

Лекція 5

$$s(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{t_1}^{t_2} (s(x) e^{-jn\omega_1 x} dx) e^{jn\omega_1 t} = \frac{\omega_1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{t_1}^{t_2} (s(x) e^{-jn\omega_1 x} dx) e^{jn\omega_1 t} \quad (2.17)$$

Тому у виразі (2.17) можна замінити ω_1 на $d\omega$ та $n\omega_1$ на поточну частоту ω , а операцію складання операцією інтегрування.

Таким чином, отримаємо подвійний інтеграл Фур'є (ω вносимо під знак диференціалу)

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} \left[\int_{t_1}^{t_2} s(x) e^{-j\omega x} dx \right] d\omega \quad (2.18)$$

Внутрішній інтеграл, що є функцією ω ,

$$S(\omega) = \int_{t_1}^{t_2} s(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2.19)$$

Називається **спектральною щільністю** або **спектральною характеристикою функції** $s(t)$. Ця характеристика є комплексною величиною, тобто несе інформацію як про амплітуду, так і про фазу сигналу. Це є дуже важливим моментом з практичної точки зору.

В загальному випадку, коли межі t_1 та t_2 не відомі, спектральна щільність (СЩ) має вигляд

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2.20)$$

Після підстановки (2.20) у (2.18) отримаємо

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (2.21)$$

Вираз (2.20) та (2.21) називаються відповідно прямим та зворотним **перетворенням Фур'є (ППФ та ЗПФ)**.

Спектральна щільність володіє тими ж властивостями, що й коефіцієнти ряду Фур'є. Тобто можна записати СЩ у вигляді комплексного числа

$$S(\omega) = A(\omega) - jB(\omega) = S(\omega) e^{j\theta(\omega)}, \quad (2.22)$$

де

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cos(\omega t) dt, B(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \sin(\omega t) dt. \quad (2.23)$$

Модуль и аргумент СЩ визначаються так

$$S(\omega) = \sqrt{[A(\omega)]^2 + [B(\omega)]^2}, \quad (2.24)$$

$$\theta(\omega) = -\arctg \left[\frac{B(\omega)}{A(\omega)} \right]. \quad (2.25)$$

Перший з цих виразів можна розглядати як **амплітудно-частотну (АЧХ)** та **фазо-частотну (ФЧХ)** характеристики безперервного спектру неперіодичного сигналу $s(t)$. При цьому $S(\omega)$ – парна, а $\theta(\omega)$ – непарна функція.

В тригонометричній формі

$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{j\omega t} e^{j\theta} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{j(\omega t + \theta)} d\omega = \\ &= \left| e^{j(\omega t + \theta)} = \cos(\omega t + \theta) + j \sin(\omega t + \theta) \right| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) \cos(\omega t + \theta) d\omega + j \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) \sin(\omega t + \theta) d\omega, \\ e^{j\omega t} e^{j\theta} &= \left| e^{\alpha} e^{\beta} = e^{\alpha + \beta} \right| = e^{j\omega t + j\theta} = e^{j(\omega t + \theta)}. \end{aligned}$$

Відмітимо, що при $\omega = 0$ вираз (2.19) має вигляд:

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \int_{t_1}^{t_2} s(t) e^{-j\omega t} dt, \\ S(0) &= \int_{t_1}^{t_2} s(t) dt \end{aligned} \quad (2.26)$$

площа під кривою $s(t)$ (враховано, що $e^{-j\omega t} = e^{-j0t} = e^0 = 1$).

Тобто, для будь-якого сигналу $s(t)$ СЩ $S(\omega)$ на нульовій частоті дорівнює «площі сигналу». Це правило корисне для швидкого виявлення структури спектру деяких сигналів.

Співвідношення між спектрами одиночного імпульсу та періодичної послідовності імпульсів

Нехай задано імпульс $s_1(t)$ та відповідна йому спектральна щільність $S_1(\omega) = S_1(2\pi f)$ (рис. 2.5).

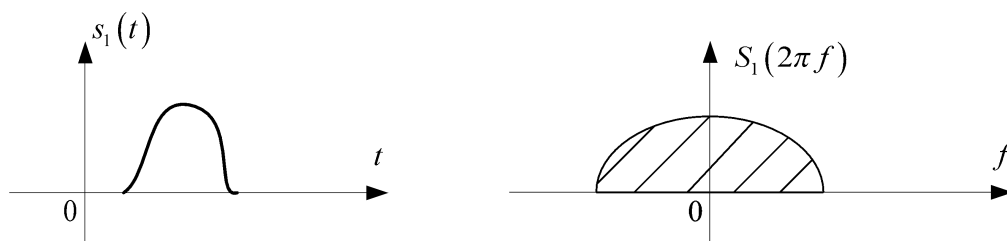


Рисунок 2.5

Якщо у нас не один імпульс, а послідовність, яка періодично повторюється, та їй відповідає лінійчатий дискретний спектр, отриманий при розкладанні в ряд Фур'є (рис. 2.6).

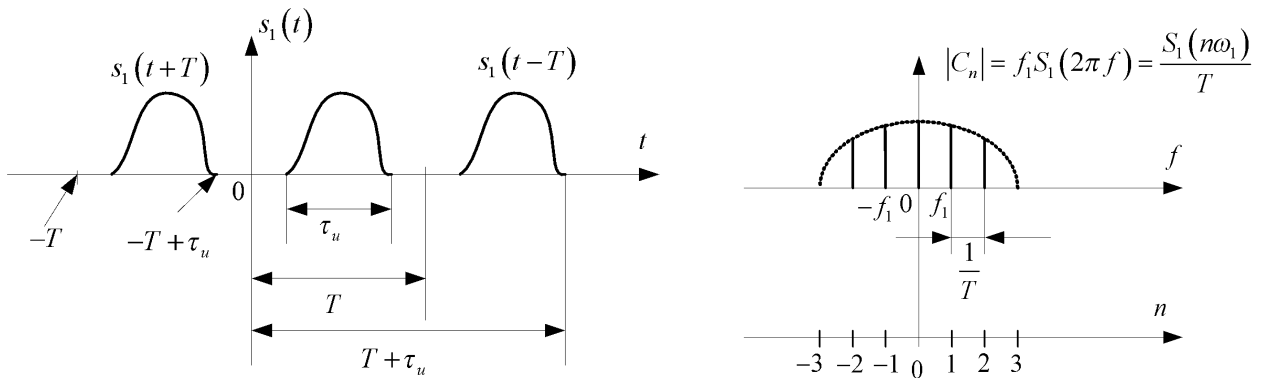


Рисунок 2.6

Розглянемо деяку n -ю гармоніку. Коефіцієнт ряду Фур'є n -тої гармоніки дорівнює

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} s_1(t) e^{-jn\omega_1 t} dt, \quad (2.27)$$

де $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$, t_1 – початок імпульсу, t_2 – його кінець.

Спектральна щільність одиночного імпульсу на частоті $\omega = n\omega_1$ дорівнює

$$S(\omega) = \int_{t_1}^{t_2} s_1(t) e^{-j\omega t} dt, \\ S_1(\omega = n\omega_1) = \int_{t_1}^{t_2} s_1(t) e^{-jn\omega_1 t} dt. \quad (2.28)$$

Порівняємо (2.27) та (2.28), різниця між ними у множнику $\frac{1}{T}$. Тобто можна записати

$$C_n = \frac{S_1(n\omega_1)}{T} = f_1 S_1(n\omega_1).$$

Тут враховано, що $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$, $\omega_1 = 2\pi f_1$, $f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{2\pi}{T} \frac{1}{2\pi} = \frac{1}{T}$.

Відповідно, комплексна амплітуда n -тої гармоніки

$$A_n = 2C_n = \frac{2S_1(n\omega_1)}{T} = 2f_1 S_1(n\omega_1).$$

Отже, модуль спектральної щільності одиночного імпульсу та огинаюча лінійчатого спектру періодичної послідовності, отриманої шляхом повторення заданого імпульсу, співпадають за формою та відрізняються тільки масштабом.

Із збільшенням T спектральні лінії зближуються та коефіцієнти C_n зменшуються, але так, що співвідношення $\frac{|C_n|}{f_1}$ лишається незмінним. В межі при $T \rightarrow \infty$, приходимо до одиночного імпульсу із спектральною щільністю

$$S_1(\omega) = \lim_{f_1 \rightarrow 0} \left(\frac{C_n}{f_1} \right).$$

Таким чином може бути розв'язана задача: знаючи спектр одиночного імпульсу, отримати спектр послідовності (на частотах, кратних f_1 будуть знаходитися гармоніки з амплітудами $C_n = \frac{S_1(n\omega_1)}{T}$), та навпаки.

Основні властивості перетворення Фур'є:

1 Лінійність

Якщо ми маємо сигнали $s_1(t), s_2(t), \dots$, причому кожному з них відповідають спектри $S_1(\omega), S_2(\omega), \dots$, то сумарному сигналу $s(t) = s_1(t) + s_2(t) + \dots$ відповідає спектр виду

$$S(\omega) = S_1(\omega) + S_2(\omega) + \dots \quad (2.29)$$