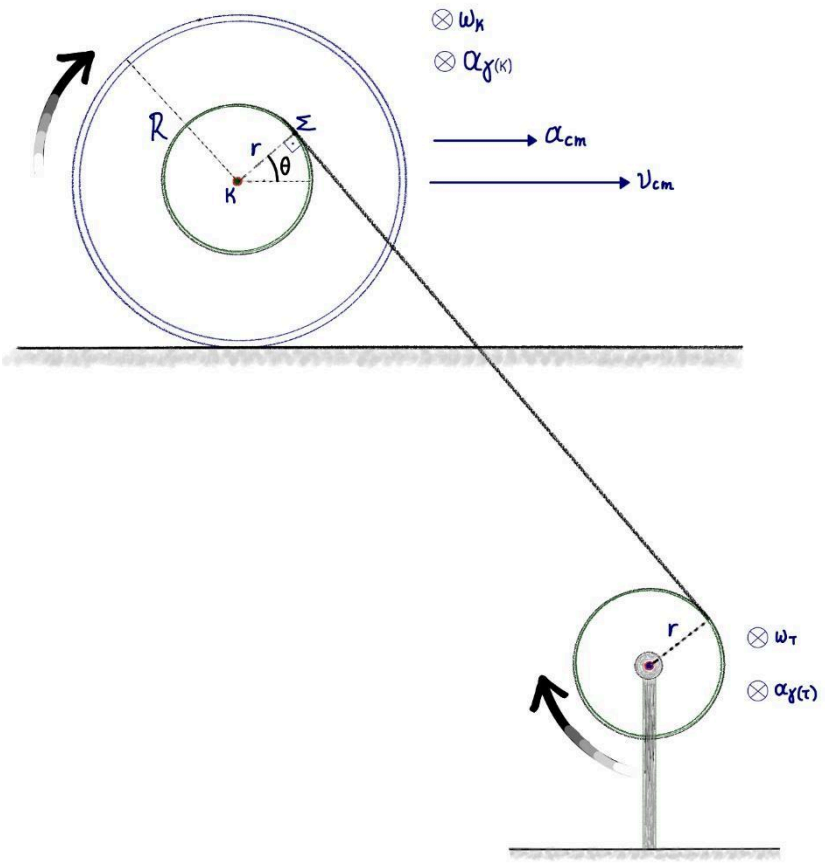
Ένα Β και ένα Δ θέμα πάνω στο ίδιο σενάριο

Β ΘΕΜΑ



Μία σταθερή τροχαλία ακτίνας r και ένας ομογενής κύλινδρος εξωτερικής ακτίνας $R = 2 \cdot r$ συνδέονται μέσω αβαρούς μη εκτατού νήματος. Το νήμα είναι τυλιγμένο πολλές φορές στην περιφέρεια της τροχαλίας και η άλλη του άκρη είναι τυλιγμένη στην εγκοπή ακτίνας r του κυλίνδρου. Ο κύλινδρος βρίσκεται σε οριζόντιο δάπεδο που διαθέτει κατάλληλο άνοιγμα ώστε να περνά το νήμα, χωρίς να έρχεται σε επαφή με αυτό.

Η τροχαλία περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση μέτρου $\alpha_{\gamma(\tau)}$, τυλίγοντας το νήμα ενώ αυτό παραμένει συνεχώς τεντωμένο και ο κύλινδρος εκτελεί κύλιση χωρίς ολίσθηση. Στο στιγμιότυπο του σχήματος, το ευθύγραμμο τμήμα του νήματος εφάπτεται στην εγκοπή στο σημείο Σ. Η γωνία που σχηματίζει η ακτίνα $\Κ\Σ$ (όπου $\Κ$ το κέντρο του κυλίνδρου) με την οριζόντια διεύθυνση είναι θ, με $\eta\mu\theta = 0,6$ και $\sigma\upsilon\nu\theta = 0,8$.

Τη στιγμή αυτή το μέτρο της επιτάχυνσης α_{cm} του κέντρου μάζας του κυλίνδρου ισούται με:

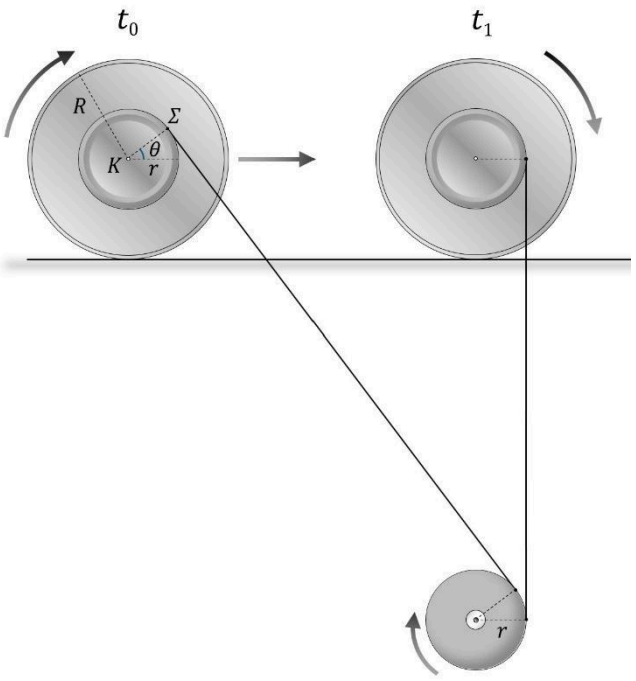
i. $\frac{10}{11}\alpha_{\gamma(\tau)} \cdot r$ *ii.* $\alpha_{\gamma(\tau)} \cdot R$ *iii.* $\frac{10}{13}\alpha_{\gamma(\tau)} \cdot r$

Β1. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση. (Μονάδες 2)

Β2. Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας. (Μονάδες 6)

Δ ΘΕΜΑ

Μία σταθερή τροχαλία ακτίνας $r = 3cm$ μπορεί να εκτελεί στροφική κίνηση χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο της. Στην περιφέρειά της έχουμε τυλίξει πολλές φορές ένα αβαρές και μη εκτατό νήμα. Η άλλη άκρη του νήματος είναι τυλιγμένη πολλές φορές στην εγκοπή ακτίνας r ενός ομογενούς κυλίνδρου. Ο κύλινδρος βρίσκεται πάνω σε οριζόντιο δάπεδο, έχει εξωτερική ακτίνα $R = 2{\cdot}r$ και το κέντρο του είναι το σημείο Κ. (Το δάπεδο του κυλίνδρου διαθέτει κατάλληλο άνοιγμα ώστε να περνά το νήμα, χωρίς να έρχεται σε επαφή με αυτό).



Ασκώντας κατάλληλη ροπή στην τροχαλία, αυτή αρχίζει να περιστρέφεται δεξιόστροφα, τυλίγοντας το νήμα, με αποτέλεσμα ο κύλινδρος να εκτελεί κύλιση χωρίς ολίσθηση πλησιάζοντας προς την τροχαλία ενώ, το νήμα παραμένει συνεχώς τεντωμένο.

Αρχικά, την χρονική στιγμή t_0 το νήμα εφάπτεται στην περιφέρεια της εγκοπής στο σημείο Σ. Η γωνία που σχηματίζει το ευθύγραμμο τμήμα ΚΣ με την οριζόντια διεύθυνση είναι θ $(\eta\mu\theta = 0,6 \ \kappa\alpha\iota \ \sigma\upsilon\nu\theta = 0,8)$. Τότε το μήκος του νήματος που δεν είναι τυλιγμένο στα δύο στερεά σώματα είναι l_0.

Κάποια μεταγενέστερη χρονική στιγμή t_1, ο κύλινδρος έχει πλησιάσει τόσο ώστε το τεντωμένο ευθύγραμμο τμήμα του νήματος να γίνει κατακόρυφο, με το νέο μήκος του να είναι $l_1 = 8{\cdot}r$.

Δ1. Να υπολογίσετε το αρχικό μήκος l_0 του ευθύγραμμου τμήματος του νήματος και την μετατόπιση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου από t_0 έως t_1. *(Μονάδες 7)*

Δ2. Να υπολογίσετε το μήκος του νήματος που ξετυλίχθηκε από τον κύλινδρο κατά την παραπάνω χρονική διάρκεια. *(Μονάδες 5)*

Δ3. Να υπολογίσετε τη γωνιακή μετατόπιση $\Delta\theta_2$ (σε rad) που διέγραψε η τροχαλία στο ίδιο χρονικό διάστημα. *(Μονάδες 7)*

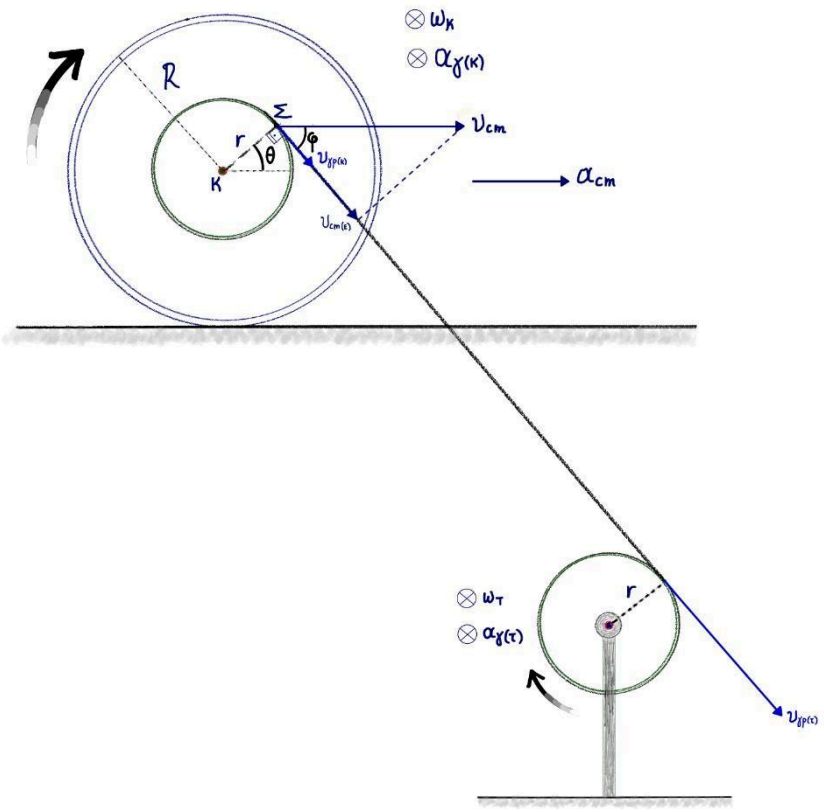
Δ4. Ας υποθέσουμε τώρα ότι η τροχαλία ξεκινά από την ηρεμία και περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση μέτρου $a_{\gamma\omega\nu} = 0,5\frac{r}{s^2}$. Να υπολογίσετε το μέτρο της μέσης επιτάχυνσης του κέντρου μάζας του κυλίνδρου στο χρονικό διάστημα από την εκκίνηση μέχρι τη στιγμή που το νήμα γίνεται κατακόρυφο. *(Μονάδες 6)*

Ενδεικτικές Λύσεις

ΘΕΜΑ Β

Β1. Σωστή επιλογή είναι η **(i)**.

Β2. Δικαιολόγηση:



· *Επειδή το νήμα εφάπτεται στην εγκοπή στο Σ, είναι κάθετο στην ακτίνα ΚΣ. Αφού το ΚΣ σχηματίζει γωνία* θ *με την οριζόντια διεύθυνση, η γωνία* ϕ *που σχηματίζει το* ***νήμα*** *με την οριζόντια διεύθυνση είναι η συμπληρωματική της:*

$\phi = 90^{\circ} - \theta.$

Επομένως, ισχύει: $\sigma\upsilon\nu\phi = \eta\mu\theta = 0,6.$

· *Για να παραμένει το νήμα τεντωμένο, η ταχύτητα με την οποία τυλίγεται στην τροχαλία* ($\upsilon_{\gamma\rho(\tau)}$) *πρέπει να είναι ίση με την ταχύτητα του νήματος που «προσφέρει» ο κύλινδρος. Ο κύλινδρος προσφέρει ταχύτητα λόγω της μεταφορικής του κίνησης* ($\upsilon_{cm(\varepsilon)}$: *προβολή της* υ_{cm} *κατά μήκος του νήματος) και λόγω του ξετυλίγματος από την εγκοπή* ($\upsilon_{\gamma\rho(\kappa)} = \omega_\kappa \cdot r$).

$$\upsilon_{\gamma\rho(\tau)} = \upsilon_{cm(\varepsilon)} + \upsilon_{\gamma\rho(\tau)} \Rightarrow \upsilon_{\gamma\rho(\tau)} = \upsilon_{cm} \cdot \sigma\upsilon\nu\phi + \omega_\kappa \cdot r \Rightarrow \omega_\tau \cdot r = \upsilon_{cm} \cdot 0,6 + \omega_\kappa \cdot r \quad (1)$$

Ο κύλινδρος εκτελεί κύλιση χωρίς ολίσθηση, άρα

$$\omega_\kappa = \frac{\upsilon_{cm}}{R} = \frac{\upsilon_{cm}}{2r}$$

$$(1) \Rightarrow \omega_\tau \cdot r = 0,6 \cdot \upsilon_{cm} + \frac{\upsilon_{cm}}{2r} \cdot r \Rightarrow \omega_\tau \cdot r = 0,6 \cdot \upsilon_{cm} + 0,5 \cdot \upsilon_{cm} \Rightarrow \omega_\tau \cdot r = 1,1 \cdot \upsilon_{cm} \Rightarrow$$

$$\upsilon_{cm} = \frac{1}{1,1}\omega_\tau \cdot r$$

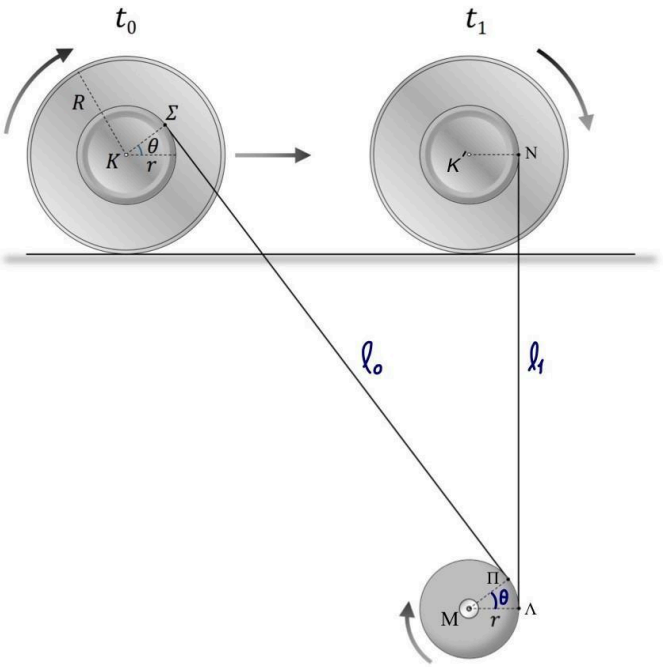
Παραγωγίζοντας ως προς τον χρόνο (t): $\frac{d\upsilon_{cm}}{dt} = \frac{r}{1,1} \cdot \frac{d\omega_\tau}{dt}$

Με $\frac{d\upsilon_{cm}}{dt} = \alpha_{cm}$ και $\frac{d\omega_\tau}{dt} = \alpha_{\gamma(\tau)}$ προκύπτει:

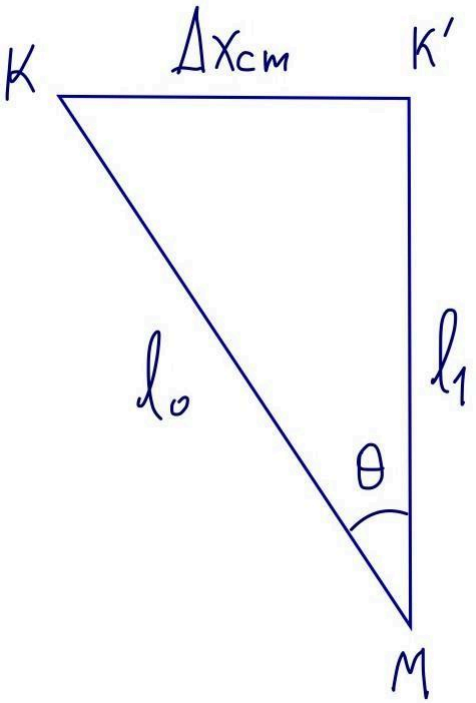
$$\alpha_{cm} = \frac{1}{1,1}\alpha_{\gamma(\tau)} \cdot r \Rightarrow \alpha_{cm} = \frac{10}{11}\alpha_{\gamma(\tau)} \cdot r$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.



- Μ: Το κέντρο της τροχαλίας.
- Π: Το σημείο της τροχαλίας όπου αρχικά εφάπτεται το νήμα.
- Λ: Το σημείο της τροχαλίας όπου τελικά εφάπτεται το νήμα.
- Σ: Το σημείο του κυλίνδρου όπου αρχιικά εφάπτεται το νήμα.
- Ν: Το σημείο του κυλίνδρου όπου τελικά εφάπτεται το νήμα.
- Το τμήμα $(M\Pi)$ με το $(M\Lambda)$ σχηματίζουν γωνία θ (παράλληλες πλευρές με τη γωνία που δίνεται).
- Το l_0 με το l_1 επίσης σχηματίζουν γωνία θ, διότι το l_0 είναι κάθετο στο $(M\Pi)$ και το l_1 κάθετο στο $(M\Lambda)$.
- Η αρχική απόσταση των κέντρων κυλίνδρου - τροχαλίας (KM) είναι ίση με l_0, διότι οι ακτίνες του κυλίνδρου και της εγκοπής είναι ίσες και το νήμα εφάπτεται στις περιφέρειές τους.
- Για τους ίδιους λόγους, η τελική απόσταση των κέντρων $\left(K^{'}\mathrm{M}\right)$ είναι l_1.



Από το ορθογώνιο τρίγωνο που σχηματίζεται:

$$\text{συν}\theta = \frac{l_1}{l_0} \Rightarrow l_0 = \frac{l_1}{\text{συν}\theta} \Rightarrow l_0 = \frac{24\,cm}{0{,}8} \Rightarrow l_0 = 30\,cm$$

Για τη μετατόπιση του κέντρου μάζας Δx_{cm}:

$$\text{ημ}\theta = \frac{\Delta x_{cm}}{l_0} \Rightarrow \Delta x_{cm} = 0{,}6 \cdot l_0 = 0{,}6 \cdot 30 \Rightarrow$$

$$\Delta x_{cm} = 18\,cm$$

Δ2.

Για τη γωνιακή μετατόπιση του κυλίνδρου $\Delta\theta_1$:

$$\Delta x_{cm} = R \cdot \Delta\theta_1 \Rightarrow \Delta\theta_1 = \frac{\Delta x_{cm}}{R} = \frac{18}{6} = 3\,rad$$

Συνεπώς ξετυλίγεται νήμα μήκους

$$\Delta l_1 = \Delta\theta_1 \cdot r = 3 \cdot 3cm = 9\,cm$$

Δ3.

Έστω Δl_1 το μήκος του νήματος που ξετυλίγεται από τον κύλινδρο και Δl_2 το μήκος που τυλίγεται στην τροχαλία. Το τελικό μήκος του νήματος l_1 δίνεται από τη σχέση:

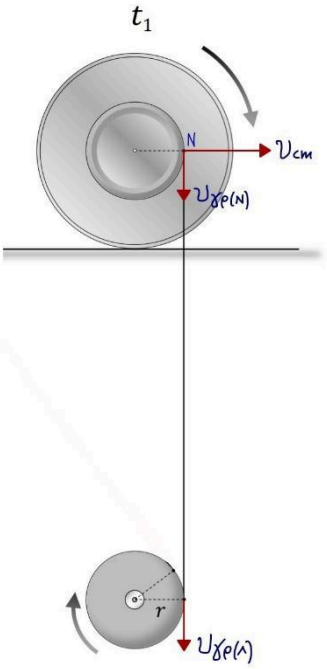
$$l_1 = l_0 + \Delta l_1 - \Delta l_2 \Rightarrow l_1 = l_0 + \Delta\theta_1 \cdot r - \Delta\theta_2 \cdot r$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές:

$$24\,cm = 30\,cm + 3 \cdot 3\,cm - \Delta\theta_2 \cdot 3\,cm$$

$$24 = 30 + 9 - 3\cdot\Delta\theta_2 \Rightarrow 3\cdot\Delta\theta_2 = 15 \Rightarrow \Delta\theta_2 = 5\,rad$$

Δ4.



Για τη χρονική διάρκεια της κίνησης Δt:

$$\Delta\theta_2 = \frac{1}{2}\alpha_\gamma \cdot \Delta t^2 \Rightarrow \Delta t^2 = \frac{2\cdot\Delta\theta_2}{\alpha_\gamma} = \frac{2\cdot 5}{0{,}5} = 20 \Rightarrow \Delta t = 2\sqrt{5}\,s$$

Γωνιακή ταχύτητα τροχαλίας τη στιγμή t_1:

$$\omega_1 = \alpha_\gamma \cdot \Delta t = 0{,}5 \cdot 2\sqrt{5} = \sqrt{5}\,rad/s$$

Για να είναι το νήμα τεντωμένο, πρέπει οι ταχύτητες στα άκρα του να είναι ίσες. Τη χρονική στιγμή t_1 το νήμα είναι κατακόρυφο. Συνεπώς, η οριζόντια μεταφορική ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου (υ_{cm}) είναι κάθετη στο νήμα και δεν συνεισφέρει στην ταχύτητά του. Ο ρυθμός που ξετυλίγεται το νήμα οφείλεται αποκλειστικά στη στροφική κίνηση του κυλίνδρου. Άρα ισχύει:

$$\upsilon_{\gamma\rho(\Lambda)} = \upsilon_{\gamma\rho(N)} \Rightarrow \omega_1 \cdot r = \omega_{\kappa\upsilon\lambda} \cdot r \Rightarrow \omega_{\kappa\upsilon\lambda} = \omega_1 = \sqrt{5}\,rad/s$$

Ταχύτητα κέντρου μάζας κυλίνδρου τη στιγμή t_1:

$$\upsilon_{cm} = \omega_{\kappa\upsilon\lambda} \cdot R = \sqrt{5} \cdot 0{,}06 = 0{,}06\sqrt{5}\,m/s$$

Μέση επιτάχυνση κέντρου μάζας:

$$\alpha_{cm(\mu\acute{\varepsilon}\sigma\eta)} = \frac{\Delta\upsilon_{cm}}{\Delta t} = \frac{0{,}06\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = 0{,}03\,m/s^2$$

kostashagi@gmail.com