{x = 6{,}371 \text{ cm}}$$

d)

$$\begin{array}{ccc} cm & \text{——} & Km \\ 1 & \text{——} & 637{,}1 \\ 12{,}5 & \text{——} & y \end{array}$$

$$\therefore \boxed{y = 7\,963{,}75 \text{ Km}}$$

6.) a.) $S = 4\pi R^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 6371^2$

.... $\therefore \boxed{S = 509\ 805\ 890{,}96\ Km^2}$

b.) 71% da superfície:

$\Rightarrow 0{,}71 \cdot S = \boxed{361\ 962\ 182{,}58\ Km^2}$

c.) Pesquisa!

7.) a.) Ângulo — Km

$$\begin{array}{ccc} 7{,}2^\circ & — & 800 \\ 360 & — & x \end{array}$$ ...

... $\therefore \boxed{x = 40\ 000\ Km}$

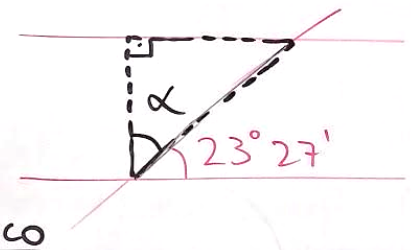
7.) b.) $C = 40\,000$ Km

$\Rightarrow 2\pi r = 40000 \ldots \therefore r \cong 6\,369\,426{,}75$ m

c.) não, é irrelevante.

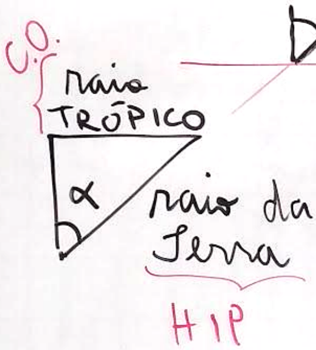
8.) Respostas pessoais - aplicativo e versão web disponibilizados durante as aulas.

9.) a.)



$\alpha = 90° - 23°27'$

$\ldots \therefore \alpha = 66°33'$



$\Rightarrow \text{sen } 66°33' = \dfrac{r_t}{6371}$

$\ldots \therefore r_t = 5\,861{,}32$ Km

b.) Como a situação é análoga, o raio solicitado será o mesmo do item anterior.

Exercício 10) Excluído - faltam informações na imagem fornecida no exercício.

Exercício 11) Pesquisa.

Exercício 12)

A. longitude
B. meridiano de Greenwich
C. 15 / rotação / fuso horário
D. adiantadas (+) / atrasadas (-)
E. quatro

Exercício 13)
projeção tangente plana; projeção tangente cilíndrica; projeção tangente cônica;
projeção secante plana; projeção secante cilíndrica; projeção secante cônica.

Exercício 14)
C; A; B; A; C; B.

Exercício 15.a) Não, pois a Groenlândia está mais próxima do Polo Norte.
b) Apenas nas regiões próximas da Linha do Equador, pois, ao distanciar-se dessa linha, aumentamos as distorções nos mapas.
c) Polos: MAIOR a distorção; linha do Equador: MENOR a distorção.
d) Resposta pessoal.

Exercício 16) B; D; A; C.

Propriedades

- Projeção conforme: são as projeções em que há o cruzamento de paralelos e meridianos em ângulos retos. Nesse tipo de projeção, os ângulos são conservados e as áreas apresentam deformações.
- Projeção equivalente: são as projeções que apresentam bastante deformidade em torno de um ponto devido à variação da escala. Nesse tipo de projeção, há conservação das áreas e distorção dos ângulos.
- Projeção equidistante: são as projeções que não apresentam deformidades lineares, ou seja, as distâncias estarão condizentes com a realidade apenas em uma direção. Nesse tipo de projeção, preserva as distâncias, mas deforma as áreas e os ângulos.

- Projeção afilática: são as projeções que não preservam forma, ângulo, distância ou área, ou seja, não há conservação das propriedades. Porém, nesse tipo de projeção, há minimização das deformações em conjunto.

Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/geografia/projecoes-cartograficas.htm#:~:text=Proje%C3%A7%C3%A3o%20equidistante%3A%20s%C3%A3o%20as%20proje%C3%A7%C3%B5es,as%20%C3%A1reas%20e%20os%20%C3%A2ngulos.

Exercício 17) Pesquisa.

Exercício 18.a) Círculos concêntricos.
b) Na projeção azimutal equidistante, as projeções não apresentam deformidades lineares, ou seja, as distâncias são condizentes com a realidade apenas em uma direção. Nesse tipo de projeção, preserva-se as distâncias, mas deforma-se as áreas e os ângulos.
c) Ao nos distanciarmos do ponto de tangência, a projeção vai ficando distorcida.

Exercício 19) Pesquisa - Indicatriz de Tissot.

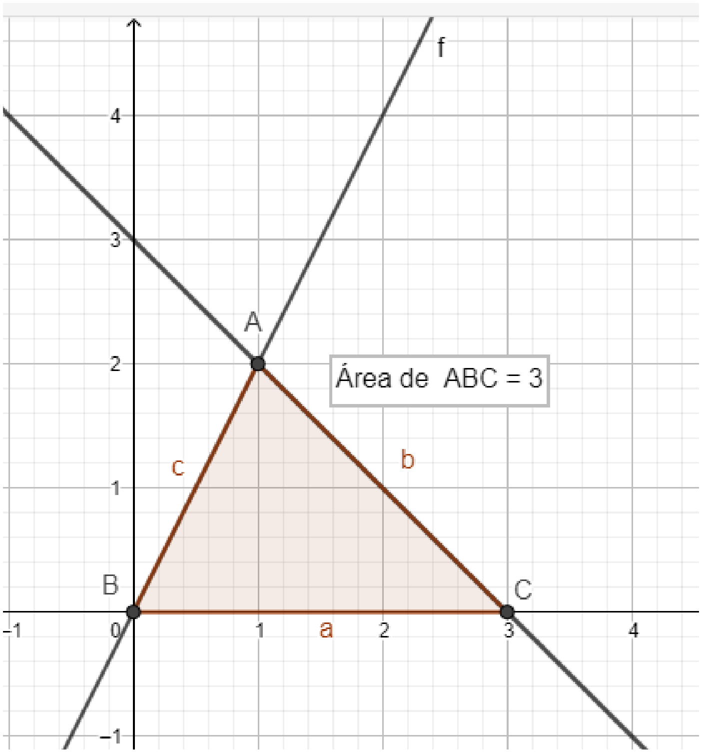
Exercício 20) F - V - F - V - V.

Capítulo 7 - ÁREAS: COMPONDO E DECOMPONDO

Área total: 52.622,20 m² (566.420,70 ft²)

Distância total: 984,18 m (3.228,93 pés)

Exercício 1)



1.a)

1.b)

2) a) $A = \frac{8 . r}{2} = 4r$; b) $A = \frac{9 . r}{2}$

c) $A = \frac{7r}{2}$ d) $A_T = 4r + \frac{9r}{2} + \frac{7r}{2}$

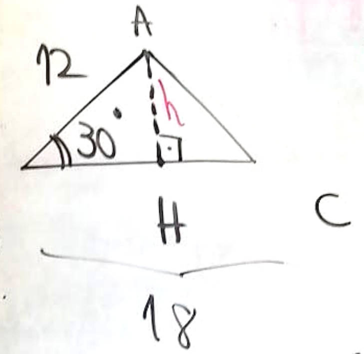
$\Rightarrow A_T = 4r + 8r \therefore A_T = \underbrace{12}r$

e) Perímetro: $2p = 24$;

Semi-perímetro: $p = 12$.

f) $A = p . r$ g) $\boxed{A = 12\sqrt{5}\ cm^2}$

3) a)



b) $\text{sen } 30° = \frac{h}{12}$

$\therefore h = 12 . \text{sen } 30°$

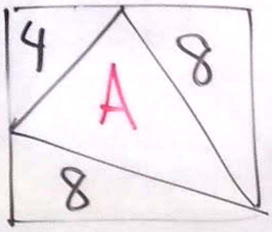
c) $A = \frac{18 . 12 \text{ sen } 30°}{2}$ d) $A = \frac{ab \text{ sen } \alpha}{2}$

e) $A = \frac{18 . 12 . \frac{1}{2}}{2} = 54\ cm^2$ f) $T = \frac{108000}{54} = 2000$

4.) $A = \dfrac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$ | área do Δ equilátero

* Altura Δ equilát. : $h = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2}$

$$\Rightarrow A = 3 \cdot \frac{2^2\sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}\ cm^2$$

5.) 

$$\Rightarrow A + 4 + 8 + 8 = 32$$

$$\vdots$$

$$\therefore A = 12\ cm^2$$

6.) $7\dfrac{\ell^2\cancel{\sqrt{3}}}{4} = 1{,}12\cancel{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \ell^2 = 0{,}64 \Rightarrow \ell = 0{,}8\,m$

$\therefore \boxed{\ell = 80\ cm}$

7.) a.) $A_{FEDC} = 4x \cdot x = 4x^2$

b.) $A_{ABEF} = 3 \cdot 4x^2 = 12x^2$

c.) $A_{ABDC} = 4 \cdot 4x^2 = 16x^2$

d.) 3 vezes. e.) 25%.

f.) 4 vezes. g.) $\dfrac{4\cancel{x}}{3\cancel{x}} = \dfrac{4}{3}$

8.) a.) $A = 8^2 = 64\ cm^2$

b.) $A = 12^2 = 144\ cm^2$

c.) Δ's semelhantes

d.) $\frac{8}{4} = \frac{12}{x}$ .... $\therefore x = 6cm$

$\Rightarrow L = 12 + 6 = 18\ cm^2$

$\Rightarrow A = 18^2 = 324\ cm^2$

e.) $A = \frac{(18+8).20}{2}$ ... $A = 260\ cm^2$

f.) $A = \frac{8.4}{2} = 16\ cm^2$

g.) $A = \frac{12.6}{2} = 36cm^2$

h.) $A = \frac{(27+8).38}{2} = 665\ cm^2$

9.) a.) Losango.

b.) $A = \frac{D \cdot d}{2}$

c.) $A = \frac{12 . 8}{2}$

$\therefore A = 48 \text{ cm}^2$

d.) ROXO : $A = 4 . 6 = 24 \text{ cm}^2$;

AZUL : $A = \frac{6 . 2}{2} . 2 = 12 \text{ cm}^2$;

AMARELO : $A = \frac{4 . 3}{2} . 2 = 12 \text{ cm}^2$.

10.) $A = 16^2 - 4 . \pi . 4^2$

$= 256 - 64\pi =$

$= 256 - 200{,}96$

$\therefore A = 55{,}04 \text{ cm}^2$

11) $r_B = 50\,cm$; $A_B = \pi \cdot 0{,}5^2 = 0{,}75\,m^2$

$r_P = 40\,cm$; $A_P = \pi \cdot 0{,}4^2 = 0{,}48\,m^2$

$r_A = 32\,cm$; $A_A = \pi \cdot 0{,}32^2 = 0{,}3072\,m^2$

$r_V = 25{,}6\,cm$; $A_V = \pi \cdot 0{,}256^2 = 0{,}196608\,m^2$

$r_{am} = 20{,}48\,cm^2$; $A_{am} = \pi \cdot 0{,}2048^2 \cong 0{,}12583\,m^2$

ÁREA VISÍVEL

$V_B = 0{,}27\,m^2$

$V_P = 0{,}1728\,m^2$

$V_A = 0{,}110592\,m^2$

$V_V = 0{,}070778\,m^2$

$V_{am} = A_{am}$

12.) a.) $A_T = 25\pi - 16\pi \therefore A_T = 9\pi \, m^2$

b.) $\pi r^2 = 9\pi \Rightarrow r^2 = 9 \therefore r = 3\, m$

13.) $A_1 = \dfrac{\pi r^2}{6} = \dfrac{\pi . 6^2}{6} = 6\pi \, cm^2$

$A_2 = \dfrac{\pi . 4^2}{6} = \dfrac{16\pi}{6} = \dfrac{8\pi}{3} \, cm^2$

$A_3 = \dfrac{\pi . 2^2}{6} = \dfrac{4\pi}{6} = \dfrac{2\pi}{3} \, cm^2$

$A = \dfrac{\pi . 6^2}{2} - \left(6\pi + \dfrac{8\pi}{3} + \dfrac{2\pi}{3}\right) =$

$= 18\pi - \left(\dfrac{18\pi + 10\pi}{3}\right) = \dfrac{54\pi - 28\pi}{3}$

$\therefore A = \dfrac{26\pi}{3} \, cm^2$

14) $A = 16 \Rightarrow \ell = 4$ cm

$$A_G = \frac{\pi \cdot 4^2}{4} = 4\pi \cong 12,56 \text{ cm}^2$$

$$A_y = 16 - 12,56 \cong 3,44 \text{ cm}^2$$

$$r_R = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$\Rightarrow A_R = (2\sqrt{2})^2 \pi - 16 = 8\pi - 16$$

$$\therefore A_R = 25,12 - 16 \cong 9,12 \text{ cm}^2$$

15) $$A_B = \frac{\pi \cdot 2^2}{2} = 2\pi \cong 6,28 \text{ cm}^2 \times 100$$

$$= 628 \text{ cm}^2$$

$$A_y = \frac{8 \cdot 3}{2} - 6,28 = 5,72 \text{ cm}^2 \times 100$$

$$= 572 \text{ cm}^2$$

$$A_G = 8 \cdot 4 - 12 = 20 \text{ cm}^2 \times 100 = 2000 \text{ cm}^2$$

PARA GABARITAR

Capítulo 1

Cap. 1: 3, 4, 7, 8, 10, 11, 13, 14.

Exercício 3: EEAR 2019
- https://militares.estrategia.com/public/questoes/Gabriel-verificou-que23b648d863/
  - https://www.youtube.com/watch?v=CNNwsgx3ZDM

Exercício 4: UERJ 2019: questão 31
- https://www.exercicios-resolvidos.com/2021/04/uerj-2019-o-circulo-seguir-tem-o-centro.html
  - https://www.youtube.com/watch?v=rGRpEBTviDE

Exercício 7: EsPCEx 2018
- em breve!
  - https://www.youtube.com/watch?v=9kIIW24q1UM

Exercício 8: UEG 2019
- em breve!
  - https://www.youtube.com/watch?v=FevtNPyrpNE

Exercício 10: PUC - Campinas 2018: questão 40
- em breve!
  - https://www.youtube.com/watch?v=RnXUY5UfLTQ

Exercício 11: IFAL 2018
- em breve!
  - procure o professor!

Exercício 13: IFAL 2018
- em breve!
  - procure o professor!

Exercício 14: PUC - RS 2017 - Prova Azul: questão 1
- em breve!
  - https://www.youtube.com/watch?v=CfOIOmCX_p4

Capítulo 2

Cap. 2: 1, 2, 3, 8, 12, 14, 15.

Exercício 1: EFOMM 2019

- https://militares.estrategia.com/public/questoes/Examine-funca-real-f-x46d1c228d0/
  - https://www.youtube.com/watch?v=rX6lrk-c6Qs

Exercício 2: VUNESP 2019 - questão 87

- https://sisq.elitecampinas.com.br/GabaritoVestibulares/VisualizarQuestaoLista?id_questao_lista=7704674&vestibular=unesp&ano=2019&prova_vestibular_id=367996
  - https://www.youtube.com/watch?v=v01xv6Gab-0

Exercício 3: EFOMM 2019

- https://militares.estrategia.com/public/questoes/Considere-funca-real-f232b59fdba/
  - https://www.youtube.com/watch?v=qztKEcWmbWE

Exercício 8: ENEM 2018 (PPL) - questão 171

- https://xequematenem.com.br/blog/questao-158-enem-ppl-2018/
  - https://www.youtube.com/watch?v=vepnCXFdpQ0

Exercício 12: IFPE 2018

- em breve!
  - https://www.youtube.com/watch?v=_Qqqz8ymxo0

Exercício 14: IFPE 2017

- em breve!
  - procure o professor!

Exercício 15: CPS 2017 - questão 32

- em breve!
  - https://www.youtube.com/watch?v=DYjh-WUQfYs

24/04/2025 - 16h25min >>>> novo recorde!!

Capítulo 3

Cap. 3: 1, 3, 5, 9, 11, 12, 13.

Exercício 1: ENEM 2019 - questão 143 AZUL
- https://www.youtube.com/watch?v=OVFFMzP2O2s

Exercício 3: ENEM 2019 - questão 143 AMARELA
- https://www.youtube.com/watch?v=4OlJ-C5jzAc

Exercício 5: FATEC 2019 - questão 10
- https://www.youtube.com/watch?v=_EakNLqdftI

Exercício 9: FATEC 2019 - questão 1 Multidisciplinar
- https://www.youtube.com/watch?v=ckvQJ-JO8uw

Exercício 11: ENEM 2019 - questão 153 AZUL
- https://www.youtube.com/watch?v=7552tjx1nIs

Exercício 12: VUNESP 2018 - questão 85
- https://www.youtube.com/watch?v=fx8sccgx0Wk

Exercício 13: ENEM 2018 - questão 157 AZUL
- https://www.youtube.com/watch?v=AAZsi5dEabo

Capítulo 4

Cap. 4: 1, 3, 4, 9, 10, 11, 13, 14.

Exercício 1: FUVEST 2020 - questão 21
- https://www.youtube.com/watch?v=VsUn7X-kjNE

Exercício 3: ENEM 2019 - questão 144 AZUL
- https://www.youtube.com/watch?v=l4n67b1v4yM

Exercício 4: FAMERP 2019 - questão 80
- https://www.youtube.com/watch?v=SFz1bu2BstU

Exercício 9: ENEM 2018 - questão 136 AZUL
- https://www.youtube.com/watch?v=SCMmzEpIJbw

Exercício 10: ESPM 2018
- procure o professor!

Exercício 11: Fac. Med. Albert Einstein 2018 - questão 10
- https://www.youtube.com/watch?v=2VjMkw159tA

Exercício 13: FGV 2018 - questão 3
- https://www.youtube.com/watch?v=K-Y6K8Fo3cU

Exercício 14: MACKENZIE 2018 - questão 25
- https://www.youtube.com/watch?v=dwlu2Ce-9jA

Capítulo 5

Cap. 5: 1, 3, 6, 11, 14.

Exercício 1: Escola Prep. de Cadetes do Exército (SP) - EsPCEx 2020 - questão 18

- https://www.youtube.com/watch?v=PZLP_gZq9fo

Exercício 3: Fundação Getúlio Vargas - FGV

- https://youtu.be/50CXk62itok?si=hdYI3826Oa0rYTa7&t=1691

Exercício 6: Faculdade de Medicina de Marília (SP) - FAMEMA 2020: questão 19

- https://www.youtube.com/watch?v=To2OzYQL2os

Exercício 11: Escola Preparatória de Cadetes do Ar / Academia da Força Aérea (SP) - EPCAR / AFA 2020: questão 30

- https://www.youtube.com/watch?v=shg8c-RIDvs

Exercício 14: Universidade Estadual do Ceará (CE) - Uece 2020 - questão 19

- https://www.youtube.com/watch?v=XR0s5bG_eU4

Capítulo 6

Cap. 6: 1, 2, 3, 4, 9.

Exercício 1: Universidade Estadual de Goiás (GO) - UEG 2017
- https://www.youtube.com/watch?v=L1kJd4YFeAg

Exercício 2: Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM 2016 - questão 17 AZUL
- https://www.youtube.com/watch?v=BdKgfSqmjIU

Exercício 3: Universidade Estadual Paulista (SP) - UNESP 2017 - questão 6
- https://sisq.elitecampinas.com.br/GabaritoVestibulares/VisualizarQuestaoLista?id_questao_lista=7267786&vestibular=unesp&ano=2017&prova_vestibular_id=357887

Exercício 4: Universidade Estadual de Campinas (SP) - UNICAMP 2013
- https://estaticog1.globo.com/2012/vestibular/unicamp/oficina/Q18.pdf

Exercício 9: Universidade de Passo Fundo (RS) - UPF
- https://www.youtube.com/watch?v=shueLRbi2Oc

Capítulo 7

Cap. 7: 2, 3, 7, 9, 13.

Exercício 2: Centro Federal de Educação Tecnológica - CEFET/RJ 2020 - questão 12
- https://www.youtube.com/watch?v=hVLBRbuqHYY

Exercício 3: Colégio Pedro II (RJ) - CP2 2019 - questão 14
- https://www.youtube.com/watch?v=O3bn-NWgmbk

Exercício 7: Colégio Técnico de Limeira (SP) - COTIL 2020- questão 26
- https://www.youtube.com/watch?v=8vviA0eczuU

Exercício 9: Univ. Federal de Juiz de Fora (MG) - PISM/UFJF 2020 - questão 13
- https://www.youtube.com/watch?v=e_0MNY7iIOE

Exercício 13: Universidade Estadual de Campinas (SP) - UNICAMP 2020 - questão 40
- https://www.youtube.com/watch?v=uhgtdnlpFXY