II) المجالات في R :

نشاط 5 :

عين مجموعة الأعداد الحقيقية x التي تحقق المتباينة في كل حالة من الحالات التالية :

$x \geq 0$ ؛ $x < 0$ ؛ $-\frac{3}{2} \leq x \leq 3$ ؛ $\sqrt{3} \leq x < 3$ ؛

حل النشاط :

$x \geq 0$ يكافئ $x \in [0 \,;\, +\infty[$

$x < 0$ يكافئ $x \in]-\infty \,;\, 0[$

$-\frac{3}{2} \leq x \leq 3$ يكافئ $x \in [-\frac{3}{2} \,;\, 3]$

$\sqrt{3} \leq x < 3$ يكافئ $x \in [-\sqrt{3} \,;\, 3[$

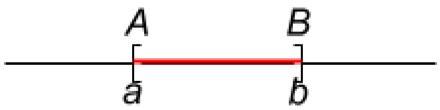
1) **التعريف :** a و b عددان حقيقيان حيث $a < b$.

نسمي **مجالا مغلقا** حداه a و b مجموعة الأعداد الحقيقية x التي تحقق المتباينتين $a \leq x \leq b$ ونرمز إليه بالرمز $[a \,,\, b]$.

$a \leq x \leq b$ تكافئ $x \in [a \,,\, b]$

يمثل المجال $[a \,,\, b]$ هندسيا بالشكل الآتي

حيث a و b فاصلتا النقطتين A و B على الترتيب.



ملاحظات :

مجموعة الأعداد الحقيقية x التي تحقق المتباينتين $a < x < b$ تسمى مجالا مفتوحا ونرمز إليها بالرمز $]a \,,\, b[$.

2) **أنواع المجالات :**

المجال الذي يرمز إليه	هو مجموعة الأعداد الحقيقية x حيث:
$[a \,;\, b]$	$a \leq x \leq b$
$]a \,;\, b[$	$a < x < b$

$a \le x < b$	$]a\ ;\ b]$
$a < x \le b$	$[a\ ;\ b[$
$x \ge a$	$[a;+\infty[$
$x > a$	$]a;+\infty[$
$x \le b$	$]-\infty;b]$
$x < b$	$]-\infty;b[$
$x \in \mathbb{R}$	$]-\infty;+\infty[$

نشاط 6 :

أكتب على شكل مجالات ، مجموعة الأعداد الحقيقية x المعرفة بالمتباينات التالية:

$x \ge -5$ و $x \le 7$ ؛ $x \ge \frac{1}{2}$ و $x > \sqrt{3}$ ؛ $2 \le x \le 5$ و $-2 \le x \le \sqrt{5}$

$2 \le x \le 5$ أو $-2 \le x \le \sqrt{5}$ ؛ $10 \le x < 17$ أو $-10 \le x \le 2$ ؛ $7 < x < 10^2$ أو $x \ge -2$

حل النشاط :

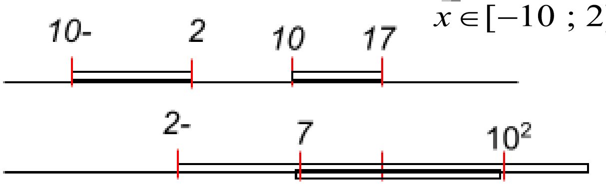
$x \ge -5$ و $x \le 7$ معناه $-5 \le x \le 7$ يكافئ $x \in [-5\ ;\ 7]$

$x \ge \frac{1}{2}$ و $x > \sqrt{3}$ يكافئ $x \in]\sqrt{3} + \infty[$

$2 \le x \le 5$ و $-2 \le x \le \sqrt{5}$ يكافئ $x \in [2\ ;\ \sqrt{5}]$

$2 \le x \le 5$ أو $-2 \le x \le \sqrt{5}$ يكافئ $x \in [-2\ ;\ 5]$

$10 \le x < 17$ أو $-10 \le x \le 2$ يكافئ $x \in [-10\ ;\ 2] \cup [10\ ;\ 17[$



$7 < x < 10^2$ أو $x \ge -2$ يكافئ $x \in [-2\ ;\ +\infty[$

3) **تقاطع واتحاد مجالين :**

تقاطع مجالين I و J هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي تنتمي إلى I و J ونرمز إليه بالرمز $I \cap J$

اتحاد مجالين I و J هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي تنتمي إلى I أو J ونرمز إليه بالرمز $I \cup J$

$I \cap J = \{x / x \in \mathbb{R}, x \in I \quad x \in J\}$ $\qquad$ $I \cup J = \{x / x \in \mathbb{R}, x \in I \quad x \in J\}$

ملاحظة : إذا كان $I \subset J$ فإن : $I \cap J = I$ و $I \cup J = J$

تطبيق : عين مجموعة الأعداد الحقيقية x في كل حالة من الحالتين التاليتين :

$2x^2 - 5x \ge 0$ $\qquad$ $5x^2 \le \sqrt{5}x$

الحل :

$2x^2 - 5x \ge 0$ معناه $x(2x-5) \ge 0$

$2x^2 - 5x \ge 0$ معناه $[\ (x \ge 0)$ و $(2x - 5 \ge 0)\ ]$ أو $[\ (x \le 0)$ و $(2x - 5 \le 0)\ ]$

$2x^2 - 5x \ge 0$ معناه $[\ (x \ge 0)$ و $(x \ge \frac{5}{2})\ ]$ أو $[\ (x \le 0)$ و $(x \le \frac{5}{2})\ ]$

$2x^2-5x\ge 0$ معناه $(x\ge \frac{5}{2})$ أو $(x\le 0)$

$2x^2-5x\ge 0$ معناه $x\in]-\infty\ ;\ 0]\cup[\frac{5}{2}\ ;\ +\infty[$

$5x^2\le \sqrt{5}x$ معناه $5x^2-\sqrt{5}x\le 0$

$5x^2\le \sqrt{5}x$ معناه $x(5x-\sqrt{5})\le 0$

$5x^2\le \sqrt{5}x$ معناه] $(x\ge 0)$ و $(5x-\sqrt{5}\le 0)$ [أو] $(x\le 0)$ و $(5x-\sqrt{5}\ge 0)$ [

$5x^2\le \sqrt{5}x$ معناه] $(x\ge 0)$ و $(x\le \frac{\sqrt{5}}{5})$ [أو] $(x\le 0)$ و $(x\ge \frac{\sqrt{5}}{5})$ [

$5x^2\le \sqrt{5}x$ معناه $(0\le x\le \frac{\sqrt{5}}{5})$ أو $(x\in\Phi)$ $\qquad$ $5x^2\le \sqrt{5}x$ معناه $x\in[0\ ;\ \frac{\sqrt{5}}{5}]$

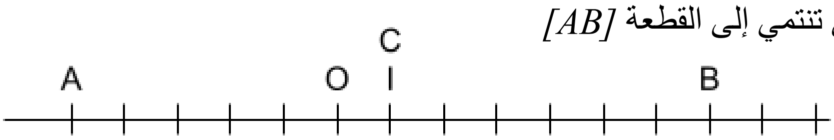
نشاط 7 :

في المستقيم العددي *(O,I)* نعلم النقطتين *A* و *B* فاصلتاهما *(-5)* و *7* على الترتيب

عين فاصلة النقطة *C* منتصف *[AB]* وأحسب الطول *AB*.

عين مجموعة فواصل النقط *M* التي تنتمي إلى القطعة *[AB]*

حل النشاط :



فاصلة *C* هي $\frac{7-5}{2}=1$ و *AB = 12*.

فواصل النقط *M* التي تنتمي إلى القطعة *[AB]* هي المجال *[-5 ; 7]* .

4) المجال المركزي :

تعريف : المجال *[a ; b]* يسمى مجال مركزي مركزه العدد $\frac{a+b}{2}$ وطوله *b - a* ونصف قطره $\frac{b-a}{2}$

ملاحظة : بوضع المركز $\frac{a+b}{2}=c$ و نصف قطره $\frac{b-a}{2}=r$ نجد :

$\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}=b$ و $c+r=$ $\qquad$ $\frac{a+b}{2}-\frac{b-a}{2}=a$ و $c-r=$ وبالتالي : $[a\ ;\ b]=[c-r\ ;\ c+r]$

تطبيق : *42* صفحة *45*

عين مركز وطول كل مجال : *[-2 ; 2]* ؛ *[-0,5 ; 0,1]* ؛ $[-\pi+1\ ;\ \pi+1]$

الحل :

[-2 ; 2] طوله *2 - (-2) = 4* ومركزه $\frac{2+(-2)}{2}=0$

[-0,5 ; 0,1] طوله *0,1 - (-0,5) = 0,6* ومركزه $\frac{-0,5+0,1}{2}=-0,2$

$[-\pi+1\ ;\ \pi+1]$ طوله $(\pi+1)-(-\pi+1)=2\pi$ ومركزه $\frac{(\pi+1)+(-\pi+1)}{2}=1$

تطبيق : *43* صفحة *45*

ما هما حدا المجال المغلق الذي مركزه *- 5,3* وطوله *0.7* ؟

الحل :

لدينا الطول *0,7* إذن نصف قطر المجال هو *r = 0,35* والمركز *c = - 5,3*

ولدينا المجال المغلق الذي مركزه *c* ونصف قطره *r* هو من الشكل : *[c - r ; c + r]*

c - r =-5,3 - 0,35 = - 0,65 و *c + r = - 0,3 + 0,35 = 0,05*

المجال المغلق الذي مركزه *- 5,3* وطوله *0.7* هو *[-5,65 ; 0,05]*

5) الحصر :

التعريف : a و b عددان حقيقيان حيث $a < b$.

إذا كانت $(a \le x \le b)$ فنقول أن العدد x محصور بين العددين a و b ، المجال $[a\ ;\ b]$ هو حصر للعدد x.

ملاحظات :

- [العدد x محصور بين العددين a و b] معناه $(a \le x \le b)$ ومعناه $(x \in [a\ ;\ b])$
- إذا كان $a < x < b$ فنقول أن العدد x محصور تماما بين العددين a و b

نتائج : مما سبق لدينا النتائج التالية :

- إذا كان $(a \le x \le b)$ فإن : $(a + c \le x + c \le b + c)$
- إذا كان $(a \le x \le b)$ و $c > 0$ فإن : $(a \times c \le x \times c \le b \times c)$
- إذا كان $(a \le x \le b)$ و $(c \le y \le d)$ فإن : $(a + c \le x + y \le b + d)$

بفرض a و c موجبان :

- إذا كان $(a \le x \le b)$ و $(c \le y \le d)$ فإن : $(a \times c \le x \times y \le b \times d)$
- إذا كان $(a \le x \le b)$ معناه $(\sqrt{a} \le \sqrt{x} \le \sqrt{b})$
- إذا كان $(a \le x \le b)$ معناه $(a^2 \le x^2 \le b^2)$

ملاحظات :

إذا كان $(a \le x \le b)$ و $(c \le y \le d)$ فإن : $(a \le x \le b)$ و $(-d \le -y \le -c)$ ومنه :

إذا كان $(a \le x \le b)$ و $(c \le y \le d)$ فإن : $(a - d \le x - y \le b - c)$

بفرض a و c موجبان تماما :

إذا كان $(a \le x \le b)$ معناه $(\frac{1}{b} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{a})$

إذا كان $(a \le x \le b)$ و $(c \le y \le d)$ فإن : $(a \le x \le b)$ و $(\frac{1}{d} \le \frac{1}{y} \le \frac{1}{c})$ ومنه :

إذا كان $(a \le x \le b)$ و $(c \le y \le d)$ فإن : $(\frac{a}{d} \le \frac{x}{y} \le \frac{b}{c})$

- إذا كان $(a \le x \le b)$ و $(c \le y \le d)$ فإن : $(a - d \le x - y \le b - c)$

بفرض أن a و c موجبان تماما :

- إذا كان $(a \le x \le b)$ معناه $(\frac{1}{b} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{a})$
- إذا كان $(a \le x \le b)$ و $(c \le y \le d)$ فإن : $(\frac{a}{d} \le \frac{x}{y} \le \frac{b}{c})$

تطبيق : 65 صفحة 46 :

باستعمال الحصر $4{,}4721 < \sqrt{20} < 4{,}4722$ أحصر كلا من الأعداد $\frac{\sqrt{20}}{2}$ ؛ $10\sqrt{20}$ ؛ $6 + \sqrt{20}$ ؛ $-\sqrt{20}$

الحل :

- $4{,}4721 < \sqrt{20} < 4{,}4722$ فإن : $\frac{1}{2} \times 4{,}4721 < \frac{1}{2} \times \sqrt{20} < \frac{1}{2} \times 4{,}4722$

  $4{,}4721 < \sqrt{20} < 4{,}4722$ فإن : $2{,}23605 < \frac{\sqrt{20}}{2} < 2{,}2361$

- $4{,}4721 < \sqrt{20} < 4{,}4722$ فإن : $10 \times 4{,}4721 < 10\sqrt{20} < 10 \times 4{,}4722$

  $4{,}4721 < \sqrt{20} < 4{,}4722$ فإن : $44{,}721 < 10\sqrt{20} < 44{,}722$

- $4,4721 < \sqrt{20} < 4,4722$ فإن : $6 + 4,4721 < 6 + \sqrt{20} < 6 + 4,4722$

$4,4721 < \sqrt{20} < 4,4722$ فإن : $10,4721 < 6 + \sqrt{20} < 10,4722$

- $4,4721 < \sqrt{20} < 4,4722$ فإن : $-4,4722 < -\sqrt{20} < -4,4721$

تطبيق : *70* صفحة *47*

x و *y* عددان حقيقيان حيث : *x <1,3 > 1,2* ؛ *y < 2,5 > 2,4*

أحصر *x + y* ؛ *x - y* ؛ *x - 4 y 5* ؛ *xy* .

الحل :

- إذا كان *[x <1,3 > 1,2* و *y < 2,5 > 2,4]* فإن *x + y < 1,3 + 2,5 > 2,4 + 1,2*

إذا كان *[x <1,3 > 1,2* و *y < 2,5 > 2,4]* فإن : *x + y < 3,8 > 3,6*

- إذا كان *[x <1,3 > 1,2* و *y < 2,5 > 2,4]* فإن : *x - y < 1,3 - 2,4 > 2,5 - 1,2*

إذا كان *[x <1,3 > 1,2* و *y < 2,5 > 2,4]* فإن : *x - y < - 1,1 > 1,3 -*

- إذا كان *[x <1,3 > 1,2* و *y < 2,5 > 2,4]* فإن *[x <6,5 5 > 6* و *y < 12,5 5 > 12]*

إذا كان *[x <1,3 > 1,2* و *y < 2,5 > 2,4]* فإن *[x - 5 y < -5,5 5 > 6,5 -]*

- إذا كان *[x <1,3 > 1,2* و *y < 2,5 > 2,4]* فإن : *xy < 3,25 > 2,88*

تطبيق : *71* صفحة *47*

بفرض $x \in [-2 ; 1]$ و $y \in [3 ; 4]$ أحصر *y - x* ؛ *x - 2 y* ؛ x^2 ؛ y^2 .

الحل :

$x \in [-2 ; 1]$ معناه $-2 \leq x \leq 1$ و $y \in [3 ; 4]$ يكافئ $3 \leq y \leq 4$

- إذا كان $x \in [-2 ; 1]$ و $y \in [3 ; 4]$ فإن $3 - 1 \leq y - x \leq 4 + 2$

إذا كان $x \in [-2 ; 1]$ و $y \in [3 ; 4]$ فإن $2 \leq y - x \leq 6$

إذا كان $x \in [-2 ; 1]$ و $y \in [3 ; 4]$ فإن $y - x \in [2 ; 6]$

- إذا كان $x \in [-2 ; 1]$ و $y \in [3 ; 4]$ فإن $-2 \leq x \leq 1$ و $6 \leq 2y \leq 8$

إذا كان $x \in [-2 ; 1]$ و $y \in [3 ; 4]$ فإن $-2 -8 \leq x - 2y \leq 1 - 6$

إذا كان $x \in [-2 ; 1]$ و $y \in [3 ; 4]$ فإن $-10 \leq x - 2y \leq -5$

إذا كان $x \in [-2 ; 1]$ و $y \in [3 ; 4]$ فإن $x - 2y \in [-10 ; -5]$

- $x \in [-2 ; 1]$ يكافئ $x \in [-2 ; 0]$ أو $x \in [0 ; 1]$ و يكافئ $-2 \leq x \leq 0$ أو $0 \leq x \leq 1$

$x \in [-2 ; 1]$ يكافئ $0 \leq -x \leq 2$ أو $0 \leq x \leq 1$

$x \in [-2 ; 1]$ يكافئ $0 \leq x^2 \leq 4$ أو $0 \leq x^2 \leq 1$

$x \in [-2 ; 1]$ يكافئ $0 \leq x^2 \leq 4$ $x \in [-2 ; 1]$ يكافئ $x^2 \in [0 ; 4]$

- $y \in [3 ; 4]$ يكافئ $3 \leq y \leq 4$ ويكافئ $9 \leq y^2 \leq 16$.