

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ 2 15002 1.3 – 1.4

Δίνονται τα σημεία $A(0, 5)$ και $\Delta(4, 5)$ και τα διανύσματα $\vec{AB} = (3, -3)$ και $\vec{AG} = (3, 1)$.

α) Να αποδείξετε ότι το σημείο Γ έχει συντεταγμένες $\Gamma(3, 6)$.

(Μονάδες 11)

β)

i. Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\Gamma\Delta}$.

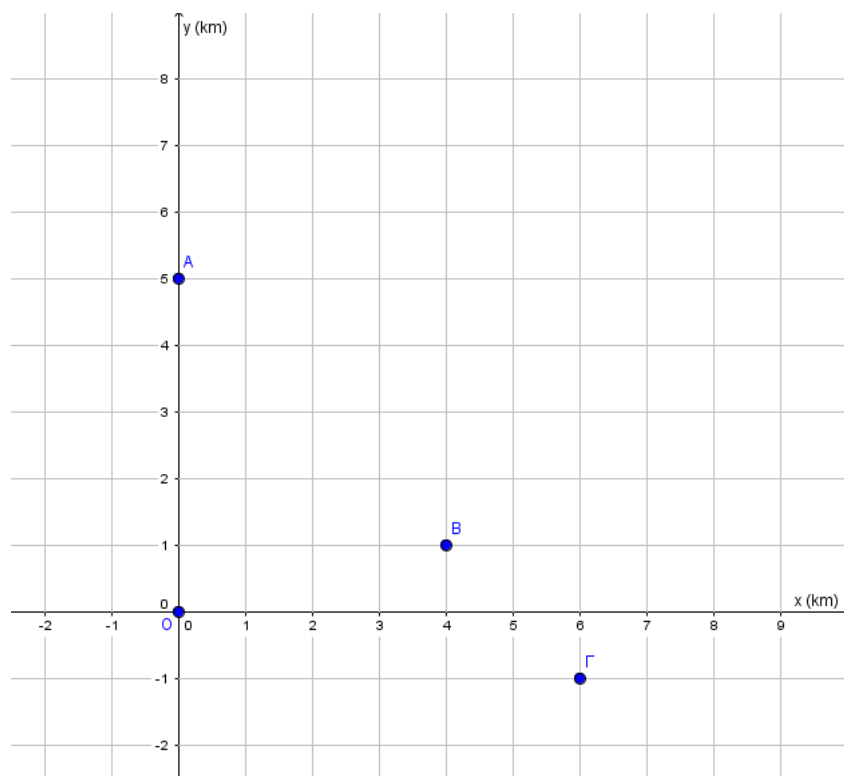
(Μονάδες 6)

ii. Να αποδείξετε ότι $\vec{AB} // \vec{\Gamma\Delta}$.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2 15043 1.4

Ένα γραφείο μελετών έχει αναλάβει την αναμόρφωση μιας οικιστικής περιοχής, η οποία αποτυπώνεται σε τοπογραφικό σχέδιο με ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων. Τα σημεία $A(0, 5)$, $B(4, 1)$ και $\Gamma(6, -1)$ παριστάνουν τη θέση τριών οικισμών στο χάρτη.



α)

i. Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{AB}$ και $\vec{B\Gamma}$.

(Μονάδες 06)

ii. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά και ως εκ τούτου υπάρχει η δυνατότητα να σχεδιασθεί ένας ευθύγραμμος δρόμος που να συνδέει τους τρεις οικισμούς.

(Μονάδες 07)

β) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του οικισμού B από τον οικισμό A είναι διπλάσια από την απόσταση του οικισμού B από τον οικισμό Γ.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2 15252 1.4 – 1.5

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{AB} = (2, 1)$ και $\vec{A\Gamma} = (3, -1)$.

α) Να δείξετε ότι $\vec{B\Gamma} = (1, -2)$.

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με υποτείνουσα την ΑΓ.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2 15854 1.4

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, 1)$ και $\vec{\beta} = (-8, -4)$.

α) Να δείξετε ότι $\vec{\alpha} // \vec{\beta}$.

(Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύει $\vec{\beta} = -4\vec{\alpha}$.

(Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι το μέτρο του διανύσματος $\vec{\beta}$ είναι τετραπλάσιο του διανύσματος $\vec{\alpha}$.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2 15852 1.4 – 1.5

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (3, 2)$, $\vec{\beta} = (-2, 1)$.

Να υπολογίσετε:

α) το διάνυσμα $\vec{v} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$.

(Μονάδες 7)

β) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ και το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha}$.

(Μονάδες 6)

γ) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{v}$.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 4 15320 1.2 - 1.5

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΟΑΓΒ με $\vec{OA} = \vec{\alpha}$ και $\vec{OB} = \vec{\beta}$, όπου $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι μη μηδενικά διανύσματα.

α) Να δείξετε ότι:

i. $|\vec{OG}|^2 = |\vec{\alpha}|^2 + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + |\vec{\beta}|^2$.

(Μονάδες 9)

ii. $|\vec{AB}|^2 = |\vec{\alpha}|^2 - 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + |\vec{\beta}|^2$.

(Μονάδες 9)

β) Αν $|\vec{OG}| = |\vec{AB}|$, να δείξετε ότι το ΟΑΓΒ είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4 18520 1.2 - 1.5

α) Να αποδειχθεί ότι για όλα τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ ισχύει:

$$|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 + |\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 = 2|\vec{\alpha}|^2 + 2|\vec{\beta}|^2 \quad (1)$$

(Μονάδες 06)

β) Δίνεται το παραλληλόγραμμο ΟΑΓΒ με $\vec{OA} = \vec{\alpha}$ και $\vec{OB} = \vec{\beta}$.

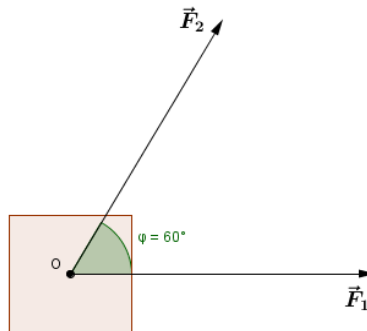
i. Να σχεδιάσετε τα διανύσματα $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

(Μονάδες 05)

ii. Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία της ισότητας (1).

(Μονάδες 04)

γ) Ένα σώμα σύρεται πάνω σε λείο επίπεδο από δύο ανθρώπους, οι οποίοι εξασκούν πάνω σε αυτό δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Οι δυνάμεις έχουν ίσα μέτρα 10 N (*Newton*) και η γωνία που σχηματίζουν είναι 60° . Να σχεδιάσετε την συνισταμένη δύναμη $\vec{F}$ και να βρείτε το μέτρο της.



ΕΥΘΕΙΑ

ΘΕΜΑ 2 20864 2.1 – 2.3

Δίνονται οι ευθείες: $\varepsilon_1 : 2x + y - 6 = 0$ και $\varepsilon_2 : 2x + y + 2 = 0$.

α) Να δείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες.

(Μονάδες 12)

β)

i. Να δείξετε ότι το σημείο $A(0, 6)$ ανήκει στην ευθεία ε_1 .

(Μονάδες 5)

ii. Να υπολογίσετε την απόσταση των ευθειών ε_1 και ε_2 .

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2 20926 1.4 – 2.3

Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: x - 2y = 1$ και τα σημεία $A(0, 2)$, $B(1, 0)$.

α) Να αποδείξετε ότι το σημείο B ανήκει στην ευθεία ε ενώ το σημείο A δεν είναι σημείο της ε .

(Μονάδες 08)

β) Να βρείτε την απόσταση του σημείου A από την ευθεία ε .

(Μονάδες 08)

γ) Να υπολογίσετε την απόσταση του A από το B και να αποδείξετε ότι η προβολή του A στην ευθεία ε είναι το B.

(Μονάδες 09)

ΘΕΜΑ 2 20926 1.4 – 2.3

Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: x - 2y = 1$ και τα σημεία $A(0, 2)$, $B(1, 0)$.

α) Να αποδείξετε ότι το σημείο B ανήκει στην ευθεία ε ενώ το σημείο A δεν είναι σημείο της ε .

(Μονάδες 08)

β) Να βρείτε την απόσταση του σημείου A από την ευθεία ε.

(Μονάδες 08)

γ) Να υπολογίσετε την απόσταση του A από το B και να αποδείξετε ότι η προβολή του A στην ευθεία ε είναι το B.

(Μονάδες 09)

ΘΕΜΑ 2 18733 1.4 – 1.5 – 2.3

Δίνονται τα σημεία $A(4,3)$, $B(1,1)$ και $\Gamma(6,0)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{AB}$ και $\vec{AG}$.

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{AG}$ είναι κάθετα.

(Μονάδες 8)

γ) Δίνεται το σημείο $M\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Να δείξετε ότι $(MA) = (MB)$.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 3 15178 2.1 – 2.2

Δίνεται η εξίσωση $(\mu + 1)x + (\mu + 2)y = 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ (1).

α)

i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 08)

ii. Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση (1) διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

(Μονάδες 02)

β)

i. Πότε η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία που έχει συντελεστή διεύθυνσης 0; Ποια είναι η εξίσωσή της;

(Μονάδες 03)

ii. Πότε η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για την οποία δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης; Ποια είναι η εξίσωσή της;

(Μονάδες 03)

γ) Να βρείτε για ποια τιμή του πραγματικού αριθμού μ , προκύπτει ευθεία η οποία σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα $x'x$. Ποια είναι η εξίσωσή της;

(Μονάδες 09)

ΘΕΜΑ 4 15004 1.4 – 1.5 – 2.1 – 2.2

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε_1 που διέρχεται από τα σημεία $A(4, 2)$ και $B(8, 5)$.

(Μονάδες 5)

β) Αν $\varepsilon_1: 3x - 4y - 4 = 0$, να δείξετε ότι η οξεία γωνία που σχηματίζει με την ευθεία

$\varepsilon_2: 7x - y - 1 = 0$ είναι $\hat{\varphi} = 45^\circ$.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το σημείο τομής των ε_1 και ε_2 .

(Μονάδες 4)

δ) Να βρείτε την εξίσωση ευθείας ε_3 τέτοιας ώστε η ε_2 να διχοτομεί τη γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες ε_1 και ε_3 .

(Μονάδες 8)

ΚΥΚΛΟΣ

ΘΕΜΑ 2 18749 2.1 – 3.1

Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ ώστε $A(5, 6)$, $B(1, 2)$, $\Gamma(12, 2)$ και το ύψος του $A\Delta$, όπου Δ σημείο της $B\Gamma$, όπως στο παρακάτω σχήμα.

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών $B\Gamma$ και $A\Delta$.

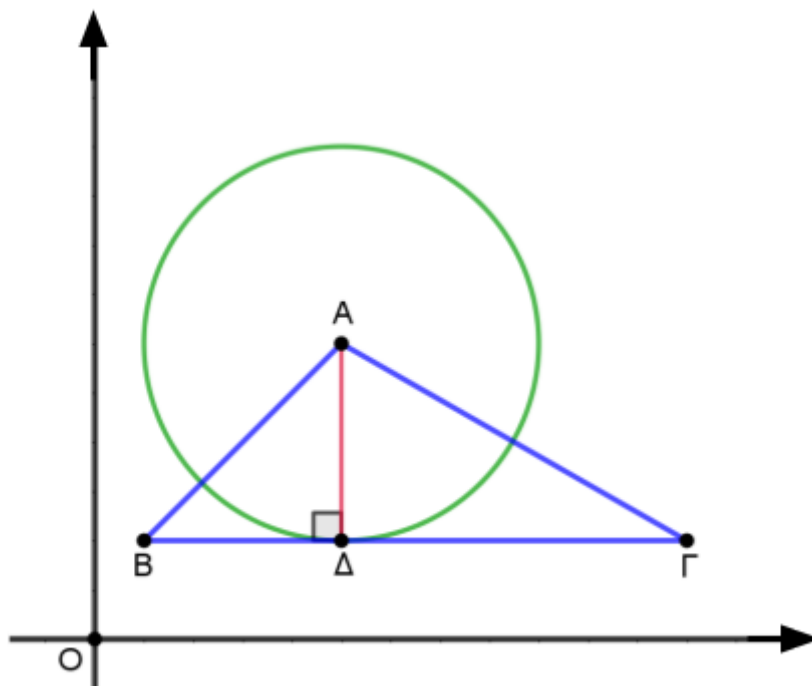
(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Δ .

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο το σημείο A , ο οποίος εφάπτεται της ευθείας $B\Gamma$ στο σημείο Δ .

(Μονάδες 10)



ΘΕΜΑ 4 18521 1.5 – 2.2 – 2.3 – 3.1

Δίνονται τα σημεία $A(1, 2)$, $B(2, 4)$ και $\Gamma(3, 1)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\hat{B\hat{A}\Gamma} = 90^\circ$.

(Μονάδες 06)

β) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου c , ο οποίος διέρχεται από τα σημεία A , B και Γ .

(Μονάδες 09)

γ) Αν ο κύκλος c έχει εξίσωση $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$, τότε να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του, οι οποίες διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4 20700 3.1

Δίνεται το τετράγωνο MM_1OM_2 με $M(4, 4)$, $M_1(4, 0)$, $M_2(0, 4)$. Αν O η αρχή των αξόνων του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων, τότε:

α) Να δείξετε ότι ο κύκλος που διέρχεται από τις κορυφές του τετραγώνου MM_1OM_2 έχει εξίσωση $C: (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 8$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: x + y = 8$ είναι εφαπτομένη του παραπάνω κύκλου C

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το σημείο επαφής της ευθείας ε με τον κύκλο C .

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4 20863 1.4 – 2.2 – 2.3 – 3.1

Δίνονται τα σημεία $A(1, 0)$ και $B(3, 0)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκάθετης ευθείας (ζ) του ευθύγραμμου τμήματος AB .

(Μονάδες 07)

β) Αν K είναι ένα τυχαίο σημείο της ευθείας (ζ), να βρείτε την εξίσωση (c) όλων των κύκλων, οι οποίοι έχουν κέντρο K και διέρχονται από τα σημεία A και B , συναρτήσει μιας παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 08)

γ) Αν η εξίσωση $(x - 2)^2 + (y - \lambda)^2 = \lambda^2 + 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$, παριστάνει όλους τους κύκλους (c) του ερωτήματος β), τότε:

- i. Να σχεδιάσετε τον κύκλο, ο οποίος έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα AB.
(Μονάδες 05)
- ii. Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε): $x + \lambda y - 1 = 0$ εφάπτεται σε όλους τους κύκλους (c) στο σημείο A(1, 0).
(Μονάδες 05)

ΠΑΡΑΒΟΛΗ

ΘΕΜΑ 4 18245 2.2 - 3.1 – 3.2

Δίνεται η παραβολή C : $y^2 = 4x$ και η εξίσωση $(\lambda^2 - 1)x + 2\lambda y + \lambda^2 + 1 = 0$ (1), $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας E και την εξίσωση της διευθετούσας δ της παραβολής C.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι η (1) για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ παριστάνει ευθεία ε_λ που δεν διέρχεται από το O(0,0).

(Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι η διευθετούσα της παραβολής δεν ανήκει στην οικογένεια ευθειών ε_λ .

(Μονάδες 6)

δ) Έστω $M(\alpha, \beta)$ σημείο του επιπέδου το οποίο δεν ανήκει στην παραπάνω διευθετούσα δ. Αν από το M διέρχεται μόνο μία ευθεία από την οικογένεια ευθειών ε_λ , να δείξετε ότι το M ανήκει στον κύκλο που έχει κέντρο την κορυφή της παραβολής C και διέρχεται από την εστία της E.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4 18870 3.2

Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της παραβολής με εξίσωση $y^2 = 4x$, η εφαπτομένη της (ε) στο σημείο $A(4, 4)$ και η AK κάθετη στην (ε). Μία φωτεινή ακτίνα (ζ), ακολουθώντας πορεία παράλληλη προς τον άξονα της παραβολής, προσπίπτουσα στο σημείο A και ανακλώμενη πάνω στην καμπύλη (που αντιστοιχεί σε παραβολικό κάτοπτρο) διέρχεται από το σημείο M . Αν γνωρίζετε ότι η γωνία θ_1 που σχηματίζει η προσπίπτουσα φωτεινή ακτίνα (ζ) με την (ε) και η γωνία θ_2 που σχηματίζει η ανακλώμενη φωτεινή ακτίνα AM με την (ε) είναι ίσες, τότε:

α) Να βρείτε την εστία και την διευθετούσα της παραβολής.

(Μονάδες 06)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) και το σημείο B στο οποίο αυτή τέμνει τον άξονα $x'x$.

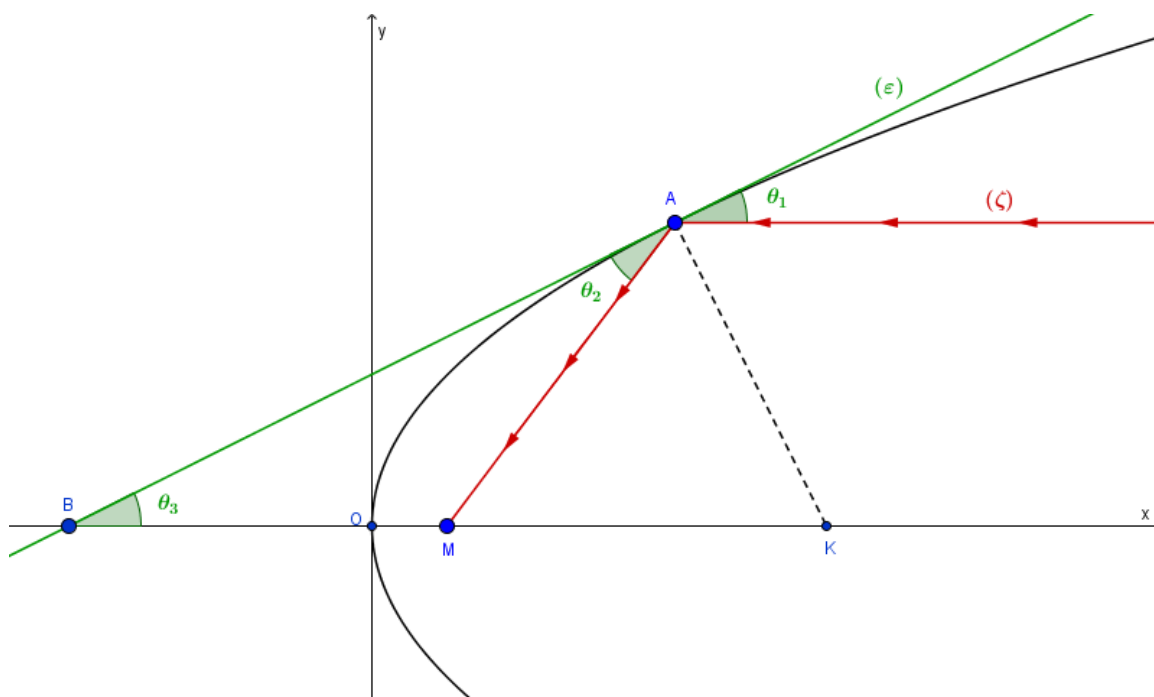
(Μονάδες 06)

γ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο MAB είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 07)

δ) Να αποδείξετε ότι το σημείο M ταυτίζεται με την εστία της παραβολής.

(Μονάδες 06)



ΕΛΛΕΙΨΗ

ΘΕΜΑ 2 20718 3.3

Δίνεται η έλλειψη C με εξίσωση $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$.

α) Να βρείτε τις εστίες της.

(Μονάδες 8)

β) Να σχεδιάσετε την έλλειψη C σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων.

(Μονάδες 8)

γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα τις εφαπτόμενες στις κορυφές της C και να γράψετε τις εξισώσεις τους.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4 20726 3.3

Ένας κατασκευαστής μπιλιάρδων θέλει να κατασκευάσει ένα ελλειπτικό μπιλιάρδο όπως αυτό του παρακάτω σχήματος (σχήμα 1). Το περίγραμμα του μπιλιάρδου είναι έλλειψη με εστίες τα σημεία $E(3,0)$ και $E'(-3,0)$. Η μοναδική τρύπα του μπιλιάρδου

έχει σχήμα κύκλου (ο μαύρος κύκλος στο σχήμα 1) με κέντρο το σημείο E' . Για να σχεδιάσει ο κατασκευαστής το περίγραμμα του μπιλιάρδου πάνω σε μία ξύλινη επίπεδη επιφάνεια, τοποθέτησε στα σημεία E και E' δύο καρφιά στα οποία έδεσε τις άκρες ενός σχοινιού μήκους 10 μονάδων μήκους. Στη συνέχεια με ένα μολύβι διατηρούσε το σχοινί τεντωμένο, ώστε αυτό, κατά την κίνησή του, να διαγράψει έλλειψη C όπως φαίνεται στο παρακάτω (σχήμα 2).

α) Να βρείτε τα μήκη του μεγάλου και του μικρού άξονα της έλλειψης C .

(Μονάδες 10)

β) Να γράψετε την εξίσωση της έλλειψης C και να βρείτε την εκκεντρότητά της.

(Μονάδες 5)

γ) Ένας παίκτης τοποθετεί μια άσπρη μπάλα (ο άσπρος κύκλος στο σχήμα 1) ακριβώς στο σημείο E . Σκοπεύει να χτυπήσει την άσπρη μπάλα ώστε αφού αυτή προσκρούσει πρώτα στο ελλειπτικό περίγραμμα του μπιλιάρδου, στη συνέχεια να πέσει στην τρύπα. Αν θεωρήσουμε ότι ο παίκτης θα χτυπήσει με όση δύναμη απαιτείται για να φτάσει η μπάλα στην τρύπα και το χτύπημα θα είναι στο κέντρο της μπάλας ώστε αυτή να κυλά χωρίς να περιστρέφεται, να βρείτε σε ποιο σημείο της έλλειψης C πρέπει να σημαδέψει, ώστε με ένα μόνο χτύπημα η μπάλα να μπει στην τρύπα:

1) μόνο στα άκρα του μεγάλου άξονα

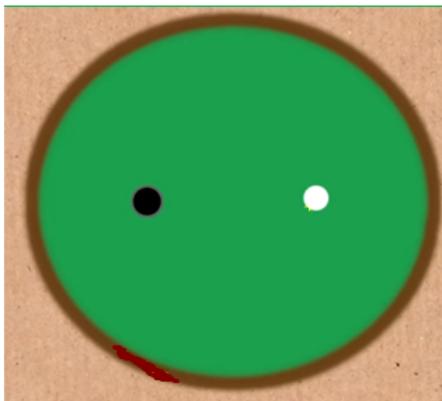
2) μόνο στα άκρα του μικρού άξονα

3) μόνο στα άκρα του μικρού άξονα και στο ένα άκρο του μεγάλου άξονα

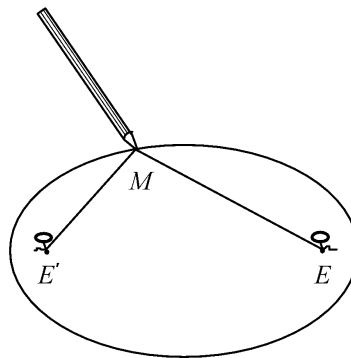
4) σε οποιοδήποτε σημείο της C εκτός από το ένα άκρο του μεγάλου άξονα

Επιλέξτε τη μοναδική σωστή απαντήσες αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)



Σχήμα 1



Σχήμα 2

ΥΠΕΡΒΟΛΗ

ΘΕΜΑ 2 17942 3.4

Δίνεται η κωνική τομή με εξίσωση $(C) \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$.

α) Να προσδιορίσετε το είδος της κωνικής τομής και να βρείτε μία εστία της.

(Μονάδες 12)

β) Να εξετάσετε αν το σημείο $M(1, 2022)$ μπορεί να ανήκει στην (C) .

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2 22566 3.4

Δίνεται η υπερβολή με εξίσωση $4x^2 - y^2 = 4$.

α) Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες της κορυφής της υπερβολής είναι $A(1,0)$ και $A'(-1,0)$

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι οι $y = 2x$ και $y = -2x$.

(Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από την κορυφή A και είναι παράλληλη προς την ασύμπτωτη $y = -2x$ έχει εξίσωση $y = -2x + 2$

(Μονάδες 8)