حلول سلسلة تمارين المتتاليات 3 تسيير و إقتصاد

حل التمرين الرابع

a ، b و c ثلاث حدود متتابعة من متتالية هندسية . أحسب a ، b و c علما أن

$$\begin{cases} a+b+c=36,75 ......(1) \\ abc=343............(2) \end{cases}.$$

بما أن a ، b و c ثلاث حدود متتابعة من متتالية هندسية فإن $b^2=ac$ و

بالتعويض في (2) نجد : $b^3=343$ ومنه $b=7$

بالتعويض في (1) نجد $a+7+c=36,75$ أي $a+c=29,75$

لدينا : $c=bq=7q$ و $a=\frac{b}{q}=\frac{7}{q}$ ومنه

$a+c=29,75$ معناه $\frac{7}{q}+7q=29,75$ أي

$$7q^2-29,75q+7=0$$

$\Delta=(29,75)^2-4(7\times 7)=689,0625$ ومنه $\sqrt{\Delta}=26.25$

$$q_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{29.75-26.25}{14}=\frac{3.5}{14}=\frac{7}{28}=\frac{1}{4}$$

$$q_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{29.75+26.25}{14}=\frac{56}{14}=4$$

لما : $q=\frac{1}{4}$ نجد $a=\frac{7}{q}=\frac{7}{\frac{1}{4}}=7\times\frac{4}{1}=28$

و $c=7q=7\times\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$

ومنه : $(a;b;c)=\left(28\ ;\ 7\ ;\frac{7}{4}\right)$ و الأساس $q=\frac{1}{4}$

لما : $q=4$ نجد $a=\frac{7}{q}=\frac{7}{4}$

و $c=7q=7\times 4=28$

ومنه : $(a;b;c)=\left(\frac{7}{4}\ ;\ 7\ ;28\right)$ و الأساس $q=4$

حل التمرين الخامس :

1) احسب : u_2 ، v_0 .

لما $n=0$ نجد :

$$u_2=6u_1-5\,u_0=6(1)-5\,(5)=6-25=-19$$

$$v_0=u_1-u_0=1-5=-4$$

2) تبين أن المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية (يطلب تعيين أساسها)

(v_n) متتالية هندسية معناه يوجد عدد حقيقي $q\in\mathbb{R}^*$ بحيث

$$v_{n+1}=q\,v_n$$

$$\begin{aligned} v_{n+1}&=u_{n+2}-u_{n+1}=6u_{n+1}-5\,u_n-u_{n+1} \\ &=5u_{n+1}-5\,u_n=5(u_{n+1}-u_n)=5v_n \end{aligned}$$

إذن من اجل كل $n\in\mathbb{N}$: $v_{n+1}=5v_n$ ومنه $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها $q=5$ و حدها الأول $v_0=-4$

3) استنتج v_n بدلالة n .

لدينا من اجل كل $n\in\mathbb{N}$: $v_n=v_0\times q^n$ ومنه $v_n=(-4)\times 5^n$

4) احسب المجموع : $S_n=v_0+v_1+...+v_{n-1}$.

لدينا :

$$\begin{aligned} S_n&=v_0\times\frac{q^{(n-1)-0+1}-1}{q-1}=(-4)\times\frac{5^n-1}{5-1} \\ &=(-4)\times\frac{5^n-1}{4}=-(5^n-1)=1-5^n \end{aligned}$$

التمرين السادس

الحل:

1) **حساب :** u_3,u_2,u_1 .

$$u_1=\frac{1}{4}u_0+3=\frac{1}{4}+3=\frac{13}{4}$$

$$u_2=\frac{1}{4}u_1+3=\frac{1}{4}\times\frac{13}{4}+3=\frac{13}{16}+3=\frac{61}{16}$$

$$u_3=\frac{1}{4}u_2+3=\frac{1}{4}\times\frac{61}{16}+3=\frac{61}{64}+3=\frac{253}{64}$$

2) برهان بالتراجع أن (u_n) متزايدة تماما .

(u_n) متزايدة تماما يعني انه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}>u_n$

من أجل كل $n=0$: $u_1>u_0$ أي : $\frac{13}{4}>1$ (صحيحة)

نفرض أن $p(n)$ صحيحة أي $u_{n+1}>u_n$ $(u_{n+1}-u_n>0)$

ونثبت أن $p(n+1)$ صحيحة أي $(u_{n+2}>u_{n+1})$ أي $u_{n+2}-u_{n+1}>0$

لدينا :

$$u_{n+2}-u_{n+1}=\left(\frac{1}{4}u_{n+1}+3\right)-\left(\frac{1}{4}u_n+3\right)$$
$$=\frac{1}{4}u_{n+1}-\frac{1}{4}u_n=\frac{1}{4}(u_{n+1}-u_n)>0$$

لأنه لدينا فرضا : $(u_{n+1}-u_n>0)$ ومنه $p(n+1)$ صحيحة

إذن (u_n) متزايدة تماما .

3) تبيين أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد 4

(u_n) محدودة من الأعلى بالعدد 4 يعني انه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $u_n<4$

نستعمل البرهان بالتراجع

لتكن الخاصية $p(n)$: من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $u_n<4$

✔ لما $n=0$ نجد: $u_0<4$ أي $1<4$ (صحيحة)

✔ نفرض أن $p(n)$ صحيحة أي $u_n<4$ $(u_n-4<0)$

ونثبت أن $p(n+1)$ صحيحة أي $u_{n+1}<4$ $(u_{n+1}-4<0)$

لدينا :

$$u_{n+1}-4=\frac{1}{4}u_n+3-4=\frac{1}{4}u_n-1=\frac{1}{4}(u_n-4)<0$$

لأنه لدينا فرضا $(u_n-4<0)$ ومنه $p(n+1)$ صحيحة

إذن : من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $u_n<4$

الإستنتاج :بما (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$ و محدودة من الأعلى فهي متقاربة .

4) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$: $v_n=u_n-4$

1- تبين أن (v_n) متتالية هندسية (يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

(v_n) متتالية هندسية معناه يوجد عدد حقيقي $q\in\mathbb{R}^*$ بحيث $v_{n+1}=q\,v_n$

$$v_{n+1}=v_{n+1}-4=\frac{1}{4}v_n+3-4$$
$$=\frac{1}{4}v_n-1=\frac{1}{4}(v_n-4)=\frac{1}{4}v_n$$

إذن من اجل كل $n\in\mathbb{N}$: $v_{n+1}=\frac{1}{4}v_n$ ومنه $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{4}$ و حدها الأول $v_0=u_0-4=1-4=-3$

2- كتابة v_n بدلالة n .

لدينا من اجل كل $n\in\mathbb{N}$: $v_n=v_0\times q^n$ ومنه $v_n=(-3)\times\left(\frac{1}{4}\right)^n$

إستنتاج u_n بدلالة n

لدينا : $v_n = u_n - 4$ ومنه $u_n = v_n + 4 = (-3)\times\left(\frac{1}{4}\right)^n + 4$

حساب : $s_n = v_o + v_1 + ... + v_n$

$$S_n = v_0 \times \frac{1-q^{n-0+1}}{1-q}$$

$$= (-3)\times\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}} = -4\times\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right] = 4\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - 4$$

استنتج المجموع : $t_n = u_o + u_1 + ... + u_n$

ومنه : $u_n = v_n + 4$

$$\begin{aligned} t_n &= u_o + u_1 + ... + u_n \\ &= (v_0 + 4) + (v_1 + 4) + ... + (v_n + 4) \\ &= (v_o + v_1 + ... + v_n) + \underbrace{(4 + 4 + ... + 4)}_{n+1} \\ &= S_n + 4(n+1) \\ &= 4\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - 4 + 4(n+1) = 4\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} + 4n \end{aligned}$$

التمرين السابع :

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\begin{cases} u_0 = 2 \ , \ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n \quad , n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

.

1) احسب : u_2 ، u_3 .

$$u_2 = u_1 + 2u_0 = 1 + 4 = 5$$

$$u_3 = u_2 + 2u_1 = 5 + 2\times 1 = 7$$

2) تبيين أن المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية أساسها حيث 2

$$v_n = u_{n+1} + u_n$$

(v_n) متتالية هندسية معناه يوجد عدد حقيقي $q\in\mathbb{R}^*$ بحيث

$$v_{n+1} = q\,v_n$$

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+2} + u_{n+1} = u_{n+1} + 2u_n + u_{n+1} \\ &= 2u_{n+1} + 2u_n = 2(u_{n+1} + u_n) = 2v_n \end{aligned}$$

إذن من اجل كل $n\in\mathbb{N}$: $v_{n+1} = 2v_n$ ومنه $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها $q = 2$ و حدها الأول $v_0 = u_1 + u_0 = 3$

3) تبيين أن المتتالية $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية حيث

$$w_n = -\frac{1}{2}u_{n+1} + u_n$$

(w_n) متتالية هندسية معناه يوجد عدد حقيقي $q\in\mathbb{R}^*$ بحيث

$$w_{n+1} = q\,w_n$$

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= -\frac{1}{2}u_{n+2} + u_{n+1} = -\frac{1}{2}(u_{n+1} + 2u_n) + u_{n+1} \\ &= -\frac{1}{2}u_{n+1} - u_n + u_{n+1} = \frac{1}{2}u_{n+1} - u_n = -\left(-\frac{1}{2}u_{n+1} + u_n\right) \\ &= -w_n \end{aligned}$$

إذن من اجل كل $n\in\mathbb{N}$: $w_{n+1} = -w_n$ ومنه $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها $q = -1$ و حدها الأول

$$w_0 = -\frac{1}{2}u_1 + u_0 = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}$$

4) ا) كتابة v_n و w_n بدلالة n .

لدينا من اجل كل $n\in\mathbb{N}$: $v_n = v_0\times q^n$ ومنه $v_n = 2\times 3^n$

لدينا من اجل كل $n\in\mathbb{N}$: $w_n = w_0\times q^n$ ومنه

$$w_n = \left(\frac{3}{2}\right)\times(-1)^n$$

ب) استنتاج u_n بدلالة n

لدينا : $\begin{cases} v_n = u_{n+1} + u_n \\ w_n = -\frac{1}{2}u_{n+1} + u_n \end{cases}$ ومنه

$$\begin{cases} v_n = u_{n+1} + u_n \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ 2w_n = -u_{n+1} + 2u_n \ldots\ldots(2) \end{cases}$$

بالجمع طرف إلى طرف نجد : $v_n + 2w_n = 3u_n$ ومنه

$$u_n = \frac{1}{3}(v_n + 2w_n)$$

أي :

$$u_n = \frac{1}{3}\left(2\times 3^n + 2\left(\frac{3}{2}\right)\times(-1)^n\right) = 2\times 3^{n-1} + (-1)^n$$

ثم $\lim \ u_n = +\infty$. لأن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2\times 3^{n-1}\right) = +\infty$

5) احسب المجموع : $S_n = U_2 + U_3 + \ldots + U_n$.

التمرين الثامن

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}$$.

1. أحسب أربعة حدود الأولى.
2. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \le u_n \le 1$.
3. برهن أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما..إذا كانت المتتالية متقاربة. فما هي نهايتها؟

لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - 1$

- أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.
- عبر عن v_n و u_n بدلالة n ثم أحسب نهاية كل منهما و ماذا تستنتج؟
- أحسب بدلالة n كل من $Y_n = v_0 + v_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + v_n$ و $S_n = u_0 + u_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + u_n$