Лекція 5

$$s(t)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{t_1}^{t_2}\left(s(x)e^{-jn\omega_1 x}dx\right)e^{jn\omega_1 t}=\frac{\omega_1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{t_1}^{t_2}\left(s(x)e^{-jn\omega_1 x}dx\right)e^{jn\omega_1 t} \quad . \qquad (2.17)$$

Тому у виразі (2.17) можна замінити ω_1 на $d\omega$ та $n\omega_1$ на поточну частоту ω, а операцію складання операцією інтегрування.

Таким чином, отримаємо подвійний інтеграл Фур'є (ω вносимо під знак диференціалу)

$$s(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j\omega t}\left[\int_{t_1}^{t_2}s(x)e^{-j\omega x}dx\right]d\omega \quad . \qquad (2.18)$$

Внутрішній інтеграл, що є функцією ω,

$$\dot{S}(\omega)=\int_{t_1}^{t_2}s(t)e^{-j\omega t}dt \quad , \qquad (2.19)$$

Називається **спектральною щільністю** або **спектральною характеристикою функції** $s(t)$. Ця характеристика є комплексною величиною, тобто несе інформацію як про амплітуду, так і про фазу сигналу. Це є дуже важливим моментом з практичної точки зору.

В загальному випадку, коли межі t_1 та t_2 не відомі, спектральна щільність (СЩ) має вигляд

$$\dot{S}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}s(t)e^{-j\omega t}dt \quad . \qquad (2.20)$$

Після підстановки (2.20) у (2.18) отримаємо

$$s(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\dot{S}(\omega)e^{j\omega t}d\omega \quad . \qquad (2.21)$$

Вираз (2.20) та (2.21) називаються відповідно прямим та зворотним **перетворенням Фур'є (ППФ та ЗПФ).**

Спектральна щільність володіє тими є властивостями, що й коефіцієнти ряду Фур'є. Тобто можна записати СЩ у вигляді комплексного числа

$$\dot{S}(\omega)=A(\omega)-jB(\omega)=S(\omega)e^{j\theta(\omega)} \quad , \qquad (2.22)$$

де

$$A(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}s(t)\cos(\omega t)dt, B(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}s(t)\sin(\omega t)dt. \qquad (2.23)$$

Модуль и аргумент СЩ визначаються так

$$S(\omega)=\sqrt{\left[A(\omega)\right]^2+\left[B(\omega)\right]^2}\,, \tag{2.24}$$

$$\theta(\omega)=-arctg\left[\frac{B(\omega)}{A(\omega)}\right]. \tag{2.25}$$

Перший з цих виразів можна розглядати як **амплітудно-частотну (АЧХ)** та **фазо-частотну (ФЧХ)** характеристики безперервного спектру неперіодичного сигналу $s(t)$. При цьому $S(\omega)$ – парна, а $\theta(\omega)$ – непарна функція.

В тригонометричній формі

$$s(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\dot{S}(\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S(\omega)e^{j\omega t}e^{j\theta}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S(\omega)e^{j(\omega t+\theta)}d\omega=$$

$$=\left|e^{j(\omega t+\theta)}=\cos(\omega t+\theta)+j\sin(\omega t+\theta)\right|=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S(\omega)\cos(\omega t+\theta)d\omega+j\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S(\omega)\sin(\omega t+\theta)d\omega\,,$$

$$e^{j\omega t}e^{j\theta}=\left|e^{\alpha}e^{\beta}=e^{\alpha+\beta}\right|=e^{j\omega t+j\theta}=e^{j(\omega t+\theta)}.$$

Відмітимо, що при $\omega=0$ вираз (2.19) має вигляд:

$$\dot{S}(\omega)=\int_{t_1}^{t_2}s(t)e^{-j\omega t}dt\,,$$

$$\dot{S}(0)=\int_{t_1}^{t_2}s(t)dt \quad – \tag{2.26}$$

площа під кривою $s(t)$ (враховано, що $e^{-j\omega t}=e^{-j0t}=e^0=1$).

Тобто, для будь-якого сигналу $s(t)$ СЩ $\dot{S}(\omega)$ на нульовій частоті дорівнює «площі сигналу». Це правило корисне для швидкого виявлення структури спектру деяких сигналів.

Співвідношення між спектрами одиночного імпульсу та періодичної послідовності імпульсів

Нехай задано імпульс $s_1(t)$ та відповідна йому спектральна щільність $\dot{S}_1(\omega)=\dot{S}_1(2\pi f)$ (рис. 2.5).

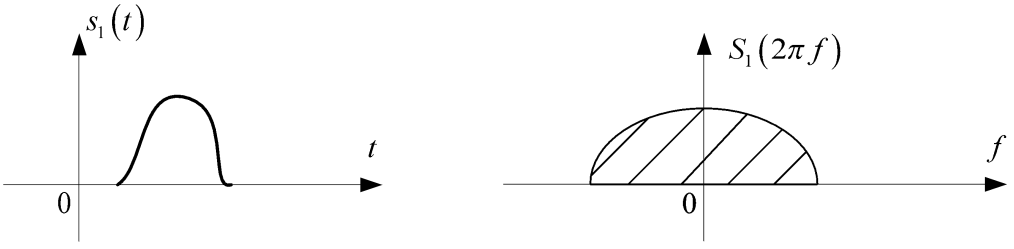


Рисунок 2.5

Якщо у нас не один імпульс, а послідовність, яка періодично повторюється, та їй відповідає лінійчатий дискретний спектр, отриманий при розкладанні в ряд Фур'є (рис. 2.6).

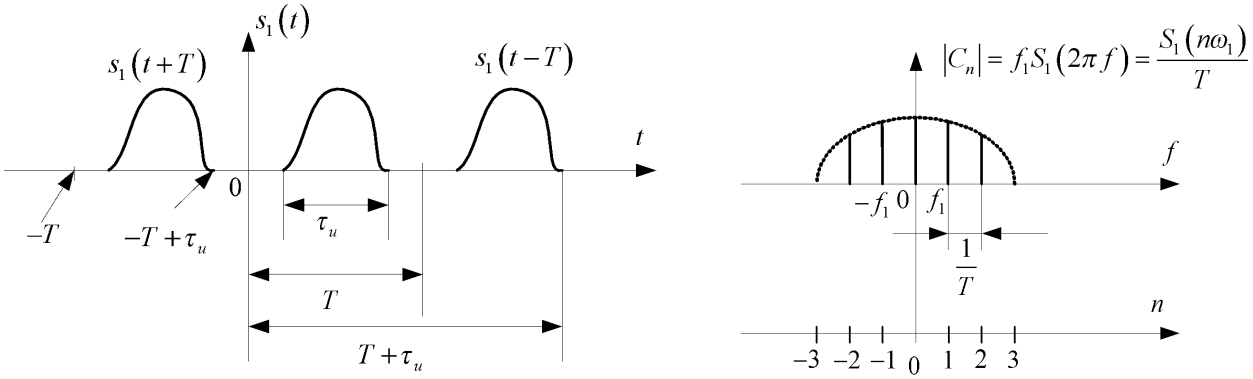


Рисунок 2.6

Розглянемо деяку n-ю гармоніку. Коефіцієнт ряду Фур'є n-тої гармоніки дорівнює

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_2} s_1(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \quad , \qquad (2.27)$$

де $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$, t_1 – початок імпульсу, t_2 – його кінець.

Спектральна щільність одиночного імпульсу на частоті $\omega = n\omega_1$ дорівнює

$$\dot{S}(\omega) = \int_{t_1}^{t_2} s_1(t) e^{-j\omega t} dt \quad ,$$

$$\dot{S}_1(\omega = n\omega_1) = \int_{t_1}^{t_2} s_1(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \quad . \qquad (2.28)$$

Порівняємо (2.27) та (2.28), різниця між ними у множнику $\frac{1}{T}$. Тобто можна записати

$$C_n = \frac{S_1(n\omega_1)}{T} = f_1 S_1(n\omega_1) \quad .$$

Тут враховано, що $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}, \omega_1 = 2\pi f_1, f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{2\pi}{T}\frac{1}{2\pi} = \frac{1}{T}$.

Відповідно, комплексна амплітуда n-тої гармоніки

$$A_n = 2C_n = \frac{2S_1(n\omega_1)}{T} = 2f_1 S_1(n\omega_1) \quad .$$

Отже, модуль спектральної щільності одиночного імпульсу та огинаюча лінійчатого спектру періодичної послідовності, отриманої шляхом повторення заданого імпульсу, співпадають за формою та відрізняються тільки масштабом.

Із збільшенням T спектральні лінії зближуються та коефіцієнти C_n зменшуються, але так, що співвідношення $\frac{|C_n|}{f_1}$ лишається незмінним. В межі при $T \to \infty$, приходимо до одиночного імпульсу із спектральною щільністю

$$S_1(\omega) = \lim_{f_1 \to 0} \left(\frac{C_n}{f_1} \right).$$

Таким чином може бути розв'язана задача: знаючи спектр одиночного імпульсу, отримати спектр послідовності (на частотах, кратних f_1 будуть знаходитися гармоніки з амплітудами $C_n = \frac{S_1(n\omega_1)}{T}$), та навпаки.

Основні властивості перетворення Фур'є:

1 Лінійність

Якщо ми маємо сигнали $s_1(t), s_2(t), \ldots$, причому кожному з них відповідають спектри $\dot{S}_1(\omega), \dot{S}_2(\omega), \ldots$, то сумарному сигналу $s(t) = s_1(t) + s_2(t) + \ldots$ відповідає спектр виду

$$\dot{S}(\omega) = \dot{S}_1(\omega) + \dot{S}_2(\omega) + \ldots . \qquad (2.29)$$