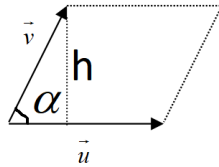
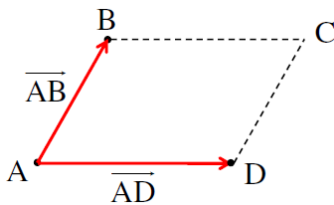


Área del paralelogramo y del triángulo

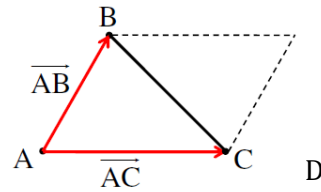


$$\begin{cases} \text{sen } \alpha = \frac{h}{|v|} \rightarrow h = |v| \text{ sen } \alpha \\ |u \times v| = |u| \cdot |v| \text{ sen } \alpha = |u| \cdot h = \text{base} \cdot \text{altura} \end{cases} \Rightarrow |u \times v| = \text{área del paralelogramo}$$

Área del triángulo =  $\frac{1}{2}$  área del paralelogramo  $\Rightarrow$  Área del triángulo =  $\frac{1}{2} |u \times v|$



Área(ABCD) =  $|AB \times AD|$



Área(ABC) =  $\frac{1}{2}$  Área(ABDC)  $\Rightarrow$  Área(ABC) =  $\frac{1}{2} |AB \times AC|$

Actividades

Halla el área del paralelogramo formado por los vectores  $\vec{u} (2,1,5)$  y  $\vec{v} (3,2,1)$ .

\*\*\*\*\*

Dos vértices consecutivos de un paralelogramo son A(1, 1, 1) y B(0, 2, 0). El centro del paralelogramo es O(0, 0, 1). Se pide:

Las coordenadas de los otros dos vértices.

Ecuación del plano que contiene al paralelogramo.

Área del paralelogramo

\*\*\*\*\*

El punto M(1, -1, 0) es el centro de un paralelogramo y A(2, 1, -1) y B(0, -2, 3) son dos vértices consecutivos del mismo. Determina los otros dos vértices y calcula el área de dicho paralelogramo.

\*\*\*\*\*

Un paralelogramo cuyo centro es M(3/2, 3, 4) tiene por vértices los puntos A(1, 2, 3) y B(3, 2, 5).

a) Halla las coordenadas de los otros dos vértices.

b) Halla la ecuación de la recta que pasa por M y es perpendicular al plano que contiene al paralelogramo.

c) Calcula el área del paralelogramo.

\*\*\*\*\*

Los puntos A(-2, 3, 1), B(2, -1, 3) y C(0, 1, -2) son vértices consecutivos del paralelogramo ABCD.

(a) Halla las coordenadas del vértice D. Sol: D(-4, 5, -4)

(b) Encuentra la ecuación de la recta que pasa por B y es paralela a la diagonal AC.

Sol: (x,y,z)=(2, -1, 3)+λ(-2, 2, 3)

(c) Halla la ecuación del plano que contiene a dicho paralelogramo. Sol: x+y-1=0

(d) Calcula el perímetro y el área del paralelogramo. Sol: Perímetro:  $12+2\sqrt{33}$  u ; Área =  $16\sqrt{2}$  u<sup>2</sup>

\*\*\*\*\*

Los puntos A(1, 1, 1), B(2, 2, 2), C(1, 3, 3) son tres vértices consecutivos de un paralelogramo

- a) Hallar el 4º vértice D y el área de dicho paralelogramo
- b) Clasificar el paralelogramo por sus lados y por sus ángulos

\*\*\*\*\*

De un paralelogramo ABCD conocemos tres vértices consecutivos: A(2, -1, 0), B(-2, 1, 0) y C(0, 1, 2).

(a) Calcula la ecuación de la recta que pasa por el centro del paralelogramo y es perpendicular al plano que lo contiene. Sol:  $(x,y,z)=(1, 0, 1)+\lambda(1, 2, -1)$

(b) Halla el área de dicho paralelogramo. Sol:  $4\sqrt{6}$  u<sup>2</sup>      (c) Calcula el vértice D. Sol: D(4, -1, 2)

\*\*\*\*\*

Considera los puntos A(0, 5, 3), B(-1, 4, 3), C(1, 2, 1) y D(2, 3, 1).

a) Comprueba que los cuatro puntos son coplanarios y que ABCD es un rectángulo.

b) Calcula el área de dicho rectángulo. Sol:  $2\sqrt{6}$  u<sup>2</sup>

\*\*\*\*\*

Calcula el área del triángulo de vértices: A(-5,2,1); B(1,7,5); C(-1,0,4)

Solución:

$$\vec{AB}(6,5,4) \quad \vec{AC}(4,-2,3) \Rightarrow \vec{AB} \times \vec{AC}(23,-2,-32)$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \left| \vec{AB} \times \vec{AC} \right| = \frac{1}{2} |(23,-2,32)| = \frac{1}{2} \sqrt{1557} \approx 19,73 \text{ u}^2$$

\*\*\*\*\*

Comprueba que los puntos A(1, 1, 1), B(0, -1, 0) y C(2, 3, 0) forman un triángulo. Halla el área de dicho triángulo.

\*\*\*\*\*

Calcula el área del triángulo definido por los vectores  $\vec{u}(3,-5,1)$   $\vec{v}(4,7,6)$   $\vec{0}(0,0,0)$

\*\*\*\*\*

Calcula el área del triángulo de vértices:

$$A(-5,2,1); B(1,7,5); C(-1,0,4)$$

$$A(1,3,5); B(2,5,8); C(5,1,-11)$$

$$P_1(1,-2,3), P_2(-3,1,4), P_3(0,4,3)$$

\*\*\*\*\*

Explica cómo puede hallarse el área de un triángulo (en el espacio) a partir de las coordenadas de sus tres vértices. Aplícalo al triángulo de vértices A(1, 0, 1), B(-1, 0, 0), C(0, 2, 3).

\*\*\*\*\*

Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de intersección del plano  $6x + 3y + 2z = 6$  con

los ejes de coordenadas. Sol.:  $\frac{7}{2} u^2$

\*\*\*\*\*

Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de intersección del plano

$\pi \equiv 2x + y + 3z - 6 = 0$  con los ejes coordenados.

\*\*\*\*\*

Considera el plano  $\pi: 2x + 2y - z - 6 = 0$  y la recta  $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{2}$

(a) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de corte del plano  $\pi$  con los ejes de

coordenadas. Sol.:  $\frac{27}{2} u^2$

(b) Calcula, razonadamente, la distancia de la recta  $r$  al plano  $\pi$ . Sol.:  $2 u$

\*\*\*\*\*

Considera los puntos  $A(1, 0, 2)$  y  $B(1, 2, -1)$ . Calcula el area del triángulo de vértices  $A, B$  y  $C$ , donde  $C$  es el punto de corte del plano  $\pi: 2x - y + 3z = 6$  con el eje  $OX$ .

\*\*\*\*\*

Dado el plano  $\pi \equiv 2x + 2y + z - 3 = 0$  y el punto  $A(1, 0, 2)$ , sea  $B$  el pie de la perpendicular de  $A$  a  $\pi$  y  $C(2, 1, -2)$  un punto del plano. Halla el área del triángulo  $ABC$ .

\*\*\*\*\*

Halle el área del pentágono de vértices  $P_1(1,1), P_2(3,0), P_3(0,-3), P_4(-5,0), P_5(-1,3)$

\*\*\*\*\*

Considera los puntos  $A(1, 0, -2)$  y  $B(-2, 3, 1)$ .

Calcula el área del triángulo de vértices  $A, B$  y  $C$ , donde  $C$  es un punto de la recta  $r: -x = y - 1 = z$ .

\*\*\*\*\*

Sea la recta  $r: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{-1}$  y el plano  $\pi: x - y + z + 1 = 0$ . Calcula el área del triángulo de vértices  $ABC$ , siendo  $A$  el punto de corte de la recta  $r$  y el plano  $\pi$ ,  $B$  el punto  $(2, 1, 2)$  de la recta  $r$  y  $C$  la proyección ortogonal del punto  $B$  sobre el plano  $\pi$ .

\*\*\*\*\*

Considera los puntos  $A(1, 2, -3), B(9, -1, 2), C(5, 0, -1)$  y la recta  $r \equiv \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$

a) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son  $A, B$  y  $C$ . Sol.:  $2\sqrt{3} u^2$

b) Halla el punto  $D$  en la recta  $r$  de forma que el triángulo  $ABD$  sea rectángulo en  $D$ . Sol.:  $D(1, -2, -2)$

\*\*\*\*\*

Sean  $A(-3, 4, 0)$ ,  $B(3, 6, 3)$  y  $C(-1, 2, 1)$  los vértices de un triángulo.

a) Halla la ecuación del plano  $\pi$  que contiene al triángulo. Sol.:  $\pi: x - 2z + 3 = 0$

b) Halla la ecuación de la recta perpendicular a  $\pi$  que pasa por el origen. Sol.:  $(x, y, z) = \lambda(1, 0, -2)$

c) Calcula el área del triángulo ABC. Sol.:  $4\sqrt{5} \text{ u}^2$

\*\*\*\*\*

Dados los puntos  $A(1, 0, 0)$ ,  $B(0, 0, 1)$  y  $P(1, -1, 1)$  y la recta  $r \equiv \begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

(a) Halla los puntos de la recta  $r$  cuya distancia al punto  $P$  es de 3 unidades. Sol.:  $Q_1(3, 1, 0)$  y  $Q_2(-1, -3, 0)$

(b) Calcula el área del triángulo ABP. Sol.:  $\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ u}^2$

\*\*\*\*\*

Considera la recta  $r: \begin{cases} x + y = 2 \\ y + z = 0 \end{cases}$  y la recta "s" que pasa por los puntos  $A(2, 1, 0)$  y  $B(1, 0, -1)$ .

(a) Estudia la posición relativa de ambas rectas. Sol.: Son secantes

(b) Determina el punto  $C$  de la recta "r" de coordenadas no negativas tal que los segmentos  $CA$  y  $CB$  sean

perpendiculares. Sol.:  $C(2, 0, 0)$  (c) Halla el área del triángulo ABC Sol.:  $\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ u}^2$

\*\*\*\*\*

Considera los puntos  $A(1, 1, 0)$ ,  $B(1, 1, 2)$  y  $C(1, -1, 1)$ .

(a) Comprueba que no están alineados y calcula el área del triángulo que determinan. Sol.:  $1 \text{ u}^2$

(b) Halla la ecuación del plano que contiene al punto  $A$  y es perpendicular a la recta determinada por  $B$  y  $C$ .

Sol.:  $2y + z - 2 = 0$

\*\*\*\*\*

Los puntos  $A(0, 2, 2)$ ,  $B(2, 0, 1)$ , y  $C(\frac{5}{2}, 2, \frac{1}{2})$  son los vértices de un triángulo. Halla:

El área y el perímetro.

Las alturas

Probar que la suma de los ángulos internos suman  $\pi$  radianes.

Hallar la proyección del lado  $AB$  en  $AC$ .

Hallar el vector proyección del lado  $\vec{AC}$  en  $\vec{AB}$

Hallar las coordenadas del punto de intersección de las medianas.

Hallar un vector paralelo a  $\vec{CB}$  y de magnitud igual a 10 unidades

\*\*\*\*\*

\*\*\*\*\*

Dados  $A(2, 1, 1)$  y  $B(0, 0, 1)$ , halla los puntos  $C$  en el eje  $OX$  tales que el área del triángulo de vértices  $A, B$  y  $C$  es 2. Sol.:  $C_1(\sqrt{11}, 0, 0)$  y  $C_2(-\sqrt{11}, 0, 0)$

\*\*\*\*\*

Sean los puntos  $A(0, 1, 1)$ ,  $B(2, 1, 3)$ ,  $C(-1, 2, 0)$  y  $D(2, 1, m)$ .

a) Calcula  $m$  para que  $A, B, C$  y  $D$  estén en un mismo plano. Sol.:  $m=3$

b) Determina la ecuación del plano respecto del cual los puntos  $A$  y  $B$  son simétricos. Sol.:  $x+z-3=0$

c) Calcula el área del triángulo de vértices  $A, B$  y  $C$ . Sol.:  $\sqrt{2}$  u

\*\*\*\*\*

Calcula el área del triángulo de vértices  $A(1, 1, 2)$ ,  $B(1, 0, -1)$  y  $C(1, -3, 2)$ . Sol.:  $6$  u<sup>2</sup>

\*\*\*\*\*

Se sabe que el triángulo  $ABC$  es rectángulo en el vértice  $C$ , que  $C$  pertenece a la recta intersección de los planos  $y + z = 1$  e  $y - 3z + 3 = 0$ , y que sus otros dos vértices son  $A(2, 0, 1)$  y  $B(0, -3, 0)$ . Halla  $C$  y el área del triángulo  $ABC$ . Sol.:  $C(0, 0, 1)$ ; Área:  $\sqrt{10}$  u<sup>2</sup>

\*\*\*\*\*

$$r \equiv \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 4 - 2t \\ z = -6 + 5t \end{cases}$$

La recta corta al plano  $x - y - 2z = 1$  en el punto  $A$ , y al  $x + y - z = 0$  en  $B$ . Sea  $O$  el origen de coordenadas

a) Hallar el ángulo entre los vectores  $\vec{OA}$  y  $\vec{OB}$ .

b) Hallar el área del triángulo  $OAB$

\*\*\*\*\*

Halla la ecuación de los planos que sean paralelos al plano  $\pi: x + y + z = 1$  y formen con los ejes de coordenadas un triángulo de área  $18\sqrt{3}$

\*\*\*\*\*

Los puntos  $A(0, 1, 1)$  y  $B(2, 1, 3)$  son vértices de un triángulo. El tercer vértice es un punto de la recta

$$r \equiv \begin{cases} 2x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \text{ . Halla los puntos } C \text{ de } r \text{ para que el triángulo } ABC \text{ tenga un área igual a } \sqrt{2} \text{ .}$$

\*\*\*\*\*

Halla la ecuación del plano que pasa por  $A(0, 2, 0)$ ,  $B(0, 0, 2)$  y corta al eje  $OX$  en un punto  $C$  tal que el área del triángulo  $ABC$  vale 4

\*\*\*\*\*

Halla un punto  $A$  que esté sobre el eje  $OX$  y tal que el área del triángulo  $ABC$  valga 6. ¿Cuántas soluciones hay?

\*\*\*\*\*

Calcula el área total del tetraedro que el plano  $6x + 3y + 2z - 6 = 0$  determina con los ejes de coordenadas.

\*\*\*\*\*

Dados los puntos A(1,0,1), B(0,0,-1) y C(3,a,b), se pide:

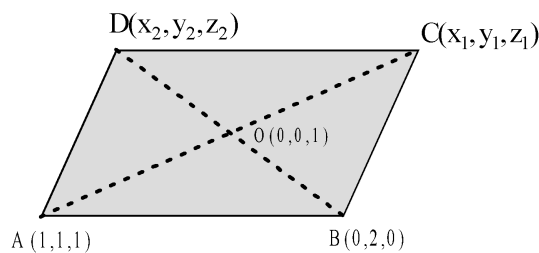
- a) Determina, si es posible, a y b de forma que los tres puntos estén alineados.
- b) Encuentra, si es posible, un punto Q situado en el eje OY y tal que el triángulo ABQ sea rectángulo con ángulo recto en B.
- c) Sea D(2,0,-2), prueba que el triángulo ABD es rectángulo y calcula su área

\*\*\*\*\*

Dos vértices consecutivos de un paralelogramo son A(1,1,1) y B(0,2,0). El centro del paralelogramo es O(0,0,1). Se pide:

- a) Las coordenadas de los otros dos vértices.
- b) Ecuación del plano que contiene al paralelogramo
- c) Área del paralelogramo.

Solución:



a) Aplicando las fórmulas de las coordenadas del punto medio de un segmento,

$$\frac{1+x_1}{2} = 0 \Rightarrow x_1 = -1; \quad \frac{1+y_1}{2} = 0 \Rightarrow y_1 = -1; \quad \frac{1+z_1}{2} = 1 \Rightarrow z_1 = 1$$

Las coordenadas de C son: C(-1,-1,1)

Del mismo modo obtenemos D(0,-2,2)

b) Ecuación del plano:

$$\vec{OA} = (1,1,0); \quad \vec{OB} = (0,2,-1)$$

Con el punto O y los vectores  $\vec{OA}$  y  $\vec{OB}$  podemos escribir su ecuación:

$$\begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - y - 2z + 2 = 0$$

d) El área del paralelogramo podemos calcularla de la forma siguiente:

$$\text{Área} = \|\vec{AD} \times \vec{AB}\|$$

$$\vec{AD} = (-1,-3,1)$$

$$\vec{AB} = (-1,1,-1)$$

$$\vec{AD} \times \vec{AB} = \left( \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \right) = (2,-2,-4)$$

$$\text{Área} = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{24} \text{ u}^2$$

\*\*\*\*\*

2012-1 El punto  $M(1, -1, 0)$  es el centro de un paralelogramo y  $A(2, 1, -1)$  y  $B(0, -2, 3)$  son dos vértices consecutivos del mismo.

Determina uno de los otros dos vértices y calcula el área de dicho paralelogramo.

\*\*\*\*\*

2012-7 De un paralelogramo ABCD conocemos tres vértices consecutivos:  $A(2, -1, 0)$ ,  $B(-2, 1, 0)$  y  $C(0, 1, 2)$ . Halla el área de dicho paralelogramo.

\*\*\*\*\*

Dados los vectores  $(3, -2, 1)$ ;  $(1, -3, 5)$ ;  $(2, 1, -4)$  del espacio  $V^3$ :

- a) Demuestra que forman triángulo
- b) Halla el área de dicho triángulo.

2011-5 Dados los puntos  $A(1, 0, 0)$ ,  $B(0, 0, 1)$  y  $P(1, -1, 1)$ , y la recta  $r$  definida por  $\begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

(a) Halla los puntos de la recta  $r$  cuya distancia al punto  $P$  es de 3 unidades.  
 (b) Calcula el área del triángulo  $ABP$ .

\*\*\*\*\*

2010-3 Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de intersección del plano  $6x + 3y + 2z = 6$  con los ejes de coordenadas.

\*\*\*\*\*

2008-4 Dado los puntos  $A(2, 1, 1)$  y  $B(0, 0, 1)$ , halla los puntos  $C$  en el eje  $OX$  tales que el área del triángulo de vértices  $A, B$  y  $C$  es 2.

\*\*\*\*\*

2008-2 Considera los puntos  $A(1, 1, 0)$ ,  $B(1, 1, 2)$  y  $C(1, -1, 1)$ . Comprueba que no están alineados y calcula el área del triángulo que determinan.

\*\*\*\*\*

2006-4 Considera los puntos  $A(1, 0, -2)$  y  $B(-2, 3, 1)$ . Calcula el área del triángulo de vértices  $A, B$  y  $C$ , donde  $C$  es un punto de la recta de ecuación  $-x = y - 1 = z$ . ¿Depende el resultado de la elección concreta del punto  $C$ ?

\*\*\*\*\*

2006-10 Halla la ecuación de un plano que sea paralelo al plano  $\pi$  de ecuación  $x + y + z = 1$  y forme con los ejes de coordenadas un triángulo de área  $18\sqrt{3}$

\*\*\*\*\*

2006-11 Sea la recta  $r$  de ecuación  $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{-1}$  y el plano  $\pi$  de ecuación  $x - y + z + 1 = 0$ . Calcula el área del triángulo de vértices  $ABC$ , siendo  $A$  el punto de corte de la recta  $r$  y el plano  $\pi$ ,  $B$  el punto  $(2, 1, 2)$  de la recta  $r$  y  $C$  la proyección ortogonal del punto  $B$  sobre el plano  $\pi$ .

\*\*\*\*\*

2006-9 Considera los puntos  $A(2, 1, 2)$  y  $B(0, 4, 1)$  y la recta  $r$  de ecuación  $x = y - 2 = \frac{z-3}{2}$ . Calcula el área del triángulo de vértices  $ABC$ , siendo  $C$  un punto de la recta  $r$  que equidista de los puntos  $A$  y  $B$ .

\*\*\*\*\*

2005-8 Sean  $A(-3, 4, 0)$ ,  $B(3, 6, 3)$  y  $C(-1, 2, 1)$  los vértices de un triángulo.

Calcula el área del triángulo ABC.

\*\*\*\*\*

2004-3 Se sabe que el triángulo ABC es rectángulo en el vértice C, que pertenece a la recta intersección de los planos  $y + z = 1$  e  $y - 3z + 3 = 0$ , y que sus otros dos vértices son  $A(2, 0, 1)$  y  $B(0, -3, 0)$ . Halla C y el área del triángulo ABC.

\*\*\*\*\*

2004-6 Sean los puntos  $A(1, 0, -1)$  y  $B(2, -1, 3)$ .

Calcula el área del paralelogramo de vértices consecutivos ABCD sabiendo que la recta determinada por los vértices C y D pasa por el origen de coordenadas.

\*\*\*\*\*

2004-10 Las rectas  $r: \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 2x + 2y + z - 4 = 0 \end{cases}$  y  $s: \begin{cases} x + y - 6 = 0 \\ x + y - z - 6 = 0 \end{cases}$  contienen dos lados de un cuadrado.

(a) Calcula el área del cuadrado.

(b) Halla la ecuación del plano que contiene al cuadrado.

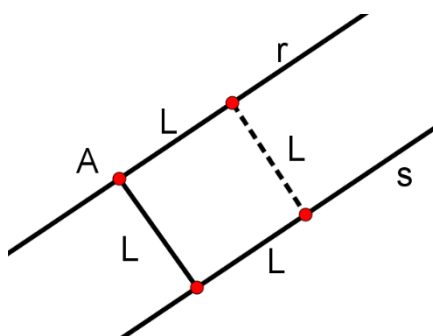
\*\*\*\*\*

2016-4 Considera las rectas "r" y "s" dadas por:

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 \end{cases} \quad s: \begin{cases} x + 2y = -1 \\ z = -1 \end{cases}$$

Sabiendo que dos de los lados de un cuadrado están en las rectas "r" y "s", calcula su área.

**Resolución**



La medida del lado del cuadrado es  $L = dist(r, s) = dist(A, s)$

-Hallamos el plano  $\pi' \perp r$  que pasa por  $A(1, 1, 1) \rightarrow n_{\pi'} = d_r$

$$\pi': 2(x-1) - 1(y-1) + 0(z-1) = 0 \Rightarrow \pi': 2x - y - 1 = 0$$

-Después  $P = \pi' \cap s \Rightarrow L = dist(A, s) = |AP|$

$$P = \pi' \cap s \Rightarrow \begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ x + 2y = -1 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{5}, y = -\frac{3}{5}, z = -1 \Rightarrow P\left(\frac{1}{5}, -\frac{3}{5}, -1\right)$$

$$AP = \left(-\frac{4}{5}, -\frac{8}{5}, -2\right) \rightarrow |AP| = \sqrt{\left(-\frac{4}{5}\right)^2 + \left(-\frac{8}{5}\right)^2 + (-2)^2} = \sqrt{\frac{36}{5}}$$

$$Área(cuadrado) = L^2 = \left(\sqrt{\frac{36}{5}}\right)^2 = \frac{36}{5} u^2$$

\*\*\*\*\*

2004-11 Sean los puntos  $A(1, 2, 1)$ ,  $B(2, 3, 1)$ ,  $C(0, 5, 3)$  y  $D(-1, 4, 3)$ .

(a) Demuestra que el polígono de vértices consecutivos ABCD es un rectángulo.

(b) Calcula el área de dicho rectángulo.

\*\*\*\*\*

2004-1 Calcula el área del triángulo de vértices A(0, 0, 1), B(0, 1, 0) y C, siendo C la proyección ortogonal del punto (1, 1, 1) sobre el plano  $x + y + z = 1$ .

\*\*\*\*\*

2003-1 Se sabe que los puntos A(1, 0, -1), B(3, 2, 1) y C(-7, 1, 5) son vértices consecutivos de un paralelogramo ABCD.

(a) Calcula las coordenadas del punto D.

(b) Halla el área del paralelogramo

\*\*\*\*\*

2002-8 Calcula el área del triángulo de vértices A(1, 1, 2), B(1, 0, -1) y C(1, -3, 2)

\*\*\*\*\*

2001-9 Considera el plano  $2x + y + 2z - 4 = 0$

Halla el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de corte del plano dado con los ejes coordenados.

\*\*\*\*\*

Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de corte del plano

$\pi: 3x + 2y + 4z - 12 = 0$  con los ejes de coordenadas.

Solución: eje X:  $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$  ; eje Y:  $\begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}$  ; eje Z:  $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases}$  ;  $\begin{cases} A = \pi \cap \text{eje X} \rightarrow 3\lambda - 12 = 0 \rightarrow \lambda = 4; A(4, 0, 0) \\ B = \pi \cap \text{eje Y} \rightarrow 2\lambda - 12 = 0 \rightarrow \lambda = 6; B(0, 6, 0) \\ C = \pi \cap \text{eje Z} \rightarrow 4\lambda - 12 = 0 \rightarrow \lambda = 3; C(0, 0, 3) \end{cases}$

$\vec{AB} = (-4, 6, 0)$        $\vec{AC} = (-4, 0, 3)$

$\text{Área (ABC)} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|$  ;  $\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -4 & 6 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (18, 12, 24)$  ;  $\text{Área (ABC)} = \frac{1}{2} |(18, 12, 24)| = \frac{1}{2} |6(3, 2, 4)| = \boxed{3\sqrt{29} \text{ u}^2}$

\*\*\*\*\*

2016-1 Considera el plano  $\pi$  de ecuación  $x + 2y + z = 1$ .

Determina la ecuación de un plano paralelo a  $\pi$  que forme con los ejes de coordenadas un triángulo de área  $\sqrt{6}$ .

Resolución

planos paralelos a  $\pi \rightarrow \pi_m : x + 2y + z = m$ , con  $m \in \mathbb{R}$

Triángulo ABC:

$$\text{eje X: } \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad A = \pi_m \cap \text{eje X} \rightarrow \lambda + 2 \cdot 0 + 0 = m \rightarrow \lambda = m \Rightarrow A(m, 0, 0)$$

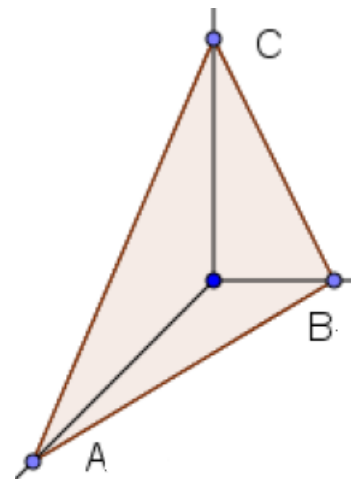
$$\text{eje Y: } \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases} \quad B = \pi_m \cap \text{eje Y} \rightarrow 0 + 2\lambda + 0 = m \rightarrow \lambda = \frac{m}{2} \Rightarrow B\left(0, \frac{m}{2}, 0\right)$$

$$\text{eje Z: } \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases} \quad C = \pi_m \cap \text{eje Z} \rightarrow 0 + 2 \cdot 0 + \lambda = m \rightarrow \lambda = m \Rightarrow C(0, 0, m)$$

$$\vec{AB} = \left(-m, \frac{m}{2}, 0\right) \quad \vec{AC} = (-m, 0, m) \quad \text{Área}(ABC) = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -m & \frac{m}{2} & 0 \\ -m & 0 & m \end{vmatrix} = \left(\frac{m^2}{2}, m^2, \frac{m^2}{2}\right); \quad \sqrt{6} = \text{Área}(ABC) = \frac{1}{2} \left| \left(\frac{m^2}{2}, m^2, \frac{m^2}{2}\right) \right|$$

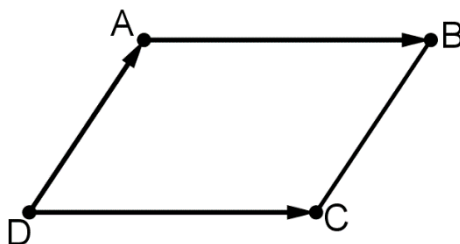
$$\sqrt{6} = \frac{1}{2} m^2 \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{m^2 \sqrt{6}}{4} \Rightarrow m^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \rightarrow \pi_1 : x + 2y + z = 2 \\ m = -2 \rightarrow \pi_2 : x + 2y + z = -2 \end{cases}$$



\*\*\*\*\*

2016-5 Considera un paralelogramo de vértices consecutivos A, B, C y D siendo A(1,0,-1), B(3,2,1) y C(-7,1,5). Calcula el área del paralelogramo.

**Resolución**



Sabemos que  $A(\text{paralelogramo}) = |\vec{DC} \times \vec{DA}|$ ;  $\vec{DC} \times \vec{DA} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 2 & 2 \\ 10 & 1 & -4 \end{vmatrix} = (-10, 28, -18)$

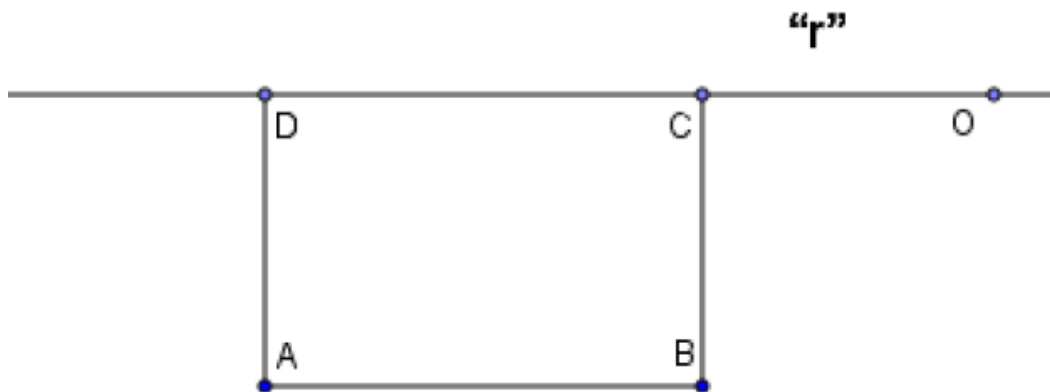
$$A(\text{paralelogramo}) = |(-10, 28, -18)| = \sqrt{1208} \cong 34,76 \text{ u}^2$$

\*\*\*\*\*

2016-8 Considera un rectángulo de vértices consecutivos A, B, C y D siendo A(1, 1, 0) y B(2, 2, 1). Sabiendo que la recta r que contiene a los puntos C y D pasa por el origen de coordenadas se pide:  
a) Calcula el área del triángulo ABC.

b) Determina las coordenadas del punto D.

Resolución



a) y b)  $\begin{cases} \text{Como } C \in r \Rightarrow C(c, c, c) \\ \text{Como } D \in r \Rightarrow D(d, d, d) \end{cases}$

$$\begin{cases} \text{Como } \overline{BC} \perp \overline{AB} \Rightarrow (c-2, c-2, c-1) \cdot (1, 1, 1) = 0 \rightarrow c-2+c-2+c-1=0 \rightarrow c = \frac{5}{3} \Rightarrow C\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right) \\ \text{Como } \overline{AD} \perp \overline{AB} \Rightarrow (d-1, d-1, d-0) \cdot (1, 1, 1) = 0 \rightarrow d-1+d-1+d=0 \rightarrow d = \frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{D\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)} \end{cases}$$

$$\text{Área}(ABC) = \frac{1}{2} \text{Área}(ABCD) = \frac{1}{2} \cdot \text{base} \cdot \text{altura} = \frac{1}{2} |\overline{AB}| \cdot |\overline{BC}| = \frac{1}{2} |(1, 1, 1)| \cdot \left| \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \right|$$

$$\text{Área}(ABC) = \frac{1}{2} \sqrt{3} \cdot \frac{1}{3} \sqrt{6} = \frac{\sqrt{18}}{6} = \frac{3\sqrt{2}}{6} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2} u^2}$$

\*\*\*\*\*

2015-10 Los puntos A(0,1,1) y B(2,1, 3) son los vértices de un triángulo. El tercer vértice es un punto de

la recta  $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

Calcula las coordenadas de los posibles puntos D de r para que el triángulo ABD tenga un área igual a  $\sqrt{2}$ .

Resolución

Como  $r : \begin{cases} 2x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ , si  $x = \lambda$ ,  $y = -2\lambda$ , un punto genérico de r es  $(\lambda, -2\lambda, 0)$

Dado que el triángulo ABD debe tener área  $\sqrt{2}$ , siendo  $D \in r$ ,  $D(k, -2k, 0)$ :

$$\text{Área}(ABD) = \frac{1}{2} \text{Área del paralelogramo} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AD}|$$

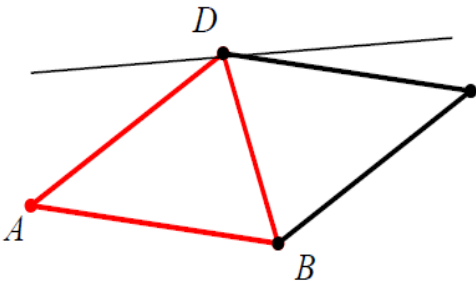
$$\text{Como } \vec{AB} = (2, 0, 2) \text{ y } \vec{AD} = (k, -2k-1, -1) \Rightarrow \vec{AB} \times \vec{AD} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & 2 \\ k & -2k-1 & -1 \end{vmatrix} = (4k+2, 2+2k, -4k-2)$$

$$\frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AD}| = \frac{1}{2} |2 \cdot (2k+1, 1+k, -2k-1)| = |(2k+1, 1+k, -2k-1)| = \sqrt{(2k+1)^2 + (1+k)^2 + (-2k-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\text{Elevando al cuadrado los dos miembros y desarrollando: } 9k^2 + 10k + 3 = 2 \Rightarrow 9k^2 + 10k + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = \frac{-1}{9} \\ k = -1 \end{cases}$$

Se puede comprobar (sustituyendo) que ambas soluciones son válidas para la ecuación radical.

Luego, hay dos puntos: Si  $k = \frac{-1}{9} \rightarrow D_1\left(\frac{-1}{9}, \frac{2}{9}, 0\right)$  Si  $k = -1 \rightarrow D_2(-1, 2, 0)$



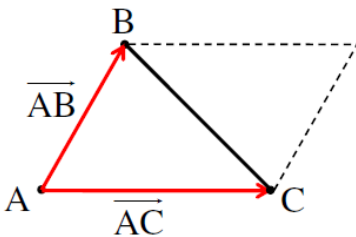
\*\*\*\*\*

2015-7 Sean los puntos  $A(0,1,1)$ ,  $B(2,1,3)$ ,  $C(-1,2,0)$ .  
Calcula el área del triángulo de vértices A, B y C.

**Resolución**

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = (2, 0, 2) \times (-1, 1, -1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-2, 0, 2)$$

$$\text{Área}(ABC) = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} |(-2, 0, 2)| = \frac{1}{2} \cdot 2 |(-1, 0, 1)| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2} \text{ u}^2$$



\*\*\*\*\*

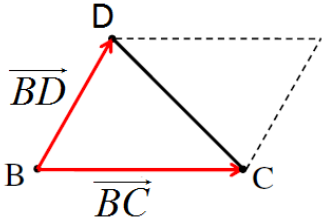
2015-1 Considera los puntos  $B(1,2,-3)$ ,  $C(9,-1,2)$ ,  $D(5, 0,-1)$  y la recta  $r \equiv \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$

- a) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son B, C y D.
- b) Halla un punto A en la recta r de forma que el triángulo ABC sea rectángulo en A.

**Resolución**

$$a) \vec{BC} \times \vec{BD} = (8, -3, 5) \times (4, -2, 2) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 8 & -3 & 5 \\ 4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = (4, 4, -4)$$

$$\text{Área}(BCD) = \frac{1}{2} |\vec{BC} \times \vec{BD}| = \frac{1}{2} |(4, 4, -4)| = \frac{1}{2} \cdot 4 |(1, 1, -1)| = 2\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} = \boxed{2\sqrt{3} \text{ u}^2}$$

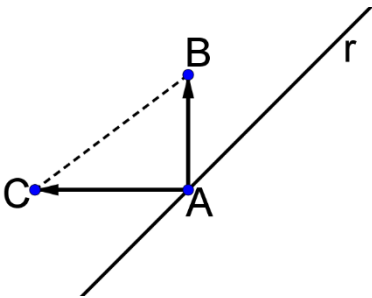


b) Ponemos r en forma paramétrica resolviendo el sistema  $\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

Si A es un punto cualquiera de r,  $A(-1-\lambda, \lambda, \lambda)$ . Como el triángulo ABC debe ser rectángulo en A:

$\vec{AB} \perp \vec{AC} \Rightarrow \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$ . Dado que  $\vec{AB} = (2 + \lambda, 2 - \lambda, -3 - \lambda)$ ,  $\vec{AC} = (10 + \lambda, -1 - \lambda, 2 - \lambda)$

$(2 + \lambda)(10 + \lambda) + (2 - \lambda)(-1 - \lambda) + (-3 - \lambda)(2 - \lambda) = 0 \Rightarrow 3\lambda^2 + 12\lambda + 12 = 0 \Rightarrow \lambda = -2$ . Luego,  $A(1, -2, -2)$



\*\*\*\*\*

2014-11 Sean  $A(-3, 4, 0)$ ,  $B(3, 6, 3)$  y  $C(-1, 2, 1)$  los vértices de un triángulo. Calcula el área del triángulo ABC.

\*\*\*\*\*

2012-1 El punto  $M(1, -1, 0)$  es el centro de un paralelogramo y  $A(2, 1, -1)$  y  $B(0, -2, 3)$  son dos vértices consecutivos del mismo.

Determina uno de los otros dos vértices y calcula el área de dicho paralelogramo.

\*\*\*\*\*

2012-7 De un paralelogramo ABCD conocemos tres vértices consecutivos:  $A(2, -1, 0)$ ,  $B(-2, 1, 0)$  y  $C(0, 1, 2)$ . Halla el área de dicho paralelogramo.

\*\*\*\*\*

2011-5 Dados los puntos  $A(1, 0, 0)$ ,  $B(0, 0, 1)$  y  $P(1, -1, 1)$ , y la recta r definida por  $\begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

(a) Halla los puntos de la recta r cuya distancia al punto P es de 3 unidades.

(b) Calcula el área del triángulo ABP.

\*\*\*\*\*

2010-3 Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de intersección del plano  $6x + 3y + 2z = 6$  con los ejes de coordenadas.

\*\*\*\*\*

2008-4 Dado los puntos  $A(2, 1, 1)$  y  $B(0, 0, 1)$ , halla los puntos  $C$  en el eje  $OX$  tales que el área del triángulo de vértices  $A, B$  y  $C$  es 2.

\*\*\*\*\*

2008-2 Considera los puntos  $A(1, 1, 0)$ ,  $B(1, 1, 2)$  y  $C(1, -1, 1)$ . Comprueba que no están alineados y calcula el área del triángulo que determinan.

\*\*\*\*\*

2006-4 Considera los puntos  $A(1, 0, -2)$  y  $B(-2, 3, 1)$ . Calcula el área del triángulo de vértices  $A, B$  y  $C$ , donde  $C$  es un punto de la recta de ecuación  $-x = y - 1 = z$ . ¿Depende el resultado de la elección concreta del punto  $C$ ?

\*\*\*\*\*

2006-10 Halla la ecuación de un plano que sea paralelo al plano  $\pi$  de ecuación  $x + y + z = 1$  y forme con los ejes de coordenadas un triángulo de área  $18\sqrt{3}$

\*\*\*\*\*

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{-1}$$

2006-11 Sea la recta  $r$  de ecuación  $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{-1}$  y el plano  $\pi$  de ecuación  $x - y + z + 1 = 0$ . Calcula el área del triángulo de vértices  $ABC$ , siendo  $A$  el punto de corte de la recta  $r$  y el plano  $\pi$ ,  $B$  el punto  $(2, 1, 2)$  de la recta  $r$  y  $C$  la proyección ortogonal del punto  $B$  sobre el plano  $\pi$ .

\*\*\*\*\*

2006-9 Considera los puntos  $A(2, 1, 2)$  y  $B(0, 4, 1)$  y la recta  $r$  de ecuación  $x = y - 2 = \frac{z-3}{2}$ . Calcula el área del triángulo de vértices  $ABC$ , siendo  $C$  un punto de la recta  $r$  que equidista de los puntos  $A$  y  $B$ .

\*\*\*\*\*

2005-8 Sean  $A(-3, 4, 0)$ ,  $B(3, 6, 3)$  y  $C(-1, 2, 1)$  los vértices de un triángulo. Calcula el área del triángulo  $ABC$ .

\*\*\*\*\*

2004-3 Se sabe que el triángulo  $ABC$  es rectángulo en el vértice  $C$ , que pertenece a la recta intersección de los planos  $y + z = 1$  e  $y - 3z + 3 = 0$ , y que sus otros dos vértices son  $A(2, 0, 1)$  y  $B(0, -3, 0)$ . Halla  $C$  y el área del triángulo  $ABC$ .

\*\*\*\*\*

2004-6 Sean los puntos  $A(1, 0, -1)$  y  $B(2, -1, 3)$ . Calcula el área del paralelogramo de vértices consecutivos  $ABCD$  sabiendo que la recta determinada por los vértices  $C$  y  $D$  pasa por el origen de coordenadas.

\*\*\*\*\*

2004-10 Las rectas  $r: \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 2x + 2y + z - 4 = 0 \end{cases}$  y  $s: \begin{cases} x + y - 6 = 0 \\ x + y - z - 6 = 0 \end{cases}$  contienen dos lados de un cuadrado.

- (a) Calcula el área del cuadrado.
- (b) Halla la ecuación del plano que contiene al cuadrado.

\*\*\*\*\*

Sean las rectas  $r \equiv x - 1 = \frac{y}{2} = z - 2$  ;  $s \equiv \begin{cases} x - y + z = 2 \\ 3x - y - z = -4 \end{cases}$ .

Sabiendo que dos lados de un cuadrado están situados sobre las rectas  $r$  y  $s$ , calcula su área.

\*\*\*\*\*

- 2004-11 Sean los puntos  $A(1, 2, 1)$ ,  $B(2, 3, 1)$ ,  $C(0, 5, 3)$  y  $D(-1, 4, 3)$ .
  - (a) Demuestra que el polígono de vértices consecutivos  $ABCD$  es un rectángulo.
  - (b) Calcula el área de dicho rectángulo.

\*\*\*\*\*

2004-1 Calcula el área del triángulo de vértices A(0, 0, 1), B(0, 1, 0) y C, siendo C la proyección ortogonal del punto (1, 1, 1) sobre el plano  $x + y + z = 1$ .

\*\*\*\*\*

2003-1 Se sabe que los puntos A(1, 0, -1), B(3, 2, 1) y C(-7, 1, 5) son vértices consecutivos de un paralelogramo ABCD.

(a) Calcula las coordenadas del punto D.

(b) Halla el área del paralelogramo

\*\*\*\*\*

2002-8 Calcula el área del triángulo de vértices A(1, 1, 2), B(1, 0, -1) y C(1, -3, 2)

\*\*\*\*\*

2001-9 Considera el plano  $2x + y + 2z - 4 = 0$

Halla el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de corte del plano dado con los ejes coordenados.

\*\*\*\*\*

Determinar los puntos de corte del plano  $\pi : 3x - 2y + z = 6$  con los ejes de coordenadas y calcular el área del triángulo que dichos puntos definen.

\*\*\*\*\*

Los puntos A(0, 1, 1) y B(2, 1, 3) son vértices de un triángulo. El tercer vértice es un punto de la recta

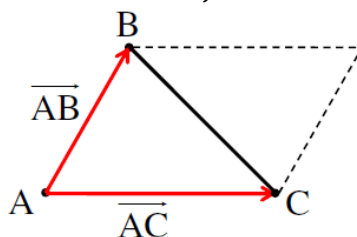
$$r \equiv \begin{cases} 2x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases} . \text{ Halla los puntos C de r para que el triángulo ABC tenga un área igual a } \sqrt{2} .$$

\*\*\*\*\*

El punto M(1, -1, 0) es el centro de un paralelogramo y A(2, 1, -1) y B(0, -2, 3) son dos vértices consecutivos del mismo. Determina los otros dos vértices y calcula el área de dicho paralelogramo.

\*\*\*\*\*

Considera los puntos A(1, 0, 2) y B(1, 2, -1). Calcula el area del triángulo de vértices A, B y C, donde C es el punto de corte del plano  $\pi : 2x - y + 3z = 6$  con el eje OX



Como  $OX : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0, \\ z = 0 \end{cases} , C = \pi \cap OX \Rightarrow 2\lambda - 0 + 3 \cdot 0 = 6 \Rightarrow \lambda = 3, \text{ luego } C(3, 0, 0)$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (0, 2, -3) \times (2, 0, -2) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-4, 6, -4)$$

$$\text{Área}(ABC) = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} |(-4, 6, -4)| = \frac{1}{2} \cdot 2 |(-2, 3, -2)| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + (-2)^2} = \boxed{\sqrt{17} \text{ u}^2}$$

\*\*\*\*\*

Dados los puntos A(2, 1, 1) y B(0, 0, 1), halla los puntos C en el eje OX tales que el área del triángulo de vértices A, B y C es 2.

**Solución:**

Consideramos los puntos A(2, 1, 1), B(0, 0, 1) y C(a, 0, 0) ya que está en el eje OX.

El área de un triángulo es la siguiente:

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \|\vec{BA} \times \vec{BC}\| = 2$$

$$\vec{BA} \times \vec{BC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 0 \\ a & 0 & -1 \end{vmatrix} = i(-1) - j(-2) + k(-a) = (-1, 2, -a)$$

$$\vec{BA} = (2 - 0, 1 - 0, 1 - 1) = (2, 1, 0)$$

$$\vec{BC} = (a - 0, 0 - 0, 0 - 1) = (a, 0, -1)$$

$$\|\vec{BA} \times \vec{BC}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + a^2} \Rightarrow 4 = \sqrt{1^2 + 4 + a^2} \Rightarrow 16 = 1 + 4 + a^2 \Rightarrow a^2 = 11 \Rightarrow a = \pm\sqrt{11}$$

Los puntos son:

$$C(\sqrt{11}, 0, 0) \text{ y } C'(-\sqrt{11}, 0, 0)$$

\*\*\*\*\*

Considera los puntos A(1, 0, -2) y B(-2, 3, 1).

Calcula el área del triángulo de vértices A, B y C, donde C es un punto de la recta r: -x = y - 1 = z.

\*\*\*\*\*

$$r \equiv \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 4 - 2t \\ z = -6 + 5t \end{cases}$$

La recta corta al plano  $x - y - 2z = 1$  en el punto A, y al plano  $x + y - z = 0$  en el punto B. Si O es el origen de coordenadas:

- a) Halla el ángulo formado por los vectores  $\vec{OA}$  y  $\vec{OB}$ .
- b) Halla el área del triángulo AOB

\*\*\*\*\*

Halla la ecuación de los planos que sean paralelos al plano  $\pi: x + y + z = 1$  y formen con los ejes de coordenadas un triángulo de área  $18\sqrt{3}$

\*\*\*\*\*

$$r: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{-1}$$

Sea la recta y el plano  $\pi: x - y + z + 1 = 0$ . Calcula el área del triángulo de vértices ABC, siendo A el punto de corte de la recta r y el plano  $\pi$ , B el punto (2, 1, 2) de la recta r y C la proyección ortogonal del punto B sobre el plano  $\pi$ .

\*\*\*\*\*

Considera los puntos A(1, 2, -3), B(9, -1, 2), C(5, 0, -1) y la recta  $r \equiv \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$

- a) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son A, B y C. Sol.:  $2\sqrt{3} \text{ u}^2$
- b) Halla el punto D en la recta r de forma que el triángulo ABD sea rectángulo en D. Sol.: D(1, -2, -2)

\*\*\*\*\*

Sean A(-3, 4, 0), B(3, 6, 3) y C(-1, 2, 1) los vértices de un triángulo.

- a) Halla la ecuación del plano  $\pi$  que contiene al triángulo. Sol.:  $\pi: x - 2z + 3 = 0$

b) Halla la ecuación de la recta perpendicular a  $\pi$  que pasa por el origen. Sol:  $(x,y,z)=\lambda(1, 0, -2)$

c) Calcula el área del triángulo ABC. Sol:  $4\sqrt{5} u^2$

\*\*\*\*\*

Considera los puntos A(0, 5, 3), B(-1, 4, 3), C(1, 2, 1) y D(2, 3, 1).

a) Comprueba que los cuatro puntos son coplanarios y que ABCD es un rectángulo.

b) Calcula el área de dicho rectángulo. Sol:  $2\sqrt{6} u^2$

\*\*\*\*\*

Consideramos los puntos A(-5, 2, 4), B(-3,2,0) y la recta  $s \equiv \frac{x-1}{-3} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$ .

a) Calcular la recta que corta perpendicularmente a s pasa por B .

b) Consideramos el rectángulo que tiene por vértices opuestos a A y B, y uno de los lados que pasa por A está contenido en la recta s. Calcula su área.

\*\*\*\*\*

De un paralelogramo ABCD conocemos tres vértices consecutivos: A(2, -1, 0), B(-2, 1, 0) y C(0, 1, 2).

(a) Calcula la ecuación de la recta que pasa por el centro del paralelogramo y es perpendicular al plano que lo contiene. Sol:  $(x,y,z)=(1, 0, 1)+\lambda(1, 2, -1)$

(b) Halla el área de dicho paralelogramo. Sol:  $4\sqrt{6} u^2$  (c) Calcula el vértice D. Sol: D(4, -1, 2)

\*\*\*\*\*

Sean los puntos A(1, 0, 2), B(0, 3, 1) y C(0, 2, 3) tres vértices consecutivos de un paralelogramo ABCD.

a) Calcule los vectores  $\overrightarrow{BA}$  y  $\overrightarrow{BC}$  .

b) Encuentre las coordenadas del punto D.

c) Halle el área del paralelogramo ABCD.

\*\*\*\*\*

Dados los puntos A(1, 0, 0), B(0, 0, 1) y P(1, -1, 1) y la recta  $r \equiv \begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

(a) Halla los puntos de la recta r cuya distancia al punto P es de 3 unidades. Sol:  $Q_1(3, 1, 0)$  y  $Q_2(-1, -3, 0)$

(b) Calcula el área del triángulo ABP. Sol:  $\frac{\sqrt{3}}{2} u^2$

\*\*\*\*\*

Considera la recta  $r: \begin{cases} x + y = 2 \\ y + z = 0 \end{cases}$  y la recta "s" que pasa por los puntos A(2, 1, 0) y B(1, 0, -1).

(a) Estudia la posición relativa de ambas rectas. Sol: Son secantes

(b) Determina el punto C de la recta "r" de coordenadas no negativas tal que los segmentos CA y CB sean

perpendiculares. Sol: C(2, 0, 0) (c) Halla el área del triángulo ABC Sol:  $\frac{\sqrt{2}}{2} u^2$

\*\*\*\*\*

Considera los puntos A(1, 1, 0), B(1, 1, 2) y C(1, -1, 1).

(a) Comprueba que no están alineados y calcula el área del triángulo que determinan. Sol:  $1 u^2$

(b) Halla la ecuación del plano que contiene al punto A y es perpendicular a la recta determinada por B y C. Sol:  $2y+z-2=0$

\*\*\*\*\*

Dados A(2, 1, 1) y B(0, 0, 1), halla los puntos C en el eje OX tales que el área del triángulo de vértices A, B y C es 2. Sol:  $C_1(\sqrt{11}, 0, 0)$  y  $C_2(-\sqrt{11}, 0, 0)$

\*\*\*\*\*

Considera el plano  $\pi: 2x + 2y - z - 6 = 0$  y la recta  $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{2}$

(a) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de corte del plano  $\pi$  con los ejes de coordenadas. Sol:  $\frac{27}{2} u^2$

(b) Calcula, razonadamente, la distancia de la recta  $r$  al plano  $\pi$ . Sol:  $2 u$

\*\*\*\*\*

Sean los puntos  $A(0, 1, 1)$ ,  $B(2, 1, 3)$ ,  $C(-1, 2, 0)$  y  $D(2, 1, m)$ .

a) Calcula  $m$  para que  $A, B, C$  y  $D$  estén en un mismo plano. Sol:  $m=3$

b) Determina la ecuación del plano respecto del cual los puntos  $A$  y  $B$  son simétricos. Sol:  $x+z-3=0$

c) Calcula el área del triángulo de vértices  $A, B$  y  $C$ . Sol:  $\sqrt{2} u$

\*\*\*\*\*

Calcula el área del triángulo de vértices  $A(1, 1, 2)$ ,  $B(1, 0, -1)$  y  $C(1, -3, 2)$ . Sol:  $6 u^2$

\*\*\*\*\*

Los puntos  $A(-2, 3, 1)$ ,  $B(2, -1, 3)$  y  $C(0, 1, -2)$  son vértices consecutivos del paralelogramo  $ABCD$ .

(a) Halla las coordenadas del vértice  $D$ . Sol:  $D(-4, 5, -4)$

(b) Encuentra la ecuación de la recta que pasa por  $B$  y es paralela a la diagonal  $AC$ .

Sol:  $(x,y,z)=(2, -1, 3)+\lambda(-2, 2, 3)$

(c) Halla la ecuación del plano que contiene a dicho paralelogramo. Sol:  $x+y-1=0$

(d) Calcula el perímetro y el área del paralelogramo. Sol: Perímetro:  $12+2\sqrt{33} u$  ; Área:  $16\sqrt{2} u^2$

\*\*\*\*\*

Los puntos  $A(1, 0, -1)$ ,  $B(3, 2, 1)$  y  $C(-7, 1, 5)$  son vértices consecutivos de un paralelogramo  $ABCD$ .

- Calcula las coordenadas de  $D$
- Halla el área de dicho paralelogramo.

\*\*\*\*\*

Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de intersección del plano  $6x + 3y + 2z = 6$  con

los ejes de coordenadas. Sol:  $\frac{7}{2} u^2$

\*\*\*\*\*

Se sabe que el triángulo  $ABC$  es rectángulo en el vértice  $C$ , que  $C$  pertenece a la recta intersección de los planos  $y + z = 1$  e  $y - 3z + 3 = 0$ , y que sus otros dos vértices son  $A(2, 0, 1)$  y  $B(0, -3, 0)$ . Halla  $C$  y el área del triángulo  $ABC$ . Sol:  $C(0, 0, 1)$  ; Área:  $\sqrt{10} u^2$

\*\*\*\*\*

Calcular el área del triángulo de vértices  $(2, -3, 1)$ ,  $(0, 1, 2)$  y  $(1, 4, 2)$ .

\*\*\*\*\*

Un triángulo isósceles  $ABC$ , con el ángulo desigual en  $A$ , tiene por vértices  $B$  y  $C$  los puntos  $(1, -1, 2)$  y  $(3,$

$1, 0)$ , mientras que el vértice  $A$  está en la recta:  $\frac{x-4}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{-1}$ . Halla las coordenadas de  $A$  y el área del triángulo  $ABC$ .

\*\*\*\*\*

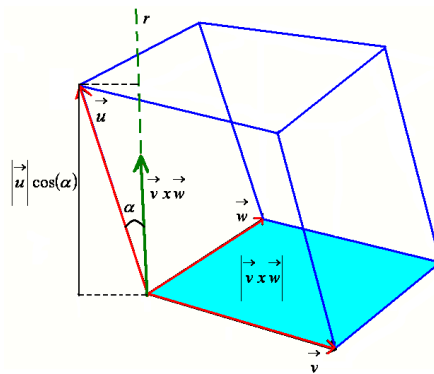
Los puntos  $A(1, 0, 2)$  y  $B(-1, 0, -2)$  son vértices opuestos de un cuadrado. Calcula el área del cuadrado.

\*\*\*\*\*

Un cuadrado  $ABCD$  está situado sobre un plano  $2x + y + z = 4$ . Dos de sus vértices opuestos son  $A(1, 1, 1)$  y  $C(0, 2, 2)$ . Hallar el área del cuadrado y la ecuación de la diagonal  $BD$ .

\*\*\*\*\*

Volumen del paralelepípedo y del tetraedro

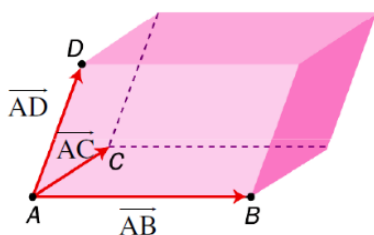


$$\left| \begin{bmatrix} \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \end{bmatrix} \right| = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = |\vec{u}| |\vec{v} \times \vec{w}| \cos(\alpha) = |\vec{v} \times \vec{w}| |\vec{u}| \cos(\alpha) = \text{área de la base} \cdot \text{altura} = V_{\text{paralelepípedo}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$$

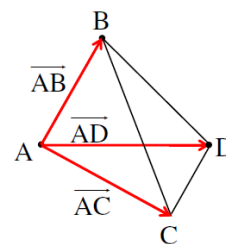
$$\left| \begin{bmatrix} \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \end{bmatrix} \right| = V_{\text{paralelepípedo}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$$

$$V_{\text{tetraedro}} = \frac{\left| \begin{bmatrix} \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \end{bmatrix} \right|}{6}$$

Además, como el paralelepípedo puede descomponerse en 6 tetraedros:



$$\text{Volumen}(ABCD) = \left| \begin{bmatrix} \vec{AB} & \vec{AC} & \vec{AD} \end{bmatrix} \right|$$



$$\text{Volumen}(ABCD) = \frac{1}{6} \left| \begin{bmatrix} \vec{AB} & \vec{AC} & \vec{AD} \end{bmatrix} \right|$$

El volumen del tetraedro de vértices: A, B, C, D (sombreado en verde) es una sexta parte del volumen del paralelepípedo determinado por los vectores  $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$

Efectivamente, ese paralelepípedo se descompone en seis tetraedros iguales.

Fíjate en la figura de al lado:

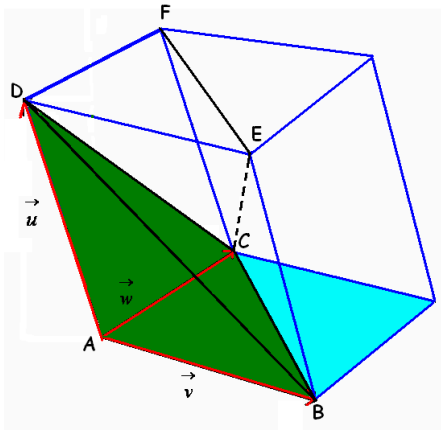
El plano BCFE lo divide en dos prismas triangulares iguales.

Cada uno de estos dos prismas triangulares se descompone en tres tetraedros iguales, así por ejemplo el prisma ABCDEF se descompone en tres tetraedros que son:

- 1) ABCD; 2) BCDE; 3) DFEC.

$$\text{Volumen}(ABCD) = \frac{1}{6} \left| \begin{bmatrix} \vec{AB} & \vec{AC} & \vec{AD} \end{bmatrix} \right|$$

Por tanto tenemos:



Actividades

Si  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  son los vectores de la base canónica de  $V^3$ , ¿cuánto vale su producto mixto?

\*\*\*\*\*

Si  $\vec{u}, \vec{v}$  y  $\vec{w}$  son tres vectores del espacio del mismo módulo, ¿cuáles son los valores máximo y mínimo absolutos de su producto mixto?

\*\*\*\*\*

Halla el volumen del paralelepípedo cuyas aristas son los vectores  $\vec{u} (2, 1, 0)$ ,  $\vec{v} (0, 1, 0)$  y  $\vec{w} (3, 2, 1)$ .

\*\*\*\*\*

Calcula el volumen del paralelepípedo que determinan tres vectores unitarios  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  sabiendo que  $\vec{e}_1$  y  $\vec{e}_2$  son ortogonales y que los ángulos que forman  $\vec{e}_3$  con  $\vec{e}_1$  y  $\vec{e}_2$  son  $45^\circ$  y  $60^\circ$ , respectivamente

\*\*\*\*\*

Calcula el volumen del paralelepípedo determinado por:  $\vec{u}(1,2,3) \quad \vec{v}(-2,1,0) \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{v} \\ u & x & v \end{pmatrix}$  Justifica por

que el resultado es:  $\left| \begin{matrix} \vec{u} & \vec{v} \\ u & x & v \end{matrix} \right|^2$

\*\*\*\*\*

Determina el valor de k para que el volumen del paralelepípedo determinado por:

$\vec{u}(3,-5,1) \quad \vec{v}(2,1,-1) \quad \vec{w} = (1,4,k)$  sea  $11 u^3$

\*\*\*\*\*

Calcula el volumen del tetraedro de vértices:

$A(3,5,7); B(1,0,-1); C(7,-1,4); D(11,4,-6)$

Solución:

$\vec{AB}(-2,-5,-8), \vec{AC}(4,-6,-3), \vec{AD}(8,-1,-13)$

$$\text{Volúmen tetraedro} = \frac{1}{6} \left| \begin{pmatrix} \vec{AB} & \vec{AC} & \vec{AD} \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} -2 & -5 & -8 \\ 4 & -6 & -3 \\ 8 & -1 & -13 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} |-642| = \frac{642}{6} = 107 u^3$$

\*\*\*\*\*

Calcula el volumen del tetraedro de vértices:

$$A(3,5,7); B(1,0,-1); C(7,-1,4); D(11,4,-6)$$

$$A(2,1,4); B(1,0,2); C(4,3,2); D(1,5,6)$$

\*\*\*\*\*

Halla el volumen del tetraedro cuyas aristas son los vectores  $\vec{u}(2, 1, 0)$ ,  $\vec{v}(0, 1, 0)$  y  $\vec{w}(3, 2, 1)$ .

\*\*\*\*\*

Halla la ecuación del plano que pasa por el punto  $P(1, 2, 3)$ , y tal que sus puntos de corte con los ejes de coordenadas forman un triángulo equilátero. Calcula el volumen del tetraedro determinado por dicho plano y los planos coordenados.

\*\*\*\*\*

Comprueba que los planos  $x + y = 0$ ,  $x + z = 0$ ,  $y + z = 0$ ,  $x + y + z = 1$  determinan un tetraedro y calcula su volumen

\*\*\*\*\*

Sea el plano  $\pi: x - 2y + 4z = 12$  y el punto  $P(2, -1, 1)$

- Calcula la distancia  $d$  entre el plano  $\pi$  y el punto  $P$ .
- Halla la ecuación de un plano paralelo a  $\pi$  y distinto del mismo, que también diste de  $P$  la misma distancia  $d$ .
- Calcula el volumen de la figura limitada por el plano  $\pi$  y los tres planos coordenados.

\*\*\*\*\*

Considera los puntos  $A(-1, k, 3)$ ,  $B(k+1, 0, 2)$ ,  $C(1, 2, 0)$  y  $D(2, 0, 1)$ .

Calcula los valores de  $k$  para los que los puntos  $A, B, C$  y  $D$  forman un tetraedro de volumen 1.

\*\*\*\*\*

- Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de corte del plano  $\pi: 2x + y + 3z - 6 = 0$  con los ejes coordenados.
- Calcula el volumen del tetraedro determinado por el plano  $\pi$  y los planos coordenados.

\*\*\*\*\*

(a) Calcula el volumen del tetraedro de vértices  $A(1, 1, 1)$ ,  $B(0, -2, 2)$ ,  $C(-1, 0, 2)$  y  $D(2, -1, 2)$ .

Sol.:  $\frac{5}{6} u^3$

(b) Determina la ecuación de la recta que pasa por  $D$  y es perpendicular al plano que contiene a los puntos  $A, B$  y  $C$ . Sol.:  $(x,y,z)=(2, -1, 2)+\lambda(2, 1, 5)$

\*\*\*\*\*

Considera los puntos  $A(2, 0, 1)$ ,  $B(-1, 1, 2)$ ,  $C(2, 2, 1)$  y  $D(3, 1, 0)$ .

(a) Calcula la ecuación del plano  $\pi$  que contiene a los puntos  $B, C$  y  $D$ . Sol.:  $\pi: x - y + 2z - 2 = 0$

(b) Halla el punto simétrico de  $A$  respecto del plano  $\pi$ . Sol.:  $A'(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3})$

(c) Determina el volumen de tetraedro que definen los puntos  $A, B, C$  y  $D$  Sol.:  $\frac{2}{3} u^3$

\*\*\*\*\*

Dados los puntos  $A(m, 0, 1)$ ,  $B(0, 1, 2)$ ,  $C(1, 2, 3)$  y  $D(7, 2, 1)$ .

(a) Halla  $m$  para que los puntos estén en un mismo plano y calcula la ecuación de dicho plano.

Sol.:  $m = -1$  ;  $x - 4y + 3z - 2 = 0$

(b) ¿Están  $B, C$  y  $D$  alineados? Sol.: No (c) Para  $m = 0$ , calcula el volumen del tetraedro  $ABCD$  Sol.:  $\frac{1}{3} u^3$

\*\*\*\*\*

Calcula el volumen del tetraedro limitado por el plano  $\pi \equiv x + 3y + 2z - 5 = 0$  y los planos coordenados.

Sol.:  $\frac{125}{36} u^3$

\*\*\*\*\*

Halla la ecuación del plano que pasa por el punto P(1, 2, 3), y tal que sus puntos de corte con los ejes de coordenadas forman un triángulo equilátero. Calcula el volumen del tetraedro determinado por dicho plano y los planos coordenados.

\*\*\*\*\*

Calcula la ecuación del plano determinado por los puntos A(0, 2, -2), B(3, 2, 1) y C(2, 3, 2) y el volumen del tetraedro que limita con los ejes coordenados.

\*\*\*\*\*

Comprueba que los planos  $x + y = 0$ ,  $x + z = 0$ ,  $y + z = 0$ ,  $x + y + z = 1$  determinan un tetraedro y calcula su volumen.

\*\*\*\*\*

Halla el volumen del tetraedro de vértices el punto (1, 1, 1) y los puntos en que el plano  $\pi: 2x + 3y + z - 12 = 0$  corta a los ejes coordenados.

\*\*\*\*\*

Halla el volumen del tetraedro determinado por los planos coordenados y el plano  $\pi: x + y - 2z = 3$

\*\*\*\*\*

Halla el volumen del tetraedro que forman los planos  $y = 0$ ,  $z = 0$ ,  $x - y = 0$ ,  $3x + 2y + z = 15$

\*\*\*\*\*

Considera los vectores  $\vec{u} = (1, -1, 3)$ ,  $\vec{v} = (1, 0, -1)$  y  $\vec{w} = (\lambda, 1, 0)$ .

a) Calcula el valor de  $\lambda$  que hace que  $\vec{u}$  y  $\vec{w}$  sean ortogonales. Sol.:  $\lambda = 1$

b) Halla el valor de  $\lambda$  que hace que  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  sean linealmente dependientes. Sol.:  $\lambda = -4$

c) Para  $\lambda = 1$  escribe el vector  $\vec{r} = (3, 0, 2)$  como combinación lineal de  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  y halla el

volumen del tetraedro formado por los vectores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$ . Sol.:  $\vec{r} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ ;  $V = \frac{5}{6} u^3$

\*\*\*\*\*

2013-11 Considera el plano  $\pi$  de ecuación  $2x + y + 3z - 6 = 0$ .

Calcula el volumen del tetraedro determinado por el plano  $\pi$  y los planos coordenados.

\*\*\*\*\*

2017-3 Sean los vectores  $\vec{u} = (1, 0, 1)$ ,  $\vec{v} = (0, 2, 1)$  y  $\vec{w} = (m, 1, n)$

Para  $n = 1$ , halla los valores de  $m$  para que el tetraedro determinado  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  tenga volumen 10 unidades cúbicas.

\*\*\*\*\*

2015-11 Sean los planos  $\pi: x + 3y + 2z - 5 = 0$

Calcula el volumen del tetraedro limitado por  $\pi$  y los planos coordenados.

Resolución

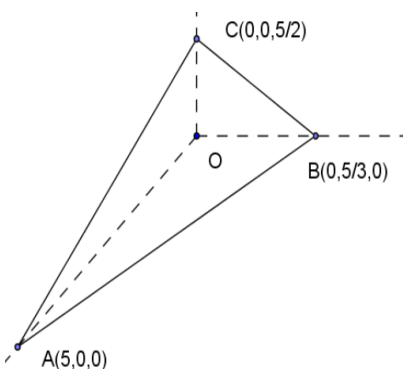
Calculamos los puntos de corte del plano  $\pi : x + 3y + 2z - 5 = 0$

con los ejes de coordenadas :

$$\text{eje } X : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad A = \pi \cap \text{ eje } X \rightarrow \lambda + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 5 = 0 \rightarrow \lambda = 5 \Rightarrow A(5, 0, 0)$$

$$\text{eje } Y : \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases} \quad B = \pi \cap \text{ eje } Y \rightarrow 0 + 3\lambda + 2 \cdot 0 - 5 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{5}{3} \Rightarrow B\left(0, \frac{5}{3}, 0\right)$$

$$\text{eje } Z : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases} \quad C = \pi \cap \text{ eje } Z \rightarrow 0 + 3 \cdot 0 + 2\lambda - 5 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{5}{2} \Rightarrow C\left(0, 0, \frac{5}{2}\right)$$



$$\text{Volumen del tetraedro } OABC = \frac{1}{6} \left| \begin{bmatrix} \overrightarrow{OA} & \overrightarrow{OB} & \overrightarrow{OC} \end{bmatrix} \right| = \frac{1}{6} \left| \det \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5/3 & 0 \\ 0 & 0 & 5/2 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{6} \frac{125}{6} = \frac{125}{36} u^3$$

\*\*\*\*\*

2014-9 Considera los vectores  $\vec{u} = (1, -1, 0)$ ,  $\vec{v} = (0, 1, 2)$  y  $\vec{w} = (1 + \alpha, 2\alpha, 2 - 3\alpha)$ . Halla los valores de  $\alpha$  sabiendo que el volumen del tetraedro que tiene por aristas a los vectores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  es  $\frac{1}{6}$ .

\*\*\*\*\*

2013-11 Considera el plano  $\pi$  de ecuación  $2x + y + 3z - 6 = 0$ .  
Calcula el volumen del tetraedro determinado por el plano  $\pi$  y los planos coordenados.

\*\*\*\*\*

2011-7 Considera los puntos  $A(-1, k, 3)$ ,  $B(k+1, 0, 2)$ ,  $C(1, 2, 0)$  y  $D(2, 0, 1)$ .  
Calcula los valores de  $k$  para los que los puntos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  forman un tetraedro de volumen 1.

\*\*\*\*\*

2010-6 Considera los puntos  $A(1, 1, 1)$ ,  $B(0, -2, 2)$ ,  $C(-1, 0, 2)$  y  $D(2, -1, 2)$ .  
Calcula el volumen del tetraedro de vértices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$ .

\*\*\*\*\*

2000-6 Calcula el volumen de un cubo sabiendo que dos de sus caras están, respectivamente, en los planos  $2x - 2y + z - 1 = 0$  y  $2x - 2y + z - 5 = 0$ .

\*\*\*\*\*

Dos caras de un cubo se encuentran en los planos  $\pi_1 : 2x - 2y + z - 1 = 0$  y  $\pi_2 : 2x - 2y + z + 5 = 0$ .  
Calcular el volumen del cubo.

\*\*\*\*\*

Hallar el volumen del tetraedro cuyos vértices son el punto  $V(1, 1, 1)$  y los puntos de corte del plano  $\pi: 2x + 3y + z - 12 = 0$ , con los ejes de coordenadas.

\*\*\*\*\*

Considera los puntos  $A(-1, k, 3)$ ,  $B(k+1, 0, 2)$ ,  $C(1, 2, 0)$  y  $D(2, 0, 1)$ .

Calcula los valores de  $k$  para los que los puntos  $A, B, C$  y  $D$  forman un tetraedro de volumen 1.

\*\*\*\*\*

a) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de corte del plano

$\pi: 2x + y + 3z - 6 = 0$  con los ejes coordenados.

b) Calcula el volumen del tetraedro determinado por el plano  $\pi$  y los planos coordenados.

\*\*\*\*\*

Calcula el volumen del tetraedro de vértices  $A(1, 1, 1)$ ,  $B(0, -2, 2)$ ,  $C(-1, 0, 2)$  y  $D(2, -1, 2)$ .

Sol.:  $\frac{5}{6} u^3$

Determina la ecuación de la recta que pasa por  $D$  y es perpendicular al plano que contiene a los puntos  $A, B$  y  $C$ . Sol.:  $(x, y, z) = (2, -1, 2) + \lambda(2, 1, 5)$

\*\*\*\*\*

Considera los puntos  $A(2, 0, 1)$ ,  $B(-1, 1, 2)$ ,  $C(2, 2, 1)$  y  $D(3, 1, 0)$ .

(a) Calcula la ecuación del plano  $\pi$  que contiene a los puntos  $B, C$  y  $D$ . Sol.:  $\pi: x - y + 2z - 2 = 0$

(b) Halla el punto simétrico de  $A$  respecto del plano  $\pi$ . Sol.:  $A'(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3})$

(c) Determina el volumen de tetraedro que definen los puntos  $A, B, C$  y  $D$ . Sol.:  $\frac{2}{3} u^3$

\*\*\*\*\*

Calcúlese el volumen del tetraedro de vértices  $A(1,1,1)$ ,  $B(1,2,3)$ ,  $C(2,3,1)$ ,

\*\*\*\*\*

Dados los puntos  $A(m, 0, 1)$ ,  $B(0, 1, 2)$ ,  $C(1, 2, 3)$  y  $D(7, 2, 1)$ .

(a) Halla  $m$  para que los puntos estén en un mismo plano y calcula la ecuación de dicho plano.

Sol.:  $m = -1$  ;  $x - 4y + 3z - 2 = 0$

(b) ¿Están  $B, C$  y  $D$  alineados? Sol.: No (c) Para  $m = 0$ , calcula el volumen del tetraedro  $ABCD$ . Sol.:  $\frac{1}{3} u^3$

\*\*\*\*\*

Calcula el volumen del tetraedro limitado por el plano  $\pi \equiv x + 3y + 2z - 5 = 0$  y los planos coordenados.

Sol.:  $\frac{125}{36} u^3$

\*\*\*\*\*

Considera los vectores  $\vec{u} = (1, -1, 3)$ ,  $\vec{v} = (1, 0, -1)$  y  $\vec{w} = (\lambda, 1, 0)$ .

a) Calcula el valor de  $\lambda$  que hace que  $\vec{u}$  y  $\vec{w}$  sean ortogonales. Sol.:  $\lambda = 1$

b) Halla el valor de  $\lambda$  que hace que  $\vec{u}, \vec{v}$  y  $\vec{w}$  sean linealmente dependientes. Sol.:  $\lambda = -4$

c) Para  $\lambda = 1$  escribe el vector  $\vec{r} = (3, 0, 2)$  como combinación lineal de  $\vec{u}, \vec{v}$  y  $\vec{w}$  y halla el

volumen del tetraedro formado por los vectores  $\vec{u}, \vec{v}$  y  $\vec{w}$ . Sol.:  $\vec{r} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ ;  $V = \frac{5}{6} u^3$

\*\*\*\*\*

Sea el plano  $\pi: x - 2y + 4z = 12$  y el punto  $P(2, -1, 1)$

a) Calcula la distancia  $d$  entre el plano  $\pi$  y el punto  $P$ .

b) Halla la ecuación de un plano paralelo a  $\pi$  y distinto del mismo, que también diste de  $P$  la misma distancia  $d$ .

c) Calcula el volumen de la figura limitada por el plano  $\pi$  y los tres planos coordenados.

Solución:

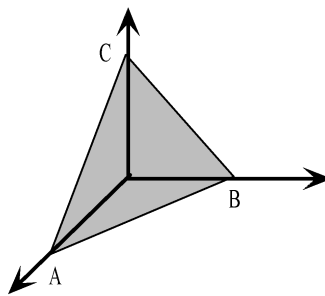
a)  $\frac{4}{\sqrt{21}}$

b)  $\pi' : x - 2y + 4z - 4 = 0$

c) La coordenadas de los vértices

$A(12,0,0)$ ,  $B(0,-6,0)$  y  $C(0,0,3)$

Volumen =  $36 u^2$



\*\*\*\*\*

Sean las rectas  $r : \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ x + y - z - 1 = 0 \end{cases}$  y  $s : \begin{cases} y + 1 = 0 \\ x - 2z + 3 = 0 \end{cases}$

Determina la distancia de la recta  $s$  al plano  $\pi$  que contiene a  $r$  y es paralelo a  $s$ .

Solución:  $\pi(A; n_\pi = d_r \times d_s)$ ;  $n_\pi = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1, 3, -2) \rightarrow \pi: 1(x-0) + 3(y-3) - 2(z-2) = 0 \rightarrow \pi: x + 3y - 2z - 5 = 0$

$$d(s, \pi) = d(B, \pi) = \frac{|-3 + 3(-1) - 2(0) - 5|}{\sqrt{1^2 + 3^2 + (-2)^2}} = \frac{11}{\sqrt{14}} = \frac{11\sqrt{14}}{14} u$$

\*\*\*\*\*

VARIOS

Calcula la distancia entre el plano de ecuación  $\pi = 4x + 2y - 5z = 20$  y el que contiene a los puntos  $A(1, 0, -1)$ ,  $B(-2, 2, 1)$  y  $O$ , origen de coordenadas. Calcula el área del triángulo que forma  $\pi$  con los ejes.

\*\*\*\*\*

Encuentra las ecuaciones de los planos paralelos al plano  $\pi \equiv 4x - 4y + 2z = 1$  que disten de éste una unidad de longitud.

Calcula el volumen del tetraedro que forma el plano  $\pi$  con los ejes de coordenadas.

\*\*\*\*\*

Dada la recta de ecuaciones  $\frac{x}{2} = 1 - y = \frac{2z + 2}{6}$  y el plano de ecuación  $x + 3y - 3z = -3$ .

Calcula:

El plano que contiene a la recta y es perpendicular al plano.

El volumen del tetraedro determinado por el plano  $p$  y los planos coordenados.

\*\*\*\*\*