УТВЕРЖДАЮ
Первый заместитель начальника управления образования Могилёвского облисполкома
______________ О.В.Стельмашок
«_____» ноября 2013 г.

# ЗАДАНИЯ
## для проведения второго этапа республиканской олимпиады по учебному предмету «Математика»

Дата проведения: 30 ноября 2013 г.
Время выполнения заданий: 10.00 – 14.00

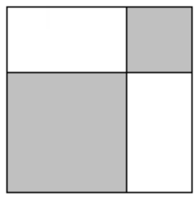
## 8 класс

**1**. В чемпионате школы по футболу участвовали команды 8«А», 8«Б», 8«В», 8«Г», 8«Д» и 8 «Е» классов. Каждая команда сыграла со всеми остальными по одному матчу. За победу команде начислялось 3 очка, за ничью начислялось 1 очко, за поражение – 0 очков. По окончании чемпионата турнирная таблица имела следующий вид:

| *Место* | *Класс* | *Количество очков* |
|---|---|---|
| 1 | 8А | 11 |
| 2 | 8В | 9 |
| 3 | 8Б | 7 |
| 4 | 8Е | 6 |
| 5 | 8Д | 3 |
| 6 | 8Г | 1 |

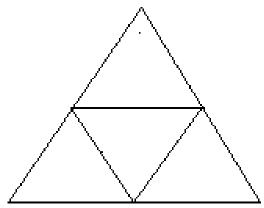
Сколько матчей турнира закончилось вничью?

**2**. Через точку внутри квадрата провели прямые, параллельные сторонам квадрата. В результате исходный квадрат оказался разбитым на два квадрата (на рисунке они выделены серым цветом) и два прямоугольника, не являющиеся квадратами (на рисунке – белые). Сравнить суммы площадей серых квадратов и белых прямоугольников.



**3**. Найти такие различные натуральные числа $a$ и $b$, чтобы $3a^3 + 2b^3 + 2a^2b + 3ab^2 + 6a^2 + 6b^2 = 2013$.

**4.** Из картона вырезали правильный треугольник. Середины сторон этого треугольника соединили отрезками. В результате треугольник оказался разбит на 4 правильных треугольника меньшего размера. Имеются краски трех различных цветов. Сколькими способами можно раскрасить картонный треугольник при помощи данных красок так, чтобы выполнялись условия:



1) каждый «маленький» треугольник был окрашен в один цвет;
2) любые два «маленьких» треугольника, имеющие общую сторону, должны быть окрашены в разные цвета.

Различными считаются раскраски, которые не совмещаются при вращении треугольника.

*Замечание.* При раскраске не обязательно использовать краски всех трех цветов.

**5**. В 8«А» классе 23 человека. Некоторые ученики дружат между собой. По исследованию школьного психолога оказалось, что староста класса Надя дружит со всеми своими одноклассниками, ее лучшие подруги Ангелина, Лера и Катя имеют по 10 друзей среди одноклассников, а у каждого из остальных учеников класса имеется 1, 3, 5 или 7 друзей среди одноклассников. Директор-математик, ознакомившись с этими результатами, сказал, что психолог ошибся. Прав ли директор? (Считаем, что если А дружит с Б, то Б дружит с А).

---

Пользоваться калькулятором не разрешается

Математика

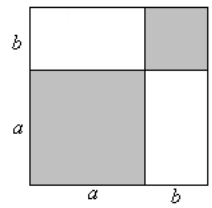
**8 класс. Решения.**

**1.** ***Решение.***

Подсчитаем, сколько всего матчей было сыграно на турнире. Каждая команда сыграла по 5 матчей. Всего матчей было $\frac{6\cdot 5}{2}=15$ (делим на 2, поскольку каждый матч подсчитывается дважды: если играли команды *А* и *Б*, то эта игра идет в зачет каждой из этих команд). В каждом матче разыгрывалось 3 очка (если игра завершилась победой одной из команд) или 2 очка (если игра завершилась вничью). Если бы все игры закончились победой одной из команд, то общее количество очков, набранных командами, было бы равно $3\cdot 15=45$. Каждая игра вничью вычитает из этого числа единицу. Все команды набрали вместе 11+9+7+6+3+1=37 очков. Тогда вничью закончились 45 – 37 = 8 матчей.

*Ответ*: 8 матчей.

**2.** ***Решение.***




Обозначим стороны квадратов через *a* и *b*.

Поскольку белые прямоугольники не являются квадратами, то $a \neq b$.

Тогда сумма площадей квадратов $S_1 = a^2 + b^2$.

Сумма площадей прямоугольников $S_2 = ab + ab = 2ab$.

Найдем разность $S_1 - S_2 = a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2 \geq 0$. Но так как $a \neq b$, то неравенство будет строгим: $S_1 - S_2 = (a-b)^2 > 0$, отсюда $S_1 > S_2$.

*Ответ:* сумма площадей квадратов больше.

**3**. ***Решение.*** Выполним преобразования:

$$3a^3 + 2b^3 + 2a^2b + 3ab^2 + 6a^2 + 6b^2 = 2013$$

$$3a(a^2+b^2) + 2b(a^2+b^2) + 6(a^2+b^2) = 2013$$

$$(a^2+b^2)(3a+2b+6) = 2013$$

Так как *a* и *b* – различные натуральные числа, то $a^2+b^2 \geq 5$, $3a+2b+6 \geq 13$. Рассмотрим способы представления числа 2013 в виде произведения двух множителей, каждый из которых больше 1. Разложим 2013 на простые множители: $2013 = 3\cdot 11\cdot 61$. Тогда возможны следующие варианты:

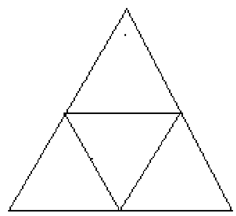
$$\begin{cases} a^2+b^2=11 \\ 3a+2b+6=183 \end{cases}, \quad \begin{cases} a^2+b^2=33 \\ 3a+2b+6=61 \end{cases}, \quad \begin{cases} a^2+b^2=61 \\ 3a+2b+6=33 \end{cases}.$$

Путем небольшого перебора получаем, что решения в натуральных числах имеет лишь третья система: *a*=5, *b*=6.

***Ответ:*** *a*=5, *b*=6.

**4.** ***Решение.***

Центральный треугольник можно закрасить тремя способами. При каждом таком способе существует два способа покраски угловых треугольников в один цвет (одной из двух оставшихся красок) и два способа покраски угловых треугольников в два цвета (два



треугольника покрасить одной краской и один другой). Итого имеем 3·(2+2)=12 способов.
***Ответ*:** 12 способов.

**5**. ***Решение.***
***1 способ.***

Обозначим учеников точками на бумаге. Каждые две точки, которые соответствуют двум друзьям, соединим отрезком. В результате имеем 23 точки. Из точки, соответствующей Наде, выходит 22 отрезка, из точек, соответствующих Ангелине, Лере и Кате по 10 отрезков, из точек, соответствующих остальным ученикам, выходит 1, 3, 5 или 7 отрезков. Подсчитаем общее количество отрезков. Для этого надо сложить количества отрезков, выходящих из каждой точки и полученную сумму разделить на 2 (каждый отрезок соединяет две точки и, следовательно, подсчитывается дважды). Следовательно, общая сумма количеств отрезков, выходящих из всех точек, должна быть числом четным. Однако в указанной сумме одно слагаемое равно 22, три слагаемых равны 10, а каждое из остальных слагаемых равно 1, 3, 5 или 7. Таким образом, в данной сумме будет 4 четных и 19 нечетных слагаемых, и эта сумма будет нечетной. Получаем противоречие. Значит, описанная ситуация невозможна и директор прав.

***Ответ*:** директор прав.

***2 способ***.

Задачу легко решить, используя простейшие знания по теории графов. Пусть ученики – это вершины графа, отрезки, соответствующие дружбе двух учеников – ребра графа. Из условия следует, что степень одной вершины равна 22, три вершины имеют степень 10, и 19 вершин имеют степени 1, 3, 5 или 7 (т.е. нечетные числа). Однако известно, что в любом графе должно быть четное количество нечетных вершин. Получили противоречие.

***Ответ:*** директор прав.