Chapitre A7
Calcul littéral

I. Rappels

Une **expression littérale** est une expression où certains nombres sont désignés par des lettres (x, y, z, …). Ces nombres sont appelés des **variables** contrairement aux nombres écrits en chiffres appelés **constantes**.

Dans l'expression $A = 3x^2 + 4x + 5$, x est une **variable** ; 3, 4 et 5 sont des **constantes.**

Remarque

Dans une somme, les nombres qui la composent sont les **termes** de la **somme**.
Dans un produit, les nombres qui le composent sont les **facteurs** du **produit**.
Dans l'expression A, 5 est le **terme constant**.

II. Propriétés

Pour développer ou factoriser, on utilise la distributivité :

Soit a et b des nombres réels, $a(b + c) = ab + ac$

Ecrire $a(b + c) = ab + ac$, c'est **développer**.
Ecrire $ab + ac = a(b + c)$, c'est **factoriser**.
Autrement dit, **développer** c'est **transformer un produit en une somme.**
Factoriser, c'est **transformer une somme en un produit.**

Exemples

$A = 12\times27 = 12\times(20 + 7) = 12\times20 + 12\times7 = 240 + 84 = 324$

$B = x(5 + 3x) = x\times5 + x\times3x = 5x + 3x^2$

$C = 2x(x - 4) = 2x\times x - 2x\times4 = 2x^2 - 8x$

On a développé les expressions A, B et C.
On va factoriser les expressions D, E et F
$D = 3x + x = 3\times x + 1\times x = (3 + 1)\times x = 4x$

Dans ce cas, la factorisation est appelée une **réduction**.
$E = 18 - 12x = 6\times3 - 6\times2x = 6(3 - 2x)$

$F = 9x + 6x^2 = 3x\times3 + 3x\times2x = 3x(3 + 2x)$

$G =- 4x - 6x^2 =- 2x\times2 - 2x\times3x =- 2x(2 + 3x)$

$H =- 8 + 56x^2 = 8\times(- 1) + 8\times7x^2 = 8\left(- 1 + 7x^2\right)$

Application au calcul mental

$I = 13\times17 - 13\times7 = 13(17 - 7) = 13\times10 = 130$

De la distributivité simple, on peut déduire la distributivité double :

Propriété (distributivité double)
Soit a, b, c et d des nombres réels, on a les égalités suivantes :

$$(a + b)(c + d) = a\times c + a\times d + b\times c + b\times d$$
$$(a - b)(c + d) = a\times c + a\times d - b\times c - b\times d$$
$$(a - b)(c - d) = a\times c - a\times d - b\times c + b\times d$$
$$(a + b)(c - d) = a\times c - a\times d + b\times c - b\times d$$

Exemples

$A = (10 - 3)(10 + 2) = 10\times 10 + 10\times 2 - 3\times 10 - 3\times 2$

$A = 100 + 20 - 30 - 6 = 84$

$B = 27\times 13 = (20 + 7)(10 + 3)$

$B = 20\times 10 + 20\times 3 + 7\times 10 + 7\times 3$

$B = 200 + 60 + 70 + 21 = 351$

$C = (x + 2)(x - 3) = x\times x - x\times 3 + 2\times x - 2\times 3$

$C = x^2 - 3x + 2x - 6 = x^2 - x - 6$

$D = (4 - 3x)(7 - 2x) = 4\times 7 - 4\times 2x - 3x\times 7 + 3x\times 2x$

$D = 28 - 8x - 21x + 6x^2 = 6x^2 - 29x + 28$

Remarque
Si l'expression se présente sous la forme d'un carré, on peut le développer en l'écrivant sous la forme d'un produit.

Exemples

$A = (3x + 2)^2 = (3x + 2)(3x + 2)$

$A = 3x\times 3x + 3x\times 2 + 2\times 3x + 2\times 2$

$A = 9x^2 + 6x + 6x + 4 = 9x^2 + 12x + 4$

$B = (3x - 4)^2 = (3x - 4)(3x - 4)$

$B = 3x\times 3x - 3x\times 4 - 4\times 3x + 4\times 4$

$B = 9x^2 - 12x - 12x + 16 = 9x^2 - 24x + 16$

Pour ces derniers exemples, on utilisera en troisième des **identités remarquables** qui permettent d'obtenir le résultat bien plus rapidement.

Factorisation avec facteur apparent
Dans cette partie, on utilisera la distributivité simple :

$\boxed{a\times b + a\times c = a(b + c)}$

$B = (2x + 1)(x - 3) + (2x - 9)(2x + 1)$

$B = (2x + 1)(x - 3 + 2x - 9)$

$B = (2x + 1)(3x - 12)$

Or $3x - 12 = 3(x - 4)$
Donc $B = 3(2x + 1)(x - 4)$
$C = (3x + 2)(8x + 7) - (3x + 2)(6x - 5)$

$C = (3x + 2)[8x + 7 - (6x - 5)]$

$C = (3x + 2)[8x + 7 - 6x + 5]$

$C = (3x + 2)(2x + 12)$

$C = 2(3x + 2)(x + 6)$

Exemples type brevet

Exercice 1 (substitution)
Calcule $B = 3x^2 - 5x + 2$ pour $x = -3$.
Solution
$B = 3x^2 - 5x + 2 = 3\times(-3)^2 - 5\times(-3) + 2$

$B = 3\times 9 + 15 + 2 = 44$

Exercice 2 (test d'égalité)
L'égalité $3x - 7 = 2x + 8$ est-elle vérifiée pour $x = 8$?
Solution
Pour $x = 8$,
D'une part, $3x - 7 = 3\times 8 - 7 = 24 - 7 = 17$.
D'autre part, $2x + 8 = 2\times 8 + 8 = 16 + 8 = 24$.
Donc, l'égalité n'est pas vérifiée pour $x = 8$.

Exercice 3 (test d'égalité)
L'égalité $5x - 7 = 8$ est-elle vérifiée pour $x = 3$?
Solution
Pour $x = 3$,
$5x - 7 = 5\times 3 - 7 = 15 - 7 = 8$.
Donc, l'égalité est vérifiée pour $x = 3$.

III. Programme de calcul

On considère le programme de calcul suivant :

On choisit un nombre.
On lui ajoute 7.
On multiplie le résultat par la différence du nombre de départ et de 7.
On ajoute 49 au résultat.

1. *Quel est le résultat du programme de calcul si le nombre de départ est 5 ? -3 ? Que remarque-t-on ?*

2. *Soit x le nombre de départ, quel est le résultat du programme de calcul en fonction de x ?*

Solution

1. Si 5 est le nombre de départ, le programme donne :

$(5 + 7)(5 - 7) + 49 = 12\times(- 2) + 49 =- 24 + 49 = 25$

Si $-\ 3$ est le nombre de départ, le programme donne :

$(- 3 + 7)(- 3 - 7) + 49 = 4\times(- 10) + 49 =- 40 + 49 = 9$

Il semble que le programme de calcul donne le **carré du nombre de départ**.

2. Si x est le nombre de départ, le programme donne :

$(x + 7)(x - 7) + 49 = x^2 - 7x + 7x - 49 + 49 = x^2$