

Option énergétique (SMP)
contrôle
Mécanique des milieux continus

Exercice 1

Dans un repère cartésien orthonormé $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère un milieu qui subit une déformation caractérisée par le tenseur gradient de la déformation suivant :

$$F = \begin{bmatrix} 1 & (a+1) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (a \text{ est une constante}).$$

- On désigne par (X_1, X_2, X_3) et (x_1, x_2, x_3) les coordonnées d'une particule avant et après déformation respectivement. Calculer x_1 en fonction de (X_1, X_2, X_3) , sachant que la particule qui coïncide avec l'origine occupe la position $A(1, 0, 0)$ après déformation. Donner sans démonstration les expressions de x_2 et x_3 .
- Montrer que cette déformation conserve la linéarité des segments matériels (on étudiera la déformation d'un segment d'équation $X_2 = AX_1 + B$ avec $X_3=0$). Vérifier s'elle conserve leur pente.
- Quelle condition doit satisfaire la constante a pour que l'approximation des petites déformations soit valable (avec justification) ?
- On suppose que $a=1$. Soit un élément $d\vec{M}_0$ qui fait un angle α avec l'axe OX_1 ($d\vec{M}_0$ appartient au plan OX_1X_2). Calculer la dilatation de ce segment en fonction de $\sin(2\alpha)$ et $\cos(2\alpha)$. En déduire les directions qui subissent les dilatations extrémales. On rappelle que $\sin 2\theta = 2 \cos \theta \sin \theta$, $(\sin \theta)^2 = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}$, $(\cos \theta)^2 = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}$. L'équation $\tan(\theta) = \pm 1$ admet comme solutions $\theta = \pm \frac{\pi}{4}$ et $\theta = (\pm \frac{\pi}{4} + \pi)$. $\tan(\theta) = \sqrt{3}$ admet comme solutions $\theta = \frac{\pi}{3}$ et $\theta = \frac{4\pi}{3}$.
- On suppose que $a=0$. Au point $O(0, 0, 0)$ on prend un élément $d\vec{M}_0$ parallèle à OX_1 et un élément $d\vec{M}_1$ parallèle à OX_2 .
 - Calculer le glissement subi par ces deux éléments.
 - Calculer la rotation subie par les segments $d\vec{M}_0$ et $d\vec{M}_1$ (utiliser les notations $d\vec{M}_0'$ et $d\vec{M}_1'$ après déformation). Tracer sur un schéma ces segments avant et après déformation. Indiquer sur ce schéma le glissement subi par $d\vec{M}_0$ et $d\vec{M}_1$. Est-il différent de celui calculé en a) ?
 - A l'aide du schéma précédent, vérifier si la surface des petits rectangles est conservée.

Exercice 2

Un milieu continu au repos est soumis à un tenseur de contraintes exprimé, dans un repère cartésien $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, par :

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- 1) Tracer les cercles de Mohr pour ce milieu.
- 2) Soit un élément de surface normale à un vecteur $\vec{n}_\alpha$ qui fait un angle α ($\alpha \leq \pi/4$) avec $\vec{i}$ ($\vec{n}_\alpha$ appartient au plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$). Calculer les contraintes normale T_n et tangentielle T_t sur cet élément. Eliminer $\sin \alpha$ et $\cos \alpha$ et exprimer T_n et T_t en fonction de $\sin 2\alpha$ et $\cos 2\alpha$ (T_n et T_t contiendront 2 termes au maximum).
- 3) En utilisant les résultats de 2), indiquer sur le plan de Mohr le point N correspondant un élément de surface normal à $\vec{i}$.
- 4) Soit N_α le point correspondant à la direction $\vec{n}_\alpha$ dans le plan de Mohr et θ l'angle entre la droite CN et la droite CN_α (C désigne le centre du cercle qui contient le point N). Montrer que θ est proportionnel à α . En déduire la relation entre la rotation dans le plan physique et la rotation dans le plan de Mohr.
- 5) Maintenant on suppose que le tenseur des contraintes dans la base cylindrique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$ est donné par :

$$\sigma = \begin{bmatrix} r^2 \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dans ce milieu on considère un cylindre vertical d'axe Oz , de rayon R_0 et de hauteur h .

- a) Calculer la résultante des forces qui s'exercent sur la surface latérale du cylindre. En déduire la résultante des forces volumiques $\vec{R}_v$ sur le cylindre.

- b) Ce milieu n'est plus au repos. Calculer la densité des forces volumiques $\vec{f}_v$ ($\vec{f}_v = \rho \vec{f}_m$) à laquelle il est soumis si les particules sont munies d'une accélération $\vec{\gamma} = \gamma_0 \vec{e}_r$ (γ_0 étant une constante). En déduire la nouvelle valeur de $\vec{R}_v$ (on rappelle que $\overrightarrow{\text{div}} \sigma = (\sigma_{rr,r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r}) \vec{e}_r + \frac{1}{r} \sigma_{\varphi\varphi,\varphi} \vec{e}_\varphi + \sigma_{zz,z} \vec{k}$, lorsque la matrice de σ est diagonale).

- 6) Pour le milieu considéré, on se demande s'il existe des conditions qui conduisent à un tenseur des petites déformations dont toutes les composantes sont nulles sauf $\epsilon_{rr} = az^2$ (a étant une constante), et un vecteur déplacement indépendant de φ . En examinant les trois relations qui ne font intervenir que les composantes U_r et U_z du vecteur déplacement, peut-on dire que les équations de compatibilité sont vérifiées?

$$\text{grad}(\vec{U}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial U_r}{\partial r} & \frac{1}{r} (\frac{\partial U_r}{\partial \varphi} - U_\varphi) & \frac{\partial U_r}{\partial z} \\ \frac{\partial U_\varphi}{\partial r} & \frac{1}{r} (\frac{\partial U_\varphi}{\partial \varphi} + U_r) & \frac{\partial U_\varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial U_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial U_z}{\partial \varphi} & \frac{\partial U_z}{\partial z} \end{bmatrix}_{(\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{k})}$$

On donne :