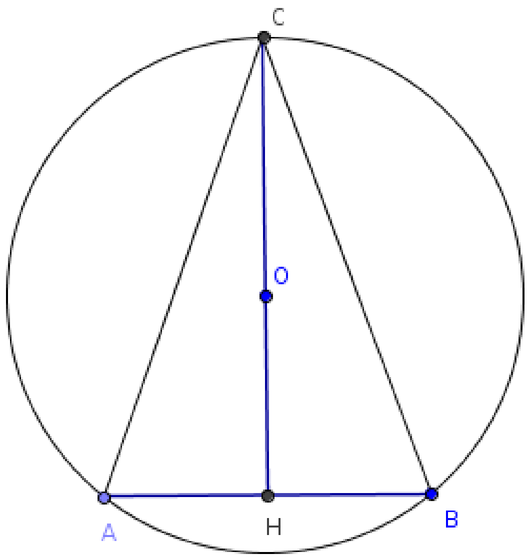
Di tutti i triangoli isosceli inscritti in un cerchio di raggio r determina quello la cui somma dell'altezza con la base è massima.



Innanzitutto va scelta l'incognita.
Ci sono tre possibilità:

1. $x = OH$
2. $x = CH$
3. $x = A\hat{C}H$

Svolgiamolo nel primo modo.

$OH = x$
$CH = x + r$
$BH = \sqrt{r^2 - x^2}$
$f(x) = CH + 2BH = x + r + 2\sqrt{r^2 - x^2}$
$f'(x) = 1 + 2 \cdot \dfrac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}} = 1 - \dfrac{2x}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 0$
$\sqrt{r^2 - x^2} = 2x$
$r^2 - x^2 = 4x^2 \quad 5x^2 = r^2 \qquad x = \pm \dfrac{r}{\sqrt{5}}$

Ovviamente la soluzione negativa non è accettabile, perchè nel nostro caso x è la lunghezza di un segmento, perciò deve essere positiva; inoltre, siccome il triangolo e inscritto in un cerchio di raggio r, non potrà superare r. Dunque $0 < x < r$.

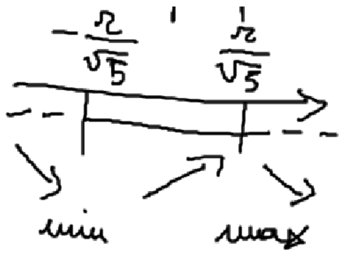
L'unica soluzione trovata sarà presumibilmente il valore massimo cercato.

Per esserne certi va studiato il segno della derivata prima oppure va fatto il calcolo della derivata seconda nel punto stazionario, utilizzando la regola di Fermat.

$f'(x) > 0$
$1 - \dfrac{2x}{\sqrt{r^2 - x^2}} > 0$
$2x - \sqrt{r^2 - x^2} < 0$

$\sqrt{r^2 - x^2} < 2x$ la disequazione irrazionale può essere elevata al quadrato, senza aggiungere le ulteriori due condizioni, che sono sempre verificate: infatti $r^2 - x^2 \geq 0$ implica che $-r < x < r$, cioè che l'incognita scelta non superi il raggio; $2x > 0$ implica che l'incognita sia positiva e questo è ovvio dato che è un segmento.

$r^2 - x^2 > 4x^2$
$r^2 - 5x^2 > 0$
$x^2 < \dfrac{r^2}{5}$
$-\dfrac{r}{\sqrt{5}} < x < \dfrac{r}{\sqrt{5}}$



Si conferma dunque che alla soluzione trovata corrisponde la lunghezza massima della somma dei due segmenti.
Il testo non richiede di determinare quanto vale questo valore massimo; se dovesse essere richiesto, basta sostituire la soluzione trovata nella funzione.