حلول سلسلة تمارين المتتاليات 3 تسيير و إقتصاد

حل التمرين الرابع

a ، b و c ثلاث حدود متتابعة من متتالية هندسية . أحسب a ، b و c علما أن $\begin{cases} a+b+c=36,75.....(1) \\ abc=343.....(2) \end{cases}$.

بما أن a ، b و c ثلاث حدود متتابعة من متتالية هندسية فإن $b^2=ac$ و

بالتعويض في (2) نجد : $b^3=343$ ومنه $b=7$

بالتعويض في (1) نجد $a+7+c=36,75$ أي $a+c=29,75$

لدينا : $c=bq=7q$ و $a=\frac{b}{q}=\frac{7}{q}$ ومنه

$a+c=29,75$ معناه $\frac{7}{q}+7q=29,75$ أي

$7q^2-29,75q+7=0$

$\Delta=(29,75)^2-4(7\times 7)=689,0625$ ومنه $\sqrt{\Delta}=26.25$

$q_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{29.75-26.25}{14}=\frac{3.5}{14}=\frac{7}{28}=\frac{1}{4}$

$q_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{29.75+26.25}{14}=\frac{56}{14}=4$

لما : $q=\frac{1}{4}$ نجد $a=\frac{7}{q}=\frac{7}{\frac{1}{4}}=7\times\frac{4}{1}=28$

و $c=7q=7\times\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$

ومنه : $(a;b;c)=\left(28\ ;\ 7\ ;\frac{7}{4}\right)$ و الأساس $q=\frac{1}{4}$

لما : $q=4$ نجد $a=\frac{7}{q}=\frac{7}{4}$

و $c=7q=7\times 4=28$

ومنه : $(a;b;c)=\left(\frac{7}{4}\ ;\ 7\ ;28\right)$ و الأساس $q=4$

حل التمرين الخامس :

1) احسب : u_2 ، v_0 .

لما $n=0$ نجد :

$u_2=6u_1-5\,u_0=6(1)-5\,(5)=6-25=-19$

$v_0=u_1-u_0=1-5=-4$

2) تبين أن المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية (يطلب تعيين أساسها)

(v_n) متتالية هندسية معناه يوجد عدد حقيقي $q\in\mathbb{R}^*$ بحيث

$v_{n+1}=q\,v_n$

$$\begin{aligned} v_{n+1}&=u_{n+2}-u_{n+1}=6u_{n+1}-5\,u_n-u_{n+1} \\ &=5u_{n+1}-5\,u_n=5(u_{n+1}-u_n)=5v_n \end{aligned}$$

إذن من اجل كل $n\in\mathbb{N}$: $v_{n+1}=5v_n$ ومنه $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها $q=5$ و حدها الأول $v_0=-4$

3) استنتج v_n بدلالة n .

لدينا من اجل كل $n\in\mathbb{N}$: $v_n=v_0\times q^n$ ومنه $v_n=(-4)\times 5^n$

4) احسب المجموع : $S_n=v_0+v_1+...+v_{n-1}$.

$$S_n=v_0\times\frac{q^{(n-1)-0+1}-1}{q-1}=(-4)\times\frac{5^n-1}{5-1}$$

$$=(-4)\times\frac{5^n-1}{4}=-(5^n-1)=1-5^n$$

لدينا :

التمرين السادس

الحل:

1) حساب : u_3, u_2, u_1 .

$$u_1 = \frac{1}{4}u_0 + 3 = \frac{1}{4} + 3 = \frac{13}{4}$$

$$u_2 = \frac{1}{4}u_1 + 3 = \frac{1}{4} \times \frac{13}{4} + 3 = \frac{13}{16} + 3 = \frac{61}{16}$$

$$u_3 = \frac{1}{4}u_2 + 3 = \frac{1}{4} \times \frac{61}{16} + 3 = \frac{61}{64} + 3 = \frac{253}{64}$$

2) برهان بالتراجع أن (u_n) متزايدة تماما .

(u_n) متزايدة تماما يعني انه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} > u_n$

من أجل كل $n = 0$: أي : $u_1 > u_0$ $\frac{13}{4} > 1$ (صحيحة)

نفرض أن $p(n)$ صحيحة أي $u_{n+1} > u_n$ $(u_{n+1} - u_n > 0)$

ونثبت أن $p(n+1)$ صحيحة أي $(u_{n+2} > u_{n+1})$ أي $u_{n+2} - u_{n+1} > 0$

$$u_{n+2} - u_{n+1} = \left(\frac{1}{4}u_{n+1} + 3\right) - \left(\frac{1}{4}u_n + 3\right)$$

$$= \frac{1}{4}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n = \frac{1}{4}(u_{n+1} - u_n) > 0$$

لدينا :

لأنه لدينا فرضا : $(u_{n+1} - u_n > 0)$ ومنه $p(n+1)$ صحيحة

إذن (u_n) متزايدة تماما .

3) تبيين أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد 4

(u_n) محدودة من الأعلى بالعدد 4 يعني انه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_n < 4$

نستعمل البرهان بالتراجع

لتكن الخاصية $p(n)$: من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_n < 4$

✔ لما $n = 0$ نجد: $u_0 < 4$ أي $1 < 4$ (صحيحة)

✔ نفرض أن $p(n)$ صحيحة أي $u_n < 4$ $(u_n - 4 < 0)$

ونثبت أن

$p(n+1)$ صحيحة أي $u_{n+1} < 4$ $(u_{n+1} - 4 < 0)$

لدينا : $u_{n+1} - 4 = \frac{1}{4}u_n + 3 - 4 = \frac{1}{4}u_n - 1 = \frac{1}{4}(u_n - 4) < 0$

لأنه لدينا فرضا $(u_n - 4 < 0)$ ومنه $p(n+1)$ صحيحة

إذن : من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_n < 4$

الإستنتاج :بما (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$ و محدودة من الأعلى فهي متقاربة .

4) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$: $v_n = u_n - 4$

1- تبين أن (v_n) متتالية هندسية (يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

(v_n) متتالية هندسية معناه يوجد عدد حقيقي $q \in \mathbb{R}^*$ بحيث $v_{n+1} = q\, v_n$

$$v_{n+1} = v_{n+1} - 4 = \frac{1}{4}v_n + 3 - 4$$

$$= \frac{1}{4}v_n - 1 = \frac{1}{4}(v_n - 4) = \frac{1}{4}\, v_n$$

إذن من اجل كل $n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} = \frac{1}{4}v_n$ ومنه $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{4}$ و حدها الأول $v_0 = u_0 - 4 = 1 - 4 = -3$

2- كتابة v_n بدلالة n .

لدينا من اجل كل $n \in \mathbb{N}$: $v_n = v_0 \times q^n$ ومنه $v_n = (-3) \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$

إستنتاج u_n بدلالة n

لدينا : $v_n = u_n - 4$ ومنه $u_n = v_n + 4 = (-3)\times\left(\frac{1}{4}\right)^n + 4$

حساب : $s_n = v_o + v_1 + \ldots + v_n$

$$S_n = v_0 \times \frac{1-q^{n-0+1}}{1-q}$$

$$= (-3)\times\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}} = -4\times\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right] = 4\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - 4$$

استنتج المجموع : $t_n = u_o + u_1 + \ldots + u_n$

$u_n = v_n + 4$ ومنه :

$$t_n = u_o + u_1 + \ldots + u_n$$
$$= (v_0 + 4) + (v_1 + 4) + \ldots\ldots + (v_n + 4)$$
$$= (v_o + v_1 + \ldots + v_n) + \underbrace{(4 + 4 + \ldots\ldots + 4)}_{n+1}$$
$$= S_n + 4(n+1)$$
$$= 4\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - 4 + 4(n+1) = 4\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} + 4n$$

التمرين السابع :

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\begin{cases} u_0 = 2\ ,\ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + 2\,u_n \quad ,n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

.

1) احسب : u_2 ، u_3 .

$$u_2 = u_1 + 2u_0 = 1 + 4 = 5$$

$$u_3 = u_2 + 2u_1 = 5 + 2\times 1 = 7$$

2) تبيين أن المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية أساسها 2 حيث

$v_n = u_{n+1} + u_n$

(v_n) متتالية هندسية معناه يوجد عدد حقيقي $q \in \mathbb{R}^*$ بحيث

$v_{n+1} = q\,v_n$

$$v_{n+1} = u_{n+2} + u_{n+1} = u_{n+1} + 2\,u_n + u_{n+1}$$
$$= 2u_{n+1} + 2\,u_n = 2(u_{n+1} + u_n) = 2\,v_n$$

إذن من اجل كل $n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} = 2\,v_n$ ومنه $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها $q = 2$ و حدها الأول $v_0 = u_1 + u_0 = 3$

3) تبيين أن المتتالية $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية حيث

$$w_n = -\frac{1}{2}u_{n+1} + u_n$$

(w_n) متتالية هندسية معناه يوجد عدد حقيقي $q \in \mathbb{R}^*$ بحيث

$w_{n+1} = q\,w_n$

$$w_{n+1} = -\frac{1}{2}u_{n+2} + u_{n+1} = -\frac{1}{2}(u_{n+1} + 2\,u_n) + u_{n+1}$$
$$= -\frac{1}{2}u_{n+1} - u_n + u_{n+1} = \frac{1}{2}u_{n+1} - u_n = -\left(-\frac{1}{2}u_{n+1} + u_n\right)$$
$$= -w_n$$

إذن من اجل كل $n \in \mathbb{N}$: $w_{n+1} = -w_n$ ومنه $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها $q = -1$ و حدها الأول

$$w_0 = -\frac{1}{2}u_1 + u_0 = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}$$

4) ا) كتابة v_n و w_n بدلالة n .

لدينا من اجل كل $n \in \mathbb{N}$: $v_n = v_0 \times q^n$ ومنه $v_n = 2\times 3^n$

لدينا من اجل كل $n \in \mathbb{N}$: $w_n = w_0 \times q^n$ ومنه

$$w_n = \left(\frac{3}{2}\right)\times(-1)^n$$

ب) استنتاج u_n بدلالة n

لدينا : $\begin{cases} v_n = u_{n+1} + u_n \\ w_n = -\frac{1}{2}u_{n+1} + u_n \end{cases}$ ومنه

$$\begin{cases} v_n = u_{n+1} + u_n .....(1) \\ 2w_n = -u_{n+1} + 2u_n .....(2) \end{cases}$$

بالجمع طرف إلى طرف نجد : $v_n + 2w_n = 3u_n$ ومنه

$$u_n = \frac{1}{3}(v_n + 2w_n)$$

أي :

$$u_n = \frac{1}{3}\left(2\times 3^n + 2\left(\frac{3}{2}\right)\times(-1)^n\right) = 2\times 3^{n-1} + (-1)^n$$

ثم $\lim u_n = +\infty$. لأن $\lim_{n\to+\infty}\left(2\times 3^{n-1}\right) = +\infty$

5) احسب المجموع : $S_n = U_2 + U_3 + ... + U_n$.

التمرين الثامن

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}$$

.

1. أحسب أربعة حدود الأولى.
2. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \le u_n \le 1$.
3. برهن أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما..إذا كانت المتتالية متقاربة. فما هي نهايتها؟

لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - 1$

- أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.
- عبر عن v_n و u_n بدلالة n ثم أحسب نهاية كل منهما و ماذا تستنتج؟

أحسب بدلالة n كل من $Y_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ و

$S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$