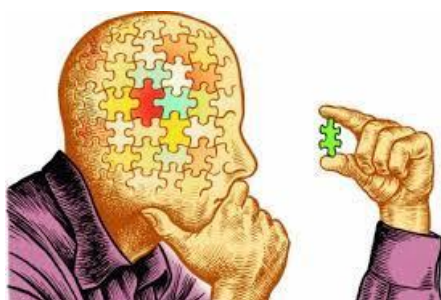


Управління освіти Шепетівської міської ради
Комунальна установа
«Центр професійного розвитку педагогічних працівників»

СОФІЗМИ

ЯК ЗАСІБ ФОРМУВАННЯ

МАТЕМАТИЧНОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ УЧНІВ



Бородій Ольга Павлівна,
учитель математики
навчально-виховного
комплексу «Загальноосвітня
школа I-III ступенів - гімназія»

О. П. Бородій. Софізми як засіб формування математичної компетентності учнів.

Рецензент: Мойсеєнко С.О., учитель математики навчально-виховного комплексу «Загальноосвітня школа І-ІІІ ступенів-гімназія» м. Шепетівки.

Схвалено на засіданні науково-методичної ради школи-гімназії (протокол № 3 від 21.01.2021 р.)

Посібник містить теоретичні, методичні та практичні аспекти використання софізмів як засобу формування математичної компетентності учнів.

Використання софізмів на уроках є ефективним засобом у розв'язанні проблеми розвитку критичного математичного мислення учнів, сприяє попередженню типових помилок, навчає доводити й спростовувати, чітко висловлювати свої думки. Вони дивують та захоплюють, дають поштовх для творчості, пошуку нового.

Посібник адресований вчителям математики для використання на уроках та в позаурочний час, при проведенні виховних заходів, факультативних та гурткових занять.

ВСТУП	4
ІСТОРІЯ ВИНИКНЕННЯ СОФІЗМІВ	6
МЕТОДИЧНІ АСПЕКТИ ВИКОРИСТАННЯ СОФІЗМІВ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ	11
СОФІЗМИ АРИФМЕТИКИ	15
СОФІЗМИ АЛГЕБРИ	17
СОФІЗМИ ГЕОМЕТРІЇ	22
СОФІЗМИ ЛОГІКИ	25
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	29

ВСТУП

Під час навчання математики необхідно систематично збуджувати, розвивати та зміцнювати пізнавальний інтерес учнів і як важливий мотив навчання, і як стійку рису особистості. Одним із засобів пробудження й підтримки пізнавального інтересу до вивчення математики є формування в дітей стійких компетентностей на уроках математики та в позаурочний час. Це має суттєве освітнє та виховне значення.

Викладання математики має відображати діалектику пізнання дійсності і побудови математичних теорій. Саме практичній і творчій складовій навчальної діяльності приділяють особливу увагу в Державному стандарті.

Математичні компетентності складають основу для формування ключових компетентностей.

Математична компетентність виявляється у розумінні учнем ролі математики у пізнанні дійсності; володінні математичною термінологією, умінні логічно розмірковувати, обґрунтовувати свої дії; умінні користуватися знаковою та графічно поданою інформацією; здатності розв'язувати математичні задачі, умінні оцінити доцільність використання математичних методів для розв'язання практичної задачі; умінні формувати математичні моделі практичних задач, розв'язувати їх математичними методами та інтерпретувати результати; здійснювати аналіз та оцінку отриманих результатів.

У розв'язанні проблеми розвитку критичності математичного мислення учнів одним з ефективних засобів є використання софізмів у навчанні.

Практика навчання математики свідчить, що пошук помилок у софізмі, чітке розуміння причин їх виникнення сприяють усвідомленому розумінню математики. Виявлення та аналіз помилки, укладеної в софізм, найчастіше є більш повчальними, ніж просто розбір розв'язань «безпомилкових» завдань. Можна скільки завгодно пояснювати, що ділення на нуль неприпустиме або

що квадратний корінь з повного квадрата числа або виразу дорівнює модулю цього числа (виразу), але учень щоразу припускається однієї й тієї ж помилки. Водночас ефективне демонстрування «доведень» очевидно неправильного результату, у чому і полягає сенс софізму, показує те, до якої нісенітниці призводить нехтування тим чи іншим математичним правилом. Подальший пошук і аналіз помилки, що призвела до нісенітниці, дозволяють на емоційному рівні зрозуміти і закріпити те чи інше математичне правило або твердження.

ІСТОРІЯ ВИНИКНЕННЯ СОФІЗМІВ

З античних часів математику вважають наукою точною, що не терпить помилок, вимагає ясності понять та тверджень, нічого не сприймає без доведень, проголошує красу та велич логічних міркувань. За словами Ж. Фабра «математика – дивовижна вчителька в мистецтві спрямовувати думки, наводити порядок там, де вони не впорядковані, викорчовувати безглуздя, фільтрувати брудне і наводити ясність». Помилки в міркуваннях найчастіше виникають через порушення законів формальної логіки, основи якої заклав визначний давньогрецький філософ Арістотель.

Помилки, пов'язані з порушенням законів логіки та законів математики бувають двох типів: паралогізми і софізми. Паралогізми (з грецької – неправильне) – це хибне міркування, логічна помилка, допущена не навмисне, а через втрату послідовності в міркуваннях чи порушення одного з законів логіки. Паралогізми в математиці неприпустимі, бо де є місце помилці, там вже немає місця математиці.

Зовсім інша ситуація з софізмами. Софізми (з грецької – хитрий викрутас, вигадка, хитрий умовивід) – це міркування, навмисне побудовані так, що вони містять логічну помилку і, звичайно, приводять до хибних висновків.

Напевне, перша в історії спроба попередження логічних помилок належить геніальному давньогрецькому математикові, автору славнозвісних «Начал» – Евкліду (IV ст. до н. е.). Він створив дивовижний збірник «Псевдарій», де вмістив різні помилкові міркування, до яких часто вдаються ті, хто починає вивчати математику. Отже, Евклід був автором першого збірника математичних софізмів. На жаль, цей твір патріарха математики не дійшов до нас. Зате вимогливість до строгості й культури міркувань знайшла численних послідовників, які зібрали і опублікували велику колекцію математичних софізмів.

Першим увів софізми давньогрецький філософ, засновник школи софістів Протагор із Абдери (480 – 410 до н. е.). Введення софізмів сприяло вдосконаленню ораторського мистецтва, підвищенню логічної культури мислення.

Щоправда, пізніше в деяких філософів-софістів мистецтво софістики перетворилося на суперечку заради суперечки. Різні приклади софізмів наводить у своїх діалогах Платон (427 – 347 до н. е.). Вперше аналіз та класифікацію софізмів дав Арістотель у трактаті «Про софістичні спростування».



На сьогодні софізми, і зокрема математичні, навчають мислити, доводити й спростовувати, чітко висловлювати свої думки; вони дивують та захоплюють, дають поштовх для творчості, пошуку нового, відкриттів.

Зорові помилки й парадокси використав у своїх картинах відомий голландський художник Мауріц Корнеліус Ешер (1898 – 1972). Своїми малюнками він глузує з певних особливостей нашого сприймання тривимірного світу, створюючи насправді вражаючи, просто дивовижні ефекти.

Найчастіше софізми та паралогізми виникають, коли міркування порушують закони логіки: закон тотожності, закон суперечності, закон виключного третього, закон достатньої підстави.

Закон тотожності вимагає, щоб одна і та сама думка, яка наводиться в даному умовиводі, при повторенні мала однаковий зміст. При порушенні цього закону виникають помилки трьох видів: еквівокація, логомахія і амфіболія.

Суть помилки еквівокації (з латинської – такі, що звучать однаково) в тому, що в міркуваннях використовують багатозначне ім'я предмета, то в одному, то в іншому значенні, вважаючи це ім'я однозначним. Наприклад: «Кожен метал є елементом. Латунь – метал. Отже, латунь є елементом». Неправильний висновок зумовлений помилкою еквівокації. У першому реченні слово «метал» використано у значенні хімічного елемента, в другому йдеться про сплав металів – речовину, яка має фізичні властивості металу: ковкість, електропровідність, металевий блиск тощо. У математиці помилка еквівокації майже неможлива і завжди очевидна, оскільки вимога відсутності омонімії не допускає двозначності понять, використаних у математичних міркуваннях.

Іноді під час дискусії один з її учасників використовує деяке багатозначне ім'я в іншому значенні, ніж його опонент. Суперечка може бути нескінченою. Такий диспут називається логомахією (з грецької – словесна суперечка). Логомахією називається також диспут, який не дає нічого суттєво важливого.

Амфіболія (з грецької – двозначність) виникає, коли використовують речення, яке можна тлумачити по-різному. Наприклад, відома фраза «Страчувати не можна помилувати» допускає два протилежні тлумачення.

Закон суперечності (латинська назва – *Lex contradictionis*) полягає в тому, що не можуть бути одночасно істинними два протилежні висловлювання про один і той самий об'єкт, взятий в один і той самий час і в одному й тому самому розумінні. Закон суперечності пов'язаний з так званими контрарними (з латинської – протилежний) протилежностями. Це вид протилежностей, коли зіставляється загальностведжувальне і загальнозаперечувальне висловлювання: «Всі ромби – опуклі чотирикутники», «Жоден ромб не є опуклим чотирикутником». Цікаво, що обидві контрарні протилежності можуть бути хибними: «Всі прості числа непарні», «Всі прості числа парні», тобто існує третя можливість – «Існує єдине парне просте число». Оперуючи з контрарними протилежностями,

потрібно дотримуватися правил: з істинності одного з контрарних висловлювань випливає хибність іншого; з хибності одного з контрарних висловлювань не можна встановити істинності контрарного щодо нього висловлювання (воно може бути як істинним, так і хибним). У цьому фундаментальне значення закону суперечності для людського мислення – з хибності випливає і істина, і хибність.

Закон виключеного третього (латинська назва – *Lex exclusi tertii sive medii inter duo contradictoria*) стверджує, що з двох суперечливих висловлювань, де розглядається один і той самий об'єкт в один і той самий час, одне обов'язково істинне. Цей закон поширюється на так звані контрадикторні (з латинської – суперечливий) протилежності. Це вид протилежностей, коли зіставляються: загальностверджувальне і частково заперечувальне висловлювання («Всі парні числа складені», «Деякі парні числа не є складеними») або загальнозаперечувальне і частково тверджувальне («Навколо будь-якого неправильного многокутника не можна описати коло», «Навколо деяких неправильних многокутників можна описати коло»). Одне з контрадикторних висловлювань обов'язково істинне, інше – неодмінно хибне, третього бути не може. Цей закон відіграє в математиці дуже важливу роль. Він лежить в основі опосередкованих доведень.

Закон достатньої підстави вимагає, щоб кожна істинна думка була обгрунтована іншими думками, істинність яких доведено. За законом достатньої підстави наші висловлювання повинні бути внутрішньо пов'язаними, впливати одне з одного (наступне з попереднього), обгрунтовувати одне одне.

Отож, помилки йдуть від порушень законів логіки, або інших математичних законів. Паралогізми чекають на неуважних або недостатньо натренованих у складному мистецтві міркувань. Софізми – навмисне розставлені логічні пастки. Але бувають й інші, тривожніші, справді катастрофічні ситуації в пізнавальній діяльності людини. Іноді правильні

формально-логічні міркування приводять до результатів, які не узгоджуються з загальноприйнятою думкою, здаються безглуздими. Це парадокси (з грецької – несподіваний, дивовижний). Давньогрецький філософ Діодор Кронос, не розв’язавши однієї з найдавніших логічних загадок – парадоксу Евбуліда, помер від розпачу, а інший філософ Філет Косський, зазнавши такої самої невдачі, кінчив життя самогубством. Ще складнішими були парадокси (апорії) Зенона Елейського.

Парадокси виникали і виникають в усіх галузях людської діяльності. Вивчення парадоксів, спроби їх розгадати й знешкодити мають не тільки теоретичний інтерес. Якщо в логіці й математиці можливі парадокси, то де гарантія, що в складну програму комп’ютера, яка керує, наприклад деякими життєвоважливими процесами, не прослизне один з них? Тоді такий парадокс може обернутися трагічними подіями в реальності.

МЕТОДИЧНІ АСПЕКТИ ВИКОРИСТАННЯ СОФІЗМІВ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

Історія математики містить багато несподіваних і цікавих софізмів. Часто саме софізми ставали поштовхом до нових відкриттів, з яких, у свою чергу, з'являлися нові софізми.

Математичні софізми – це хибне математичне твердження з прихованою помилкою в математичних міркуваннях. Розв'язати софізм – означає знайти помилку в міркуваннях, за допомогою якої була створена зовнішня видимість правильності доведення.

Загалом математичні софізми будуються на некоректному слововживанні, на неточності формулювань, дуже часто на неправильному застосуванні теорем, на прихованому виконанні неможливих дій, на незаконних узагальненнях, особливо під час переходу від скінченної кількості об'єктів до нескінченної, на маскуванні помилкових міркувань.

Розв'язування софізмів сприяє розвитку всіх компонентів математичної підготовки, а саме:

- фактичних знань і вмінь, передбачених програмою навчання;
- розумових операцій і методів діяльності;
- математичного стилю мислення;
- раціональних способів навчально-пізнавальної діяльності.

Розв'язуючи математичний софізм, учень активізує мислення на знаходженні помилки, оцінює свої дії з боку, прогнозує можливі результати помилок, критикує запропоновані доведення софізмів.

Спочатку застосування софізмів на уроках математики здійснюється за допомогою системи навідних запитань учителя, евристичної бесіди, що спонукає до таких міркувань. Якщо софізми використовувати систематично й цілеспрямовано на уроках математики, то за постійного аналізу помилкових міркувань в учнів розвивається критичне мислення. Тобто використання софізмів сприяє розвитку критичного мислення.

Одним із важливих питань використання софізмів є визначення місця софізмів у системі уроків математики. Можна розглядати їх у зв'язку з вивченням поточного матеріалу, і тоді софізм є важливим педагогічним моментом для посилення уваги учнів до окремих питань шкільного курсу математики. Також можна пропонувати софізми на етапі узагальнення й систематизації вивченого матеріалу для визначення рівня усвідомлення засвоєного матеріалу. Щодо використання софізмів на конкретному уроці, то вчитель самостійно визначає, на якому етапі уроку він розглядатиме той чи інший софізм. Бажано складати їх з урахуванням психологічних закономірностей засвоєння і запам'ятовування матеріалу. Зокрема, софізм може містити доведення помилкових тверджень, неточні формулювання означень, неповні формулювання, помилкові висновки, неправильні обернені теореми.

Можна використовувати завдання з обманом або провокацією. Під «обманними» розуміють завдання, умова яких або суперечлива, тобто розв'язання неможливе за конкретних даних, або вони мають який-небудь недолік, що зводить задачу до абсурдної за змістом. У такий спосіб дістанемо деякий софізм. Після пропонування такого завдання можливі два варіанти подій. Учні помітять підступ і не розв'язуватимуть задачу, тоді вчитель продемонструє, до чого б вони дійшли, якби все ж таки спробували її розв'язати. У цьому випадку в учнів виникнуть позитивні емоції з приводу того, що вони вчасно помітили приховану помилку і не «попалися в пастку». Але учні можуть нічого не помітити, і тоді вчитель підводить їх до безглузлого результату, допомагає з'ясувати причину такого результату. У цьому випадку в школярів виникає почуття невдоволення собою через неувважність, через те, що вони потрапили в пастку, причому заздалегідь підготовлену. Але в будь-якому випадку емоційне забарвлення ситуації сприяє усвідомленню значущості, важливості поданого матеріалу,

підвищенню інтересу учнів до предмета, що у свою чергу впливає на свідомість і міцність засвоєння навчального матеріалу.

Починати таку роботу слід із контрприкладів, загострюючи увагу учнів на помилках у висловлюваннях товаришів під час уроків математики уже з 5 класу. Вважаю таку діяльність пропедевтичною для готовності школяра до сприйняття софізмів. Учителю часто доводиться спостерігати, як учні, формулюючи те чи інше твердження, не завжди точно дотримуються змістовної лінії поняття, упускаючи певні елементи в означенні чи теоремі, не розуміють помилковість такого формулювання та не усвідомлюють у чому його хибність. Для педагога такий підхід є сигналом про можливі майбутні серйозні прогалини у знаннях дитини, якщо вчасно не вказати їй на той факт, що перефразування твердження не означає втрату певних важливих моментів, головне при цьому – передати правильно зміст математичного висловлювання. Так, наприклад, якщо учень, формулюючи означення діаметра, говорить : «Це є фігура, що складається із двох радіусів», то виникає ризик, що і ламана, яка утворена двома радіусами теж може називатися діаметром. Разом із тим, привчаючи учнів до вміння дотримуватися ключових положень твердження, ми спостерігаємо, що із часом учні самі починають вникати у змістовні лінії математичних істин та вчать спростовувати неправильні формулювання, помічають навіть найменші недоречності у висловлюваннях товаришів.

На сьогодні софізми, і зокрема математичні, навчають мислити, доводити й спростовувати, чітко висловлювати свої думки; вони дивують та захоплюють, дають поштовх для творчості, пошуку нового. Вивчення софізмів буде корисним майбутнім юристам, журналістам, урядовцям, пересічним громадянам, яким так чи інакше доведеться відстоювати правильність своїх думок та вчинків та аналізувати отриману інформацію. Софізми на уроках математики можна застосовувати з метою:

– попередження типових помилок на узагальнюючих уроках;

- створення проблемної ситуації при поясненні нового матеріалу;
- перевірки рівня засвоєння вивченого матеріалу;
- більш цікавого повторення і закріплення вивченого матеріалу.

Для розвитку пізнавальної самостійності учнів софізми також можна використовувати:

- при виконанні домашніх завдань (з метою більш осмисленого розуміння матеріалу);
- на факультативних та гурткових заняттях (з метою поглибленого вивчення окремих тем з математики);
- при написанні рефератів і дослідницьких робіт (можна використати софізми давньогрецьких філософів, наприклад, Прокла «Дві непаралельних на площині прямі не перетинаються» та ін.);
- в позакласних заходах (з метою збудження інтересу до математики).

СОФІЗМИ АРИФМЕТИКИ

Цікаві математичні задачі та головоломки – приклади найпростіших математичних моделей, які готують допитливий розум до побудови і дослідження значно складніших реальних та логічно можливих закономірностей.

Про дуже зрозумілі нам речі ми говоримо: «Зрозуміло, як два на два – чотири». Але чи завжди $2 \cdot 2 = 4$?

Приклад 1. Довести, що $2 \cdot 2 = 5$.

Розв'язання. Розглянемо правильну числову рівність $4 : 4 = 5 : 5$. Внесемо спільний множник за дужки $4(1 : 1) = 5(1 : 1)$. Числа у дужках рівні, тому $4 = 5$, тобто $2 \cdot 2 = 5$.

У чому ж помилка? Очевидно, що розподільний закон ділення не існує.

Приклад 2. Довести, що $3 = 5$.

Розв'язання. Маємо очевидну рівність $25 - 15 - 10 = 15 - 9 - 6$, звідки $5(5 - 3 - 2) = 3(5 - 3 - 2)$, або $5 = 3$.

Помилка в тому, що на нуль ділити не можна.



Приклад 3. Я знаю спосіб швидко збільшити свій капітал та стати мільйонером.

Розв'язання. $2 \text{ грн.} = 200 \text{ к.}$ Піднесемо ліву та праву частину рівності до квадрату: $(2 \text{ грн.})^2 = (200 \text{ к.})^2$. Отримаємо $4 \text{ грн.} = 40000 \text{ к.} = 400 \text{ грн.}$

Так розбагатіти дуже легко, однак піднесення до квадрату величин не має змісту.

Приклад 4. $6 \text{ кг} = 6000000 \text{ г}$, $\frac{2}{3} \text{ кг} = \frac{2}{3} \text{ г}$.

Відомо: $2 \text{ кг} = 2000\text{г}$, $3 \text{ кг} = 3000\text{г}$. Помножимо почленно ці рівності,

отримаємо: $6 \text{ кг} = 6000000\text{г}$. А якщо розділимо почленно, то $\frac{2}{3} \text{ кг} = \frac{2}{3} \text{ г}$.

Помилка полягає в порушенні правил дії з іменованими величинами: всі дії, що здійснюються над величинами, необхідно здійснювати також і над їх вимірювальними одиницями.

СОФІЗМИ АЛГЕБРИ

Для переконання у справедливості здобутих за допомогою математики висновків учені турбувалися про надійність, бездоганність найвищого і найскладнішого інструмента пізнання – мислення. Тільки воно виявляє найважливіші, найглибші характеристики об'єктів і відношення між ними. Мислення проходить у певних формах, а сам процес мислення і його результат фіксують і передають певною мовою.

Приклад 1. Розв'язати систему рівнянь

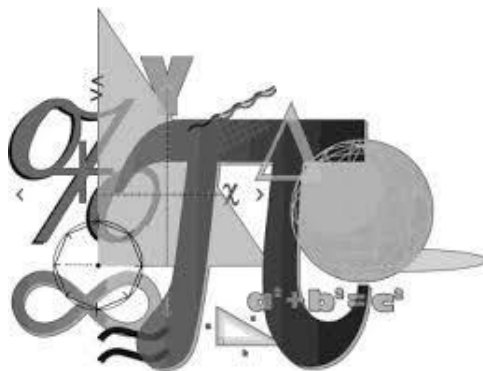
$$\begin{cases} x^4 - 1321x - 23 = 0, \\ x^4 - 1310x - 144 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Від першого рівняння віднімемо почленно друге, дістанемо: $-11x + 121 = 0$, звідки $x = 11$. Але підставивши значення $x = 11$, переконуємось, що воно не є коренем жодного з цих рівнянь.

Справа в тому, що рівняння $-11x + 121 = 0$ є тільки наслідком системи, але воно не рівносильне їй: будь-який розв'язок системи є розв'язком рівняння, але не навпаки. Тому можна зробити такий висновок: якщо система має розв'язок, то він єдиний і є розв'язком рівняння. Підставивши значення $x = 11$ у систему, робимо висновок: розв'язків вона не має.

Геніальний французький математик П'єр Ферма (1601 – 1665) був за фахом юристом і займався математикою в години відпочинку. Викликає зацікавленість Велика теорема Ферма: «Неможливо розкласти ні куб на два куби, ні біквadrat на два бікквадрати, ні взагалі довільний степінь, більший від квадрата, на два степені з еквівалентним показником». Ферма записав цю теорему на берегах книги Діофанта «Арифметика» і додав: «Я відкрив цьому воістину чудове доведення, але береги книги занадто малі».

Формулювання теореми дуже просте і, здається, має бути таким же простим її доведення. Багато видатних науковців і любителів математики намагалися довести це твердження, але припускалися помилок. Доведення теореми було завершено у вересні 1994 року Ендрю Вайльсом. 109-сторінкове доведення було надруковане у журналі «Annals of Mathematics» 1995 року.



Розглянемо міркування, які і є доведенням знаменитої теореми Ферма.

Приклад 2. Рівняння

$$x^n + y^n = z^n, \quad (1)$$

де n – ціле число, більше від двох, не має розв'язків у цілих додатних числах.

Розв'язання. Міркуватимемо методом від супротивного. Нехай рівняння (1) має розв'язки в цілих додатних числах при деякому $n > 2$.

Ніхто не піддає сумніву істинність знаменитої теореми Піфагора, для якої знайдено кілька сот різних доведень. Її можна записати в такій формі:

$$x^2 + y^2 = z^2,$$

(2)

де x, y, z – значення довжин відповідно катетів і гіпотенузи прямокутного трикутника.

Рівняння (1) і (2) можна переписати так:

$$\left(\frac{x}{z}\right)^n + \left(\frac{y}{z}\right)^n = 1$$

(3)

$$\left(\frac{x}{z}\right)^2 + \left(\frac{y}{z}\right)^2 = 1$$

(4)

Праві частини рівняння (3) і (4) рівні, тому мають бути рівними й ліві частини, тобто

$$\left(\frac{x}{z}\right)^n + \left(\frac{y}{z}\right)^n = \left(\frac{x}{z}\right)^2 + \left(\frac{y}{z}\right)^2$$

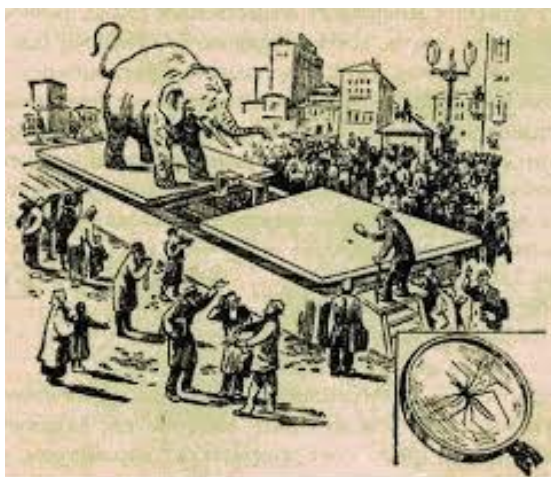
(5)

Але остання рівність справедлива лише при $n > 2$. Таким чином, припустивши, що Велика теорема Ферма хибна, ми дійшли суперечності, тому істинним має бути висловлення, протилежне нашому припущенню, тобто сама ця теорема.

Суперечність у рівності (5) має інше джерело і не залежить від того, правильна чи неправильна Велика теорема Ферма. У лівій частині рівності (5)

змінні x, y, z – натуральні, а в правій вони є компонентами впорядкованих трійок (r_1, r_2, r_3) , де r_1, r_2, r_3 такі додатні дійсні числа, що $r_1^2 + r_2^2 = r_3^2$. Тому суперечність ми запрограмували, поєднавши знаком рівності вирази, задані в різних областях і з різними множинами значень.

Приклад 3. Як зробити з мухи слона?



Розв'язання. Нехай a (г) – маса мухи, b (г) – маса слона. Позначимо середнє арифметичне їх мас v :

$$\frac{a+b}{2} = v \Rightarrow a+b = 2v \Rightarrow a = 2v-b, \quad a-2v = -b$$

Перемножимо почленно дві останні рівності і отримаємо:

$$a(a-2v) = (2v-b)(-b)$$

$$a^2 - 2av = b^2 - 2bv$$

$$a^2 - 2av + v^2 = b^2 - 2bv + v^2$$

$$(a-v)^2 = (b-v)^2 \Rightarrow a-v = b-v \Rightarrow a = b.$$

Спробуємо знайти помилку у міркуваннях!

З рівності $|a-v|^2 = |b-v|^2 \Rightarrow |a-v| = |b-v|$, розкриваючи модуль, отримаємо, що $a-v = v-b$. Отже маса слона і мухи не рівні.

Приклад 4. Будь-яке число дорівнює своїй половині.

Розв'язання. Нехай $a = b$, або $a^2 = ab$, тоді $a^2 - b^2 = ab - b^2$, або

$(a+b)(a-b) = b(a-b)$, звідки $a+b = b$. Оскільки, за умовою $a = b$, то $2b = b$

або $b = \frac{1}{2} b$.

Софізм засновано на типовому випадку замаскованого виконання забороненої дії – ділення на нуль. Заборона ділення на нуль - одне з фундаментальних положень усієї математики.

Приклад 5. Довести, що $4 > 12$.

Розв'язання. До обох частин очевидної нерівності $7 > 5$ додамо (-8) , тоді $7-8 > 5-8$, або $-1 > -3$. Тепер, помноживши почленно останню нерівність на (-4) , дістанемо $(-1) \cdot (-4) > (-3) \cdot (-4)$, або $4 > 12$.

Однак відомо, що при множенні або діленні обох частин нерівності на від'ємне число знак нерівності змінюється на протилежний.

Приклад 6. Від'ємне число більше за додатне.

Розв'язання. Візьмемо два додатніх числа a і c . Порівняємо два

відношення: $\frac{a}{-c}$ і $\frac{-a}{c}$. Вони рівні, так як кожне з них дорівнює $-\frac{a}{c}$. Можна

скласти пропорцію: $\frac{a}{-c} = \frac{-a}{c}$. Але якщо в пропорції попередній член першого

відношення більший за другого, то попередній член другого відношення

також більший за наступного. У нашому випадку $\frac{a}{-c}$, отже, має бути $\frac{-a}{c}$,

тобто від'ємне число більше додатнього.

Помилка: дана властивість пропорції може бути неправильною, якщо деякі її члени від'ємні.

Приклад 7. «Дивне» рівняння.

Розв'язання. В обох частинах рівняння $15x - 30 = 12x - 24$ винесемо спільний множник за дужки: $15(x - 2) = 12(x - 2)$. Розділивши обидві частини рівняння на $(x - 2)$ одержимо, що $15 = 12$.

Помилка: праву і ліву частини рівняння поділили на нуль, тому, що корінь рівняння $x = 2$.

Приклад 8. Всі числа рівні між собою.

Розв'язання. Візьмемо числа $a < b$, тоді існує таке $c > 0$, що $a + c = b$.

Помножимо обидві частини на $(a - b)$ маємо:

$$(a + c)(a - b) = b(a - b),$$

$$a^2 + ca - ab - cb = ba - b^2,$$

cb перенесемо вправо, отримаємо:

$$a^2 + ca - ab = ba - b^2 + cb,$$

$$a(a + c - b) = b(a - b + c) \text{ звідси } a = b.$$

Помилка: за умовою $a + c = b$. Значить, $a + c - b = 0$. І вираз

$$a(a + c - b) = b(a + c - b) \text{ тотожний виразу } a \cdot 0 = b \cdot 0.$$



Приклад 9. Сірник вдвічі довший за телеграфного стовпа.

Розв'язання. Нехай a дм – довжина сірника і b дм – довжина стовпа. Різниця між b і a позначимо через c . Маємо $b - a = c$, $b = a + c$. Перемножимо обидві частини цих рівностей, отримаємо: $b^2 - ab = ca + c^2$. Віднімемо від обох частин bc . Отримаємо: $b^2 - ab - bc = ca + c^2 - bc$, або $b(b - a - c) = -c(b - a - c)$, звідки $b = -c$, але $c = b - a$, тому $b = a - b$, або $a = 2b$.

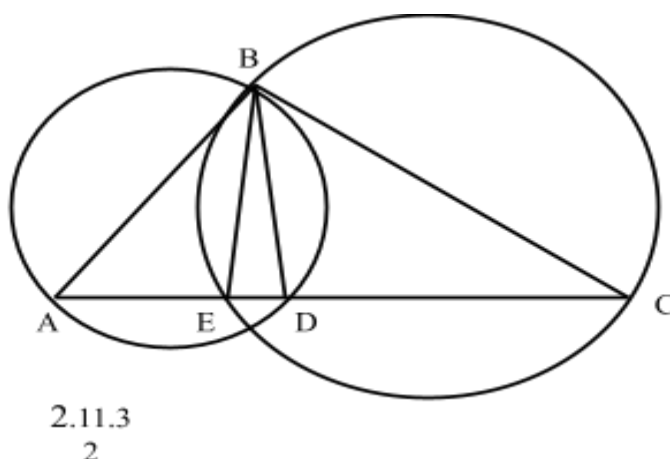
Помилка в тому, що у виразі $b(b - a - c) = -c(b - a - c)$ відбувається ділення на 0.

СОФІЗМИ ГЕОМЕТРІЇ

Процес пізнання людиною навколишнього світу можна порівняти з радісним торжеством, бо кожна розкрита таємниця зміцнює її віру у свої сили. Але на шляху переможної людської думки виникали величезні, здавалося б нездоланні перешкоди – задачі, перед якими були безсилі найвитонченіші міркування.

Давньогрецькі вчені натрапили на нерозв'язані задачі і в геометрії. Вони докладали чимало зусиль, щоб виявити механізми утворення таких загадок.

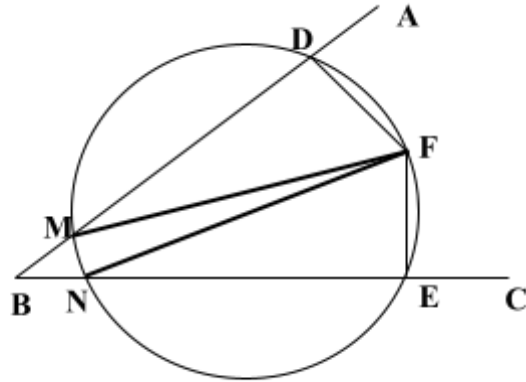
Приклад 1. Довести, що з точки B до прямої AC можна провести два перпендикуляри.



Розв'язання. Для цього візьмемо трикутник ABC . На сторонах AB і BC цього трикутника побудуємо як на діаметрах півкола. Нехай ці півкола перетинаються зі стороною AC в точках E і D . Проведемо відрізки BE і BD . Кут BEA прямий, бо спирається на діаметр, кут BDC також прямий. Отже, $BE \perp AC$ і $BD \perp AC$. Через точку B проходять два перпендикуляри до прямої AC .

Цей софізм створив задачу, яка по суті, є відповіддю на нього. Помилка – у малюнку. Круги, описані на двох сторонах трикутника як на діаметрах, перетинаються на третій стороні, або на її продовженні.

Приклад 2. Усяке коло має два центри.



Розв’язання. Побудуємо гострий кут ABC. На сторонах його візьмемо точки D та E і через них проведемо перпендикуляри до сторін кута. Нехай ці перпендикуляри перетинаються в точці F. Через три точки D, F, та E проведемо коло. Це коло перетне сторони кута в точках M та N. Відрізки MF та NF повинні бути діаметром побудованого кола, так як на них опираються вписані в це коло прямі кути MDF та NEF. Середини відрізків MF та NF повинні бути центрами побудованого кола. Тобто коло має два центра. Де помилка?

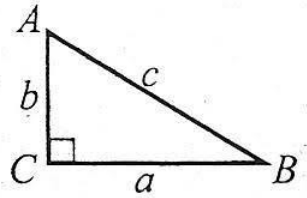
Коло повинно проходити через точку B, так як у чотирикутнику BDFE сума протилежних кутів D і F дорівнює 180° .

Приклад 3. Довести, що в прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів.

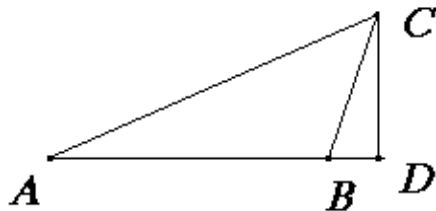
Розв’язання. Візьмемо прямокутний трикутник з катетами a та b , гіпотенузою c та гострим кутом α , протилежним до катету a . Маємо:

$a = c \sin \alpha$, $b = c \cos \alpha$, звідки $a^2 = c^2 \sin^2 \alpha$, $b^2 = c^2 \cos^2 \alpha$. Сумуючи відповідні

частини рівностей, отримуємо: $a^2 + b^2 = c^2(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)$. Але ж $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$, і тому $a^2 + b^2 = c^2$.



Як відомо, основна тригонометрична тотожність є наслідком з теореми Піфагора, тому доводити теорему на її підставі неможливо.



Приклад 4. Квадрат будь-якої сторони у будь-якому трикутнику дорівнює сумі квадратів двох інших сторін цього трикутника.

Розв'язання. Візьмемо довільний трикутник ABC і побудуємо ще прямокутний трикутник BCD . Тоді

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 \quad (1)$$

і

$$BC^2 = CD^2 + BD^2, \quad CD^2 = BC^2 - BD^2 \quad (2)$$

Підставимо значення з рівності (2) в рівність (1):

$$AC^2 = AD^2 + BC^2 - BD^2, \quad (3)$$

або

$$(4) \quad AC^2 - BC^2 = AD^2 - BD^2.$$

Але $AD = AB + BD$, тому $AD^2 - BD^2 = AB^2$. Підставивши в рівність (4) замість різниці $AD^2 - BD^2$ значення AB^2 , яке їй дорівнює, матимемо, $AC^2 - BC^2 = AB^2$ або $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

Допущено логічну помилку «не впливає», яка полягає в порушенні закону достатньої підстави – в процесі доведення тези висуваються аргументи, самі по собі правильні, але такі, що з них не випливає висловлювання, істинність якого потрібно довести. З рівності $AD = AB + BD$ випливає, що $AB = AD - BD$, але зовсім не випливає, що $AB^2 = AD^2 - BD^2$. Мало б бути: $AB^2 = AD^2 - 2AD \cdot BD + BD^2$.

СОФІЗМИ ЛОГІКИ

Крім математичних софізмів, існує безліч інших. Зрозуміти абсурдність таких тверджень простіше, але від цього вони не стають менш цікавими. Дуже багато софізмів виглядають як позбавлена сенсу і мети гра з мовою – гра, що спирається на багатозначність мовних виразів, їх неповноту, недомовленість, залежність їх значень від контексту. Ці софізми видаються особливо наївними і несерйозними. Пригадаємо слова жартівливої пісні англійських студентів, яка є не чим іншим, як софізмом.

Чим більше вчишся, тим більше знаєш.

Чим більше знаєш, тим більше забуваєш.

Чим більше забуваєш, тим менше знаєш.

Чим менше знаєш, тим менше забуваєш.

Але чим менше забуваєш, тим більше знаєш.

Так для чого вчитися?

Подані приклади мають особливий характер. Вони призначені не стільки для розв'язування, скільки для того, щоб дати поштовх до роздумів.



Приклад 1. Софізм Еватла.

Еватл брав уроки софістики у давньогрецького софіста Протагора за умови, що гонорар він сплатить тільки в тому випадку, якщо виграє свій перший судовий процес. Але після навчання Еватл не взявся вести жодного судового процесу і тому вважав, що може не платити гонорару Протагорові.

Учитель, погрожуючи подати на Еватла до суду, сказав: «Незалежно від того присудять судді платити мені гонорар чи ні, ти його обов'язково сплатиш. У першому випадку ти сплатиш за вироком суду, у другому – за нашою домовленістю».

На це Еватл, навчений Протагором мистецтву софістики, відповів: «Ні в першому, ні в другому випадку гонорару я не буду платити. Якщо мені присудять платити, то я не заплачу відповідно до нашої домовленості, бо програю свій перший судовий процес, а в другому випадку я не платитиму відповідно до вироку суду».

З погляду традиційної логіки софістичний висновок виник унаслідок порушення закону тотожності. Одну і ту ж домовленість Еватл розглядав у різних відношеннях. У першому випадку Еватл мав виступити на суді юристом, який програє свій перший судовий процес, у другому випадку – відповідачем, якого суд виправдав.

Приклад 2. Давньокитайські літературні джерела розповідають, що один мудрець, щоб переїхати на своєму білому коні через кордон, який переходити з кіньми заборонялося, застосував у розмові з прикордонником такі міркування: «Кінь може бути рудим. Білий кінь не може бути рудим. Отже, білий кінь не є конем». Прикордонник був так вражений правдоподібністю цього умовиводу, що пропустив хитрого мудреця через кордон. Де схитрував мудрець?

У першому реченні софізму йдеться про підмножину множини коней (множину рудих коней), а в останньому реченні маємо всю множину коней. Таким чином, у міркуваннях допущено помилку еквівокації (у міркуваннях використовують багатозначне ім'я предмета, то в одному, то в іншому значенні, вважаючи це ім'я однозначним), яка й зумовила неправильний висновок «білий кінь не є конем»

Приклад 3. Останні роки нашого життя коротші, ніж перші.

Відомо старий вислів: в молодості час йде повільніше, а в старості – швидше. Цей вислів можна довести математично. Дійсно, людина проживає протягом тридцяти років $\frac{1}{30}$ частину свого життя, протягом сорока років – $\frac{1}{40}$ частину, протягом п'ятдесяти – $\frac{1}{50}$ частину, протягом шестидесяти – $\frac{1}{60}$ частину. Цілком очевидно, що $\frac{1}{30} > \frac{1}{40} > \frac{1}{50} > \frac{1}{60}$, звідки зрозуміло, що останні роки нашого життя коротші перших.

Помилка: дійсно, $\frac{1}{30} > \frac{1}{40} > \frac{1}{50}$. Але невірним є твердження, що протягом тридцяти років людина проживає $\frac{1}{30}$ частину життя, вона проживає $\frac{1}{30}$ тільки тієї частини життя, яку він до цього моменту прожив, але саме частини, а не всього життя. Не можна порівнювати між собою частини різних відрізків часу.

Приклад 4. Купа (парадокс Евбуліда із Мілета, 1V ст. до н.е.).

Одне зерно купи не становить, додавши ще зернину, купи знову не матимемо. Як же дістати купу, додаючи кожного разу по одному зерну, з яких ні одне не становить купи?

Проблема виникає при спробі знайти відповідь на питання, коли «не купа» переходить в «кupu». Тобто, чи існує фіксована кількість елементів, коли здійснюється названий перехід. У парадоксі, по суті, використано повну математичну індукцію, яку не можна застосовувати до понять, обсяг яких не чітко визначено, а саме таким і є поняття «купа». Крім того, в парадоксі ігнорується також об'єктивна закономірність будь-якого явища, в процесі перебігу якого кількісні зміни на певному етапі зумовлюють якісні зміни. При

цьому нова якість («купа») зовсім не відгороджена від старої якості («не купи»).

Приклад 5. Напівпорожній і напівповний стакан.

Нехай є стакан, наповнений водою до половини. Тоді можна сказати, що склянка, наполовину повна дорівнює склянці наполовину порожній. Збільшуючи обидві частини рівності вдвічі, отримаємо, що склянка повна дорівнює склянці порожній. Чи вірно наведене судження?

Розбір софізму: зрозуміло, що наведене міркування невірне, так як в ньому застосовується неправомірна дія: збільшення вдвічі.



СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Андрієвська Г. М., Конфорович А. Г. Історія розвитку математики. – К.: Вища школа, 1991. – 143 с.
2. Анпілогова В. Й. Софізми. Їх місце в розвитку математичного мислення учнів / Математика в школах України. - № 30 – 2014.
3. Глушко Н.А. Подорож у світ математичних софізмів/ Математика в школах України. - № 11. – 2011.
4. Конфорович А. Г. Математичні софізми і парадокси.– К.: Вища школа, 1983. – 208 с.
5. Лоповок Л. М. Збірник математичних задач логічного характеру. – К.: Вища школа, 1972
6. http://vvpk.at.ua/publ/cikavinki/matematichni_sofizmi_paradoksi/4-1-0-15
7. <https://fs01.vseosvita.ua/01003inr-93d6.pdf>