

Преподаватель Семенова Ольга Леонидовна

Математика

Группа ТЭК 2/3

30.11.2022

Лекция

Исследование поведения функции с помощью производной и построение графика.

Цели:

1.Образовательная: рассмотреть алгоритм исследования функции с помощью производной и построение графика.

2.Воспитательная: воспитать логическое мышление, внимание.

3.Развивающая: развитие коммуникативных качеств, критического мышления, познавательной активности студентов.

Формируемые общие и профессиональные компетенции: Материал лекционного занятия на тему: «Исследование поведения функции с помощью производной и построение графика» формирует такие общие компетенции:

- ОК 1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.
- ОК 2. Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.
- ОК 3. Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность.
- ОК 4. Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.
- ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности.
- ОК 6. Работать в коллективе и команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями.
- ОК 7. Брать на себя ответственность за работу членов команды (подчиненных), за результат выполнения заданий.
- ОК 8. Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации.
- ОК 9. Ориентироваться в условиях частой смены технологий в профессиональной деятельности.

Вопросы лекции:

- 1) Алгоритм исследования функции и построение графика.
- 2) Пример исследования функции и построение графика.

Алгоритм

1. Найти область определения. Выделить особые точки (точки разрыва).
2. Проверить наличие вертикальных асимптот в точках разрыва и на границах области определения.
3. Найти точки пересечения с осями координат.
4. Установить, является ли функция чётной или нечётной.
5. Определить, является ли функция периодической или нет (только для тригонометрических функций).
6. Найти точки экстремума и интервалы монотонности.
7. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости-вогнутости.
8. Найти наклонные асимптоты. Исследовать поведение на бесконечности.
9. Выбрать дополнительные точки и вычислить их координаты.
10. Построить график и асимптоты.

Пример. Провести полное исследование и построить график функции

$$y(x) = (x^2 + 8)/(1 - x).$$

- 1) Область определения функции. Так как функция представляет собой дробь, нужно найти нули знаменателя.

$$1 - x = 0, \Rightarrow x = 1.$$

Исключаем единственную точку $x = 1$ из области определения функции и получаем:

$$D(y) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty).$$

- 2) Исследуем поведение функции в окрестности точки разрыва. Найдем односторонние пределы:

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} y = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^2 + 8}{1 - x} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} y = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^2 + 8}{1 - x} = -\infty$$

Так как пределы равны бесконечности, точка $x = 1$ является разрывом второго рода, прямая $x = 1$ - вертикальная асимптота.

3) Определим точки пересечения графика функции с осями координат.

Найдем точки пересечения с осью ординат Oy, для чего приравниваем $x=0$:

$$y = \frac{0^2 + 8}{1 - 0} = 8$$

Таким образом, точка пересечения с осью Oy имеет координаты (0;8).

Найдем точки пересечения с осью абсцисс Ox, для чего положим $y=0$:

$$\frac{x^2 + 8}{1 - x} = 0 \rightarrow x^2 + 8 = 0$$

Уравнение не имеет корней, поэтому точек пересечения с осью Ox нет.

Заметим, что $x^2 + 8 > 0$ для любых x . Поэтому при $x \in (-\infty; 1)$ функция $y > 0$ (принимает положительные значения, график находится выше оси абсцисс), при $x \in (1; +\infty)$ функция $y < 0$ (принимает отрицательные значения, график находится ниже оси абсцисс).

4) Функция не является ни четной, ни нечетной, так как:

$$y(-x) = \frac{(-x)^2 + 8}{1 - (-x)} = \frac{x^2 + 8}{1 + x}; \quad y(-x) \neq y(x); \quad y(-x) \neq -y(x)$$

5) Исследуем функцию на периодичность. Функция не является периодической, так как представляет собой дробно-рациональную функцию.

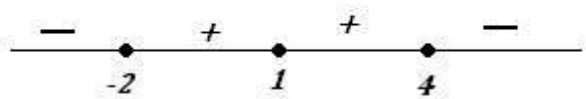
6) Исследуем функцию на экстремумы и монотонность. Для этого найдем первую производную функции:

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{x^2 + 8}{1 - x} \right)' = \frac{(x^2 + 8)'(1 - x) - (x^2 + 8)(1 - x)'}{(1 - x)^2} = \frac{2x(1 - x) - (x^2 + 8)(-1)}{(1 - x)^2} = \\ &= \frac{2x - 2x^2 + x^2 + 8}{(1 - x)^2} = -\frac{x^2 - 2x - 8}{(1 - x)^2} \end{aligned}$$

Приравняем первую производную к нулю и найдем стационарные точки (в

которых $y'=0$): $y' = 0 \rightarrow -\frac{x^2 - 2x - 8}{(1 - x)^2} = 0 \rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \rightarrow x = -2; x = 4$

Получили три критические точки: $x=-2, x=1, x=4$. Разобьем всю область определения функции на интервалы данными точками и определим знаки производной в каждом промежутке:



При $x \in (-\infty; -2), (4; +\infty)$ производная $y' < 0$, поэтому функция убывает на данных промежутках.

При $x \in (-2; 1), (1; 4)$ производная $y' > 0$, функция возрастает на данных промежутках.

При этом $x = -2$ - точка локального минимума (функция убывает, а потом возрастает), $x = 4$ - точка локального максимума (функция возрастает, а потом убывает).

Найдем значения функции в этих точках:

$$y(-2) = \frac{(-2)^2 + 8}{1 - (-2)} = \frac{12}{3} = 4 \quad y(4) = \frac{4^2 + 8}{1 - 4} = \frac{24}{-3} = -8$$

Таким образом, точка минимума $(-2; 4)$, точка максимума $(4; -8)$.

7) Исследуем функцию на перегибы и выпуклость. Найдем вторую производную функции:

$$\begin{aligned} y'' &= \left(-\frac{x^2 - 2x - 8}{(1 - x)^2} \right)' = -\frac{(x^2 - 2x - 8)'(1 - x)^2 - (x^2 - 2x - 8)((1 - x)^2)'}{(1 - x)^4} = \\ &= -\frac{(2x - 2)(1 - x)^2 - (x^2 - 2x - 8) \cdot 2(1 - x) \cdot (-1)}{(1 - x)^4} = -\frac{(2x - 2)(1 - x) + 2(x^2 - 2x - 8)}{(1 - x)^3} = \\ &= -\frac{2(-x^2 + 2x - 1 + x^2 - 2x - 8)}{(1 - x)^3} = \frac{-2 \cdot (-9)}{(1 - x)^3} = \frac{18}{(1 - x)^3} \end{aligned}$$

Приравняем вторую производную к нулю:

$$y'' = 0 \rightarrow \frac{18}{(1 - x)^3} = 0$$

Полученное уравнение не имеет корней, поэтому точек перегиба нет. При этом, когда $x \in (-\infty; 1)$ выполняется $y'' > 0$, то есть функция вогнутая, когда $x \in (1; +\infty)$ выполняется $y'' < 0$, то есть функция выпуклая.

8) Исследуем поведение функции на бесконечности, то есть при $x \rightarrow \pm\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 8}{1 - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{-1} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 8}{1 - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-1} = +\infty$$

Так как пределы бесконечны, горизонтальных асимптот нет.

Попробуем определить наклонные асимптоты вида $y=kx+b$. Вычисляем значения k , b по известным формулам:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 8}{x - x^2} = \frac{1}{-1} = -1$$

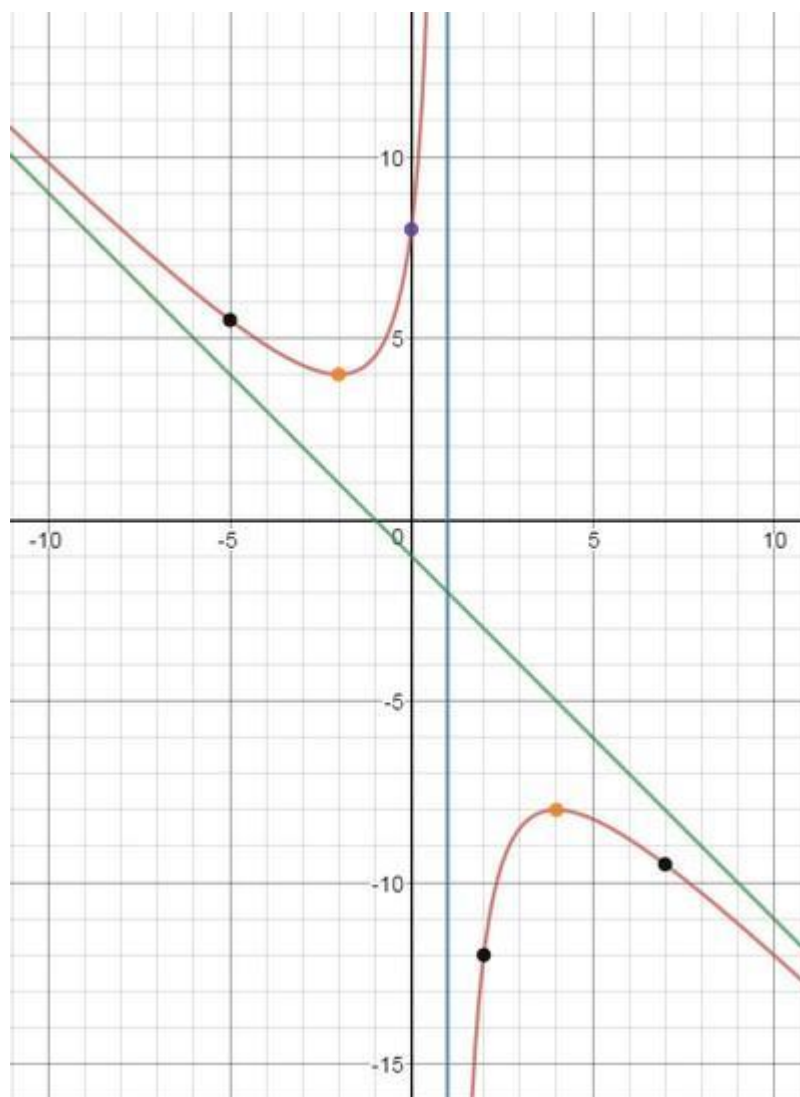
$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 8}{1 - x} + x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 8 + x - x^2}{1 - x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{8 + x}{1 - x} \right) = \frac{1}{-1} = -1$$

Получили, у что функции есть одна наклонная асимптота $y=-x-1$.

9) Дополнительные точки. Вычислим значение функции в некоторых других точках, чтобы точнее построить график.

$$y(-5)=5,5; y(2)=-12; y(7)=-9.5.$$

10) По полученным данным построим график, дополним его асимптотами $x=1$ (синий), $y=-x-1$ (зеленый) и отметим характерные точки (фиолетовым пересечение с осью ординат, оранжевым экстремумы, черным дополнительные точки):



Домашнее задание

Переписать алгоритм исследования функции в тетрадь.

Исследовать функцию и построить график:

а) $y = \frac{4}{1 - x^2}$;

Ответы присылать на электронную почту: teacher-m2022@yandex.ru