1. Lee y analiza el siguiente planteamiento:

¿Sabías que la velocidad de la luz es de 300,000 km/s? Existen laboratorios dedicados a la investigación en Física de partículas, mismas que se encuentran en todo el universo. Algunos investigadores intentan calcular qué tanto se puede acelerar una partícula y de esta manera acercarnos a saber si los objetos pueden viajar a velocidades cercanas a la velocidad de la luz.

Se estudia, en específico, el caso de una partícula cuya aceleración está dado por:

$f''(t)=2t-6$

Los investigadores, están interesados en determinar:

a) ¿Cuál es la función de velocidad si al instante t=1 la velocidad de dicha partícula es de 0?

Problema: Se tiene una partícula cuya aceleración está dada por: $f''(t) = 2t - 6$

Se pide: Encontrar la función de velocidad f'(t), sabiendo que en t = 1 la velocidad es 0.

Paso 1: Relación entre aceleración y velocidad

La aceleración es la derivada de la velocidad respecto al tiempo. Para encontrar la velocidad f'(t), integramos la aceleración f''(t):

$$f'(t) = \int f''(t)\, dt = \int (2t - 6)\, dt$$

Paso 2: Integrar la aceleración

Aplicamos las reglas de integración:

$$\int (2t - 6)\, dt = 2\int t\, dt - 6\int dt = 2(t^2/2) - 6t + C = t^2 - 6t + C$$

Donde C es una constante de integración que determinaremos usando la condición inicial.

Paso 3: Aplicar la condición inicial

$Sabemos\ que\ en\ t\ =\ 1,\ la\ velocidad\ es\ 0$:

$f'(1)\ =\ 0$

Sustituimos t = 1 en la ecuación de velocidad:

$(1)^2\ -\ 6(1)\ +\ C\ =\ 0$

$1\ -\ 6\ +\ C\ =\ 0$

-5 + C = 0

Despejamos C:

$C\ =\ 5$

Paso 4: Escribir la función de velocidad

Sustituimos C = 5 en la ecuación obtenida en el Paso 2:

$f'(t) = t^2 - 6t + 5$

Respuesta final:

La función de velocidad de la partícula es: $f'(t)\ =\ t^2\ -\ 6t\ +\ 5$

Verificación:

Para t = 1:

$f'(1)\ =\ (1)^2\ -\ 6(1)\ +\ 5\ =\ 1\ -\ 6\ +\ 5\ =\ 0$

b) ¿Cuál es la función de posición, la cual se sabe que en el instante t=2 toma un valor de 10?

Ahora queremos encontrar la función de posición f(t), sabiendo que:

La velocidad ya se determinó en la parte (a): $f'(t) = t^2 - 6t + 5$

La condición inicial para la posición es: $f(2) = 10$

Solución…

Paso 1: Relación entre velocidad y posición

La velocidad es la derivada de la posición respecto al tiempo. Para encontrar f(t), integramos la velocidad f'(t):

$$f(t) = \int f'(t)\, dt = \int (t^2 - 6t + 5)\, dt$$

Paso 2: Integrar la velocidad

Aplicamos las reglas de integración término a término:

$\int t^2\, dt = t^3/3$

$\int -6t\, dt = -3t^2$

$\int 5\, dt = 5t$

Sumamos los resultados y añadimos una constante de integración D (nueva constante, distinta de C):

$$f(t) = t^3/3 - 3t^2 + 5t + D$$

Paso 3: Aplicar la condición inicial

Sabemos que en t=2, la posición es 10:

$$f(2) = 10$$

Sustituimos t=2 en la ecuación de posición:

$$(2)^3/3 \; - \; 3(2)^2 \; + \; 5(2) \; + \; D \; = \; 10$$

$$8/3 \; - \; 12 \; + \; 10 \; + \; D \; = \; 10$$

Simplificamos:

$$(8/3 \; - \; 2) \; + \; D \; = \; 10$$

$$8/3 \; - \; 6/3 \; + \; D \; = \; 10$$

$$2/3 \; + \; D \; = \; 10$$

Despejamos D:

$$D \; = \; 10 \; - \; 2/3 \; = \; 30/3 \; - \; 2/3 \; = \; 28/3$$

Paso 4: Escribir la función de posición

Sustituimos D = 28/3 en la ecuación obtenida en el Paso 2:

$$f(t) \; = \; t^3/3 \; - \; 3t^2 \; + \; 5t \; + \; 28/3$$

Podemos expresarlo como una sola fracción:

$$f(t) \; = \; (t^3 \; - \; 9t^2 \; + \; 15t \; + \; 28)/3$$

Respuesta final:

La función de posición de la partícula es:

$$f(t) \; = \; t^3/3 \; - \; 3t^2 \; + \; 5t \; + \; 28/3$$

o equivalentemente:

$$f(t) \; = \; (t^3 \; - \; 9t^2 \; + \; 15t \; + \; 28)/3$$

Verificación:

Para t=2:

$f(2) = 8/3 - 12 + 10 + 28/3 = (8 + 28)/3 - 2 = 36/3 - 2 = 12 - 2 = 10$

Cumple con la condición dada.

c) ¿Cuánto ha recorrido la partícula en el intervalo [8,11]?

Primero verificamos si hay cambios de dirección (cuando f'(t) = 0):

$f'(t) = t^2 - 6t + 5$

Resolviendo: $(t - 1)(t - 5) = 0$

Raíces: $t = 1\, y\, t = 5$

Estas raíces están fuera del intervalo [8,11]

Comprobamos el signo de la velocidad en el intervalo:

$f'(8) = 8^2 - 6(8) + 5 = 64 - 48 + 5 = 21 > 0$

La velocidad es positiva en todo el intervalo.

Calculamos la distancia:

$Distancia = \int_8^{11} (t^2 - 6t + 5)dt$

$= [t^3/3 - 3t^2 + 5t]_8^{11}$

$= [(11^3/3 - 3(11^2) + 5(11)) - (8^3/3 - 3(8^2) + 5(8))]$

$= [(1331/3 - 363 + 55) - (512/3 - 192 + 40)]$

$= [407/3 - 56/3]$

$= 351/3$

$= 117$

la distancia recorrida es 117 unidades de longitud.

d) Determina los puntos máximos y mínimos en su función de posición, si es que existen.

Partimos de la función de posición:

$f(t) = t^3/3 - 3t^2 + 5t + 28/3$

Primera derivada (velocidad):

$f'(t) = t^2 - 6t + 5$

Puntos críticos (f'(t) = 0):

$t^2 - 6t + 5 = 0$

$(t - 1)(t - 5) = 0$

$t = 1\, o\, t = 5$

Segunda derivada (aceleración):

$f''(t) = 2t - 6$

Evaluamos en los puntos críticos:

En t = 1:

$f''(1) = 2(1) - 6 = -4\, (negativo \rightarrow máximo\ local)$

$En\ t = 5$:

$f''(5) = 2(5) - 6 = 4\, (positivo \rightarrow mínimo\ local)$

Calculamos los valores de f(t) en los puntos críticos:

$En\ t = 1$:

$f(1) = 1/3 - 3(1) + 5(1) + 28/3$

$= 1/3 - 3 + 5 + 28/3$

$= (1 - 9 + 15 + 28)/3$

$= 35/3$

$En\ t = 5$:

$f(5) = 125/3 - 3(25) + 5(5) + 28/3$

$= (125 - 225 + 75 + 28)/3$

$= 1$

Por lo tanto:

$Máximo\ local\ en\ (1,\ 35/3)$

$Mínimo\ local\ en\ (5,\ 1)$

La función no tiene máximos ni mínimos absolutos por ser un polinomio cúbico.

e) ¿Cuál es la razón de cambio promedio de la función de posición en los intervalos de tiempo: [6,9] y [8,10]?

Para calcular la razón de cambio promedio usamos: $(f(b) - f(a))/(b - a)$

$Usando\ f(t) = t^3/3 - 3t^2 + 5t + 28/3$

Para el intervalo [6,9]:

Calculamos f(9):

$f(9) = 9^3/3 - 3(9^2) + 5(9) + 28/3$

$= 729/3 - 243 + 45 + 28/3$

$= (729 + 28)/3 - 243 + 45$

$= 163/3$

Calculamos f(6):

$f(6) = 6^3/3 - 3(6^2) + 5(6) + 28/3$

$= 216/3 - 108 + 30 + 28/3$

$= (216 + 28)/3 - 108 + 30$

$= 10/3$

Razón de cambio promedio:

$(f(9) - f(6))/(9 - 6)$

$= (163/3 - 10/3)/3$

$= 153/9$

$= 17$

Para el intervalo [8,10]:

Calculamos f(10):

$f(10) = 1000/3 - 300 + 50 + 28/3$

$= (1000 + 28)/3 - 300 + 50$

= 278/3

Calculamos f(8):

$f(8) = 512/3 - 192 + 40 + 28/3$

$= (512 + 28)/3 - 192 + 40$

$= 28$

Razón de cambio promedio:

$(f(10) - f(8))/(10 - 8)$

= (278/3 - 28)/2

$= 194/6$

$= 97/3 \approx 32.3$

$En\ [6, 9]$: $17\ unidades/tiempo$.

$En\ [8, 10]$: $97/3\ unidades/tiempo$.

Esto indica que la partícula se mueve más rápido en el intervalo [8,10].

2. Cuando hayas finalizado, analiza y da respuesta a los siguientes planteamientos:

a) ¿Qué nos indica la diferencia en el cálculo de la razón de cambio promedio en los intervalos de interés?

La diferencia en la razón de cambio promedio entre los intervalos [6,9] (17) y [8,10] ($97/3 \approx 32.33$) muestra que la partícula aumenta su velocidad promedio a medida que transcurre el tiempo, lo que coincide con el comportamiento de la función de velocidad $f'(t) = t^2-6t+5$, cuya parábola crece para $t>3$. Esto indica que la partícula está acelerando en estos intervalos, moviéndose cada vez más rápido conforme avanza el tiempo.

b) Imagina que, en lugar de estar hablando de la velocidad de una partícula, estuviéramos calculando ingresos ¿Qué utilidad tendría el cálculo de la razón de cambio promedio en el contexto de un negocio familiar?

Como dueño de un negocio familiar, calcular la razón de cambio promedio de los ingresos en ciertos períodos me resulta muy útil para entender cómo está evolucionando el negocio. Esta medida me permite ver, de manera clara y cuantitativa, si estamos creciendo o perdiendo dinero en un intervalo específico. Al comparar estas tasas entre diferentes períodos, puedo identificar tendencias importantes: por ejemplo, si hay momentos donde los ingresos suben más rápidamente o épocas donde bajan. Con esta información, puedo tomar decisiones informadas, como reforzar estrategias que funcionen bien, corregir problemas cuando los ingresos disminuyan o incluso anticiparme a posibles desafíos.

Argumenta tu respuesta en máximo 10 líneas.

Fuentes:

Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM). (s.f.). *Lecciones de cálculo. Objetos de Aprendizaje.* Recuperado de http://objetos.unam.mx/matematicas/leccionesMatematicas/index_calculo.html

Red de Innovación y Desarrollo de la Educación Digital de la UNAM (s.f.). *Lecciones de cálculo.* Recuperado de https://redi.cuaieed.unam.mx/lecciones/lecciones/cal/3_000/index.html

LibreTexts. (s.f.). *Tasas de cambio promedio e instantáneas.* Recuperado de https://espanol.libretexts.org/Educacion_Basica/Calculo/04%3A_Diferenciaci%C3%B3n_-_Modelos_de_Pendiente_usando_Derivadas/4.01%3A_Tasas_de_Cambio_Promedio_e_Instant%C3%A1neas

Centro de Investigación y Desarrollo de la Cultura y la Educación (CIDCAE) de la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo (UAHEH). (s.f.). *Tangentes y razones de cambio promedio e instantáneo.* Recuperado de http://cidecame.uaeh.edu.mx/lcc/mapa/PROYECTO/libro8/111_tangentes_y_razones_de_cambio_promedio_e_instantneo.html