1 Тур (10 минут, каждая задача по 5 баллов)

1.1) *У равнобедренного треугольника длины всех сторон целые, а периметр равен 12. Какими могут быть его стороны? Перечислите все ответы и докажите, что других нет.*

Решение: Так как две стороны равнобедренного треугольника равны, то все возможные наборы трёх чисел, два из которых равны и сумма которых равна 12, вот: {1, 1, 10}, {2, 2, 8}, {3, 3, 6}, {4, 4, 4}, {5, 5, 2}. Но в силу неравенства треугольника, каждая из сторон треугольника должна быть меньше суммы двух других. Тогда из рассмотренных вариантов подходят только последние два.

Ответ: {4, 4, 4}, {5, 5, 2}.

Критерии: Только ответ: 1 балл за каждый ответ.

-1 балл, если решение верное, но {4, 4, 4} не добавлен в ответ, потому что он равносторонний.

-1 балл, если в ответы попал {3, 3, 6}.

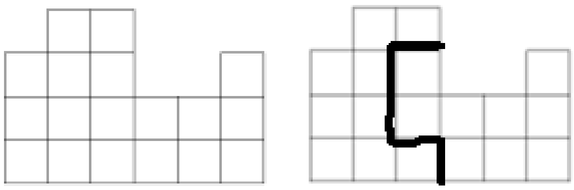
1.2) *В Голубой стране живут жевуны и лгуны. Жевуны всегда говорят правду, а лгуны - всегда лгут. Однажды перед Элли выстроились 6 жителей Голубой страны. "Сколько среди вас жевунов?" - спросила Элли. "Два", - ответили двое. "Четыре", - ответили четверо. Сколько жевунов могло быть среди них на самом деле? Перечислите все возможные варианты.*

Ответ: 0, 2 или 4.

Решение: Сперва заметим, что все гномы могут быть лгунами, и тогда жевунов нет совсем. Пусть среди гномов есть жевун, тогда он сказал правду. Правда - либо что жевунов два (и двое сказали это), либо что жевунов четыре (и четверо сказали это). Отсюда получаем ответ.

Критерии: 2 балла за полный ответ.

-2 балла, если забыли случай с нулём.



1.3) *У Вани клетчатая дощечка (см. рисунок). Помогите Ване разрезать дощечку по линиям клеток на две части, одинаковые по площади и по форме.*

Критерии: Посчитана площадь одной части разрезания (9 клеток): 1 балл.

2 Тур (15 минут, каждая задача по 6 баллов)

2.1) *На высокой сосне собрались вороны и сороки. Если прилетит ещё 10 ворон, то ворон на сосне станет вдвое больше, чем сорок. А сколько сорок должно улететь, чтобы их стало вдвое меньше, чем ворон?*

Решение: Пусть у нас было x ворон. Тогда сорок было всего $(x + 10)/2 = x/2 + 5$. Если бы вместо прилетевших ворон улетело несколько сорок, и их стало бы вдвое меньше, то сорок осталось бы ровно $x/2$. А тогда улетело $(x/2 + 5) - x/2 = 5$ сорок.

Ответ: 5.

Критерии: Только ответ - 1 балл. Рассмотрение частных случаев - не более 3 баллов.

2.2) *Таня говорит правду только в свой день рождения, а во все остальные дни лжёт. Каждый день ноября Таню спрашивали, когда её день рождения. Вот что она отвечала:*
1.11: Сегодня
2.11: Завтра
3.11: Сегодня
4.11: Завтра
...
29.11: Сегодня
30.11: Завтра
В какой день у Тани может быть день рождения, если он всё же в ноябре?
Решение: Пусть день рождения Тани в ноябре. Если он чётного числа, то Таня солгала в свой день рождения, а если нечётного числа (кроме первого), то сказала правду в прошлый день. Значит, день рождения Тани может быть только первого ноября (и это ничему не противоречит).
Ответ: 1 ноября.
Критерии: Только ответ - 2 балла. Доказано, что день рождения Тани не может быть не первого ноября (и сказано, что первого ноября тоже быть не может) - 3 балла.

2.3) *У Серёжи на руках три красные и три чёрные карты. Серёжа играет в игру и хочет от всех карт избавиться. Одну красную карту Серёжа может обменять на две красных карты, две красных - на одну чёрную, одну чёрную - на одну чёрную, а две чёрных - на ничего. Может ли Серёжа избавиться от всех карт на руках, сделав не более девяти обменов?*
Решение: Вот как Серёже нужно действовать. Пусть он сначала три раза обменяет одну красную карту на две. Тогда у Серёжи станет шесть красных карт. После этого Серёжа три раза обменяет две красные карты на чёрную, и у него останется только шесть чётных карт. Тогда Серёжа три раза отдаст по две чёрные карты, и у него не останется ничего.
Ответ: Может.
Критерии: 6/0.

3 Тур (15 минут, каждая задача по 7 баллов)

3.1) *Машенька сошла вниз по движущемуся вниз эскалатору и насчитала 60 ступеней. Потом по тому же эскалатору сбежал вниз Вовочка (он делал шаги той же длины, что и Машенька) и насчитал 120 ступеней, причём Вовочка бежал втрое быстрее, чем Машенька шла. Наконец, по эскалатору неподвижно спустилась Марьиванна. Во сколько раз быстрее спустился по эскалатору Вовочка, чем Марьиванна?*
Решение: Пусть скорость эскалатора u, скорость Машеньки - m, а время, которое она потратила на то, чтобы спуститься, равно t. Тогда Вовочка двигался вниз со скоростью u + 3m. Так как Вовочка делал шаги втрое быстрее, чем Машенька, то 60 ступеней он бы насчитал тоже втрое быстрее, чем Машенька, а тогда время, за которое спустился Вовочка, равно 2/3 t. Так как длина эскалатора в обоих случаях одинакова, составим уравнение:
$t(u + m) = 2/3 * t * (u + 3m)$
Поделим на t:
$u + m = 2/3 * (u + 3m)$

$u + m = 2/3 * u + 2m$
$1/3 * u = m$
Тогда скорость эскалатора равна 3m, а скорость спуска Вовочки, соответственно, 6m. Значит, Вовочка спустился вдвое быстрее Марьиванны.
Ответ: в 2 раза.
Критерии: Только ответ - 1 балл. Выписаны выражения для всех скоростей: +2 балла.

3.2) *В Голубой стране живут 100 гномов: 50 жевунов и 50 лгунов. Жевуны всегда говорят правду, а лгуны всегда лгут. У каждого гнома есть хотя бы один друг. Однажды 50 гномов одновременно сказали: "Все мои друзья - жевуны". После этого оставшиеся 50 гномов сказали: "Все мои друзья - лгуны". Какое наименьшее число пар друзей, состоящих из жевуна и лгуна, может быть в Голубой стране?*
Решение: Посмотрим, когда гном может сказать, что все его друзья - лгуны. Это либо жевун, который дружит только с лгунами, либо лгун, который дружит с хотя бы одним жевуном. У нас есть не менее 50 гномов, у которых есть друг другого типа. Тогда пар друзей разных типов не менее 25.
25 пар могло быть вот как: пусть 25 жевунов дружат каждый с каждым и 25 лгунов дружат тоже каждый с каждым.
Ответ: 25.
Критерии: Только ответ: 1 балл. Оценка: 3 балла. Пример: 3 балла.

3.3) *Любопытная Варвара на базаре продаёт шила и мыла. Шило стоит столько монет, сколько у Варвары сейчас мыл, а мыло - столько монет, сколько у неё сейчас шил. Утром у Варвары было 10 шил и 10 мыл, а к вечеру она всё продала. Сколько монет могла заработать любопытная Варвара? Перечислите все возможные ответы.*
Решение: Расположим 100 монет в виде квадрата 10 на 10. Каждый раз, когда у Варвары покупают шило, она будет убирать у квадрата одну строку, а когда покупают мыло - один столбец. Заметим, что число монет, которое забирает каждый раз Варвара, равно стоимости купленного предмета. Значит, за весь день Варвара получит 100 монет.
Ответ: 100.
Критерии: Рассмотрение частных случаев - не более 3 баллов.

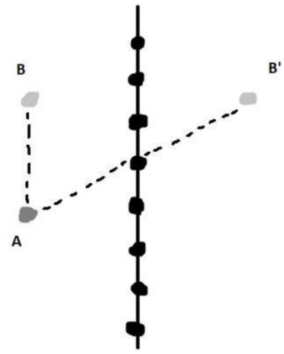
4 Тур (20 минут, каждая задача по 8 баллов)

4.1) *Вася составляет таблицу квазипростых чисел. Первым квазипростым числом он объявил 2, а потом стал перебирать натуральные числа по порядку, начиная с 3, и объявлять очередное число квазипростым, если его нельзя разложить в произведение двух меньших квазипростых (возможно, одинаковых). Является ли число 1000 квазипростым?*
Решение: Число 2 - квазипростое.
$4 = 2 \times 2$ - не квазипростое.
8 представляется в виде произведения двух чисел, больших единицы, только одним способом: 4×2. Но 4 - не квазипростое. Тогда 8 - квазипростое.
Число 5 - квазипростое, а $25 = 5 \times 5$ - нет. Тогда 125 - квазипростое.
$1000 = 8 \times 125$ - не квазипростое.

Ответ: нет.
Критерии: Найдено, что 8 - квазипростое - 2 балла. Найдено, что 125 квазипростое - 3 балла.

4.2) *В Голубой стране живут жевуны и лгуны: жевуны всегда говорят правду, а лгуны всегда лгут. Однажды Элли встретила 25 жителей Голубой страны: 15 мальчиков и 10 девочек. Когда Элли захотела узнать, сколько среди них жевунов, первый мальчик сказал: "Среди нас хотя бы один жевун", второй: "Среди нас хотя бы два жевуна", ... , 15-ый: "Среди нас хотя бы 15 жевунов". После этого первая девочка сказала: "Среди нас хотя бы один лгун", вторая: "Среди нас хотя бы два лгуна", ... , 10-ая: "Среди нас хотя бы 10 лгунов". Сколько жевунов могло быть среди гномов?*
Решение: Пусть жевунов было x.
Если x < 15, то x мальчиков сказали правду (и они и есть жевуны). Но тогда лгунов хотя бы 10. Значит, все девочки сказали правду, и они тоже жевуны. Значит, жевунов хотя бы x+10. Противоречие!
Пусть теперь x >= 15. Тогда все мальчики сказали правду, и они все жевуны. Значит, лгунами могут быть только девочки. Если бы лгунов было не больше четырёх, то все девочки, начиная с пятой, солгали бы и были бы лгунами, а тогда лгунов было бы хотя бы 6. Противоречие. Если бы лгунов было не меньше шести, то все девочки до шестой сказали бы правду, а тогда лгунов было бы не более четырёх. Снова противоречие! Тогда лгунов могло быть только 5.
Ответ: 5.
Критерии: Только ответ: 1 балл. Рассмотрение частных случаев - не более 3 баллов.
Доказано, что все мальчики жевуны: +3 балла.

4.3) *В саду у пана Козла росло 10 яблонь. Однажды в сад тайком пробрался Вадик и стал измерять все попарные расстояния между яблонями. Все свои измерения он записывал в тетрадку с указанием яблонь. Когда Вадику оставалось померить всего одно расстояние, появился сам пан Козёл и прогнал Вадика. Всегда ли сможет Саша, заглянувшая к Вадику в тетрадку и не видевшая самого сада, однозначно восстановить последнее расстояние?*



Решение: Пусть все деревья, кроме двух, находятся на одной прямой, а оставшиеся два дерева A и B расположены так, как показано на рисунке. Переставим дерево B на место B’. Тогда единственным расстоянием, которое изменится, будет расстояние между A и B. Если это и было то расстояние, которое не успел измерить Вадик, Саша не сможет однозначно понять, каким именно оно было: как между A и B или как между A и B’.
Ответ: нет.
Критерии: Замечание о том, что три точки общего положения единственным образом задают движение плоскости (и дальше доказывается, что ответ – «да»): 3 балла.