Тема. Способы математического доказательства

В обыденной жизни часто, когда говорят о доказательстве, имеют в виду просто проверку высказанного утверждения. В математике проверка и доказательство - это разные вещи, хотя и связанные между собой. Пусть, например, требуется доказать, что если в четырехугольнике три угла прямые, то он - прямоугольник.

Если мы возьмем какой-либо четырехугольник, у которого три угла прямые, и, измерив четвертый, убедимся в том, что он действительно прямой, то эта проверка сделает данное утверждение более правдоподобным, но еще недоказанным.

Чтобы доказать данное утверждение, рассмотрим произвольный четырехугольник, в котором три угла прямые. Так как в любом выпуклом четырехугольнике сумма углов равна 360°, то и в данном она составляет 360°. Сумма трех прямых углов равна 270° (90°-3 = 270°), и, значит, четвертый имеет величину 90° (360° - 270° = 90°). Если все углы четырехугольника прямые, он - прямоугольник. Следовательно, данный четырехугольник будет прямоугольником. Что и требовалось доказать.

Заметим, что **сущность проведенного доказательства состоит в построении такой последовательности истинных утверждений** (теорем, аксиом, определений), из которых логически следует утверждение, которое нужно было доказать.

Вообще доказать какое-либо утверждение - это значит показать, что это утверждение логически следует из системы истинных и связанных с ним утверждений.

В логике считают, что если рассматриваемое утверждение логически следует из уже доказанных утверждений, то оно обоснованно и также истинно, как и последние.

Таким образом, основой математического доказательства является дедуктивный вывод. **А само доказательство - это цепочка умозаключений, причем заключение каждого из них (кроме последнего) является посылкой в одном из последующих умозаключений.**

Например, в приведенном выше доказательстве можно выделить следующие умозаключения:

1. В любом выпуклом четырехугольнике сумма углов равна 360°; данная фигура - выпуклый четырехугольник, следовательно, сумма углов в нем 360°.
2. Если известна сумма всех углов четырехугольника и сумма трех из них, то вычитанием можно найти величину четвертого; сумма всех углов данного четырехугольника равна 360°, сумма трех 270° (90° * 3 = 270°), то величина четвертого 360° - 270° = 90°.
3. Если в четырехугольнике все углы прямые, то этот четырехугольник - прямоугольник; в данном четырехугольнике все углы прямые, следовательно, он прямоугольник.

Все приведенные умозаключения выполнены по правилу заключения и, следовательно, являются дедуктивными.

Самое простое доказательство состоит из одного умозаключения. Таким, например, является доказательство утверждения о том, что 6 < 8 (см. п. 26).

Итак, говоря о **структуре математического доказательства**, мы должны понимать, что она, прежде всего, **включает в себя утверждение**, которое доказывается, и систему истинных утверждений, с помощью которых ведут доказательство.

Следует еще заметить, что **математическое доказательство** - это не просто набор умозаключений, это умозаключения, расположенные в определенном порядке.

По способу ведения (т.е. по форме) различают прямые и косвенные доказательства. Рассмотренное ранее доказательство было прямым - в нем, основываясь на некотором истинном предложении и с учетом условия теоремы, строилась цепочка дедуктивных умозаключений, которая приводила к истинному заключению.

Примером косвенного доказательства является доказательство методом от противного. Сущность его состоит в следующем. Пусть требуется доказать теорему A ⟹ B. При доказательстве методом от противного допускают, что **заключение теоремы (B) ложно**, а, **следовательно, его отрицание истинно**. ***Присоединив предложение B к совокупности истинных посылок, используемых в процессе доказательства (среди которых находится и условие A), строят цепочку дедуктивных умозаключений до тех пор, пока не получится утверждение, противоречащее одной из посылок и, в частности, условию A.*** Как только такое противоречие устанавливают, процесс доказательства заканчивают и говорят, что полученное противоречие доказывает истинность теоремы A ⟹ B,

Задача 1. Доказать, что если a + 3 > 10, то a >7.

Решение. Предположим, что заключение данного утверждения ложно, тогда истинным будет его отрицание, т.е. предложение a = 7. Подставим это значение a в неравенство a + 3 > 10. Получим предложение 7 + 3 > 10 или 10 > 10, которое ложно. Пришли к противоречию с определением отношения «больше» для чисел. Следовательно, наше предположение неверное, и поэтому, если a + 3 > 10, то a Ф 7.

Задача 2. Доказать, что если x^2-четное число, то x- четно.

Решение. Предположим, что заключение данного утверждения ложно, тогда истинным будет его отрицание, т. е. предложение: «x - число нечетное». Любое нечетное число можно представить в виде x = 2n + 1, где п ϵ Z_0. Тогда $x^2 = (2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n+1 = 2(2n^2 + 2n) + 1 = 2k + 1$, где к - $2n^2 + 2n$. Но это число нечетное. Пришли к противоречию с тем, что дано. Следовательно, наше предположение неверное, и поэтому если x^2 - четное число, то x тоже четное число.

Завершая обсуждение вопросов, связанных с математическим доказательством, выясним, как связаны между собой неполная индукция с дедуктивным выводом.

Ранее было отмечено, что выводы, которые мы получаем с помощью неполной индукции (или аналогии) носят характер предположения и поэтому их надо либо доказывать, либо опровергать. Поскольку выводы, о которых идет речь, носят, как правило, характер обобщения, то они формулируются в виде предложений, содержащих квантор общности. И следовательно, чтобы их опровергнуть, надо привести контрпример, а чтобы убедиться в истинности - доказать. Причем имеется в виду дедуктивный вывод. Таким образом, в процессе познания неполная индукция и математическое доказательство оказываются тесно связанными.

Проиллюстрируем это, решив следующую задачу.

Задача 3. Даны четыре последовательных натуральных числа. Верно ли, что произведение средних чисел этой последовательности больше произведения крайних на 2?

Решение. Попытаемся сначала высказать предположение относительно ответа на вопрос задачи. Для этого рассмотрим несколько конкретных случаев. Пусть 1, 2, 3, 4 составляют данную последовательность. Образуем произведение средних чисел и произведение крайних и сравним их: 2*3 - 1*4 = 2. Возьмем еще одну последовательность, например, 5,6,7, 8, опять образуем произведения средних и крайних чисел и сравним их: 6*7 - 5*8 = 2. Рассмотренные случаи позволяют предположить, что утверждение «Произведение средних чисел заданной последовательности всегда больше произведения крайних на 2» истинно. Это предположение является по существу выводом в умозаключении, называемом неполной индукцией.

Но истинность предложения с квантором общности надо доказывать.

Обозначим четыре последовательных натуральных числа так: n, n + 1, n + 2, n + 3. Образуем произведения средних и крайних чисел, получим (n + 1)(n + 2) и n(n + 3). Выполним преобразования этих выражений: $(n + 1)(n + 2) = n^2 + 3n + 2$; $n(n + 3) = n^2 + 3n$.

Видим, что действительно первое произведение больше второго на 2. Что и требовалось доказать.

Итак, по форме различают прямые и косвенные доказательства. Но в математике существуют еще и особые методы доказательства. Среди них - полная и математическая индукция. Метод математической индукции рассматривается в п. 67, а о полной индукции речь пойдет сейчас.

Полная индукция - это такой метод доказательства, при котором истинность утверждения следует из истинности его во всех частных случаях.

Задача 4. Доказать, что каждое составное натуральное число, больше 4, но меньшее 20, представимо в виде суммы двух простых чисел,

Решение. Вспомним определение простого и составного числа. Простым называется такое натуральное число, которое делится только на и на себя. Числа 2, 13, 5, 17 - простые. Числа, которые имеют I более двух делителей, называются составными. Число 1 не является ни простым, ни составным. I

В данной задаче рассматривается множество чисел, которые больше 4, но меньше 20. Составными в нем будут числа: 6, 8, 9, 10, 12, 14,15, 16, 18. Каждое из них можно представить в виде суммы двух простых чисел: 6 = 3 + 3; 8 = 5 + 3; 9 = 7

+ 2; 10 = 5+5 (или 7 + 3); 12 = 5 + 7; 14= 11+ 3 (или 7+ 7); 15= 13 + 2; 16 = 13 + 3 (или 11 +5), 18 = 13 + 5 (или 11 + 7). Так как данное утверждение истинно во всех частных случаях, то оно доказано.

В связи с тем что в нашем распоряжении появились два понятия: «полная индукция» (как метод доказательства) и «неполная индукция» (как один из видов умозаключений), то, чтобы избежать ошибок в их употреблении, посмотрим, как они используются при решении задач.

Задача 5. Верно ли, что если натуральное число n не кратно 3, то значение выражения $n^2 + 2$ кратно 3?

Решение. Попытаемся сначала однозначно определиться с ответом на вопрос задачи. Для этого возьмем несколько чисел, не кратных 3, и найдем соответствующие значения выражения $n^2 + 2$.

Если n = 1, то 12 + 2 = 3, 3:3, если n - 2, то 22 + 2 = 6, 6:3, если n = 4, то 42 + 2 = 18, 18:3.

На основе рассмотренных случаев можно предположить, что утверждение «если натуральное число n не кратно 3, то значение выражения $n_1 + 2$ кратно 3» истинно. Это вывод, который мы получили на основе неполной индукции. Но его надо доказывать.

Если натуральное число n не кратно 3, то при делении его на 3 в остатке получается 1 либо 2 и, соответственно, число n имеет вид 3q + 1 ($q \in Z_0$) либо Zq + 2 ($q \in Z_0$).

Если $n = 3q + 1$, то $n^2 + 2 = (3q + 1)^2 + 2 = 9q^2 + 6q + 3$. В выражении $9q^2 + 6q + 3$ каждое слагаемое делится на 3, следовательно, на 3 делится и вся сумма, т.е. значение выражения $n^2 + 2$.

При n = 3q + 2 картина аналогична, т.е. значение выражения $n^2 + 2$ и в этом случае делится на 3.

Полученные результаты позволяют заключить, что при любом натуральном и, которое не кратно 3, значение выражения $n^2 + 2$ делится на 3. **Метод доказательства в данной задаче - полная индукция.** Но применяется она иначе, чем в задаче 4. Дело в том, что отношению «иметь один и тот же остаток при делении на 3» соответствует разбиение множества натуральных чисел на 3 класса - это множество чисел, кратных 3, множество чисел, которые при делении на 3 дают в остатке 1, и множество чисел, которые при делении на 3 дают в остатке 2. Следовательно, все натуральные числа, не кратные 3, разбиваются на 2 класса, в первом содержатся числа вида 3q+ 1, а во втором - числа вида 3q + 2. Нами доказано, что при любом п из этих двух классов значение выражения $n_1 + 2$ кратно 3.

Упражнения

1. Докажите, что если к произведению двух последовательных натуральных чисел прибавить большее из них, то получится квадрат большего числа.
2. Докажите, что значением выражения (x - 4)(2x + 1) будет целое число, если x принимает значения-1,0, 1,4.

3. Разность двух углов равна 10°. Докажите, что эти углы не могут быть вертикальными.

4. Как изменится сумма двух чисел, если каждое слагаемое увеличить в три раза?

5. Каким числом может быть сумма двух нечетных чисел? Рассмотрите несколько частных случаев и выскажите предположение. Каким образом можно доказать его истинность?

6. Разделите каждое из чисел 3^2, 5^2 и 7^2 на 4. Чему в каждом из этих случаев равен остаток? Какое предположение можно высказать на основе полученных результатов? Сколько нечетных чисел нужно возвести в квадрат и разделить на 4, чтобы гарантировать истинность высказанного предположения?

7. Даны четыре последовательных нечетных числа. Верно ли, что произведение крайних чисел меньше произведения средних на 8?

8. Верно ли, что:

а) разность квадратов двух последовательных нечетных чисел делится на 8;

б) произведение двух последовательных четных чисел кратно 8;

Основные выводы

Для того чтобы разобраться с особенностями математического! доказательства, нам пришлось познакомиться с понятиями:

- умозаключение,
- посылка и заключение,
- дедуктивные (правильные) умозаключения,
- неполная индукция,
- аналогия,
- прямое доказательство,
- косвенное доказательство,
- полная индукция.

Мы выяснили, что неполная индукция и аналогия тесно связаны с дедукцией: выводы, полученные с помощью неполной индукции и аналогии, надо либо доказывать, либо опровергать. С другой стороны, дедукция не возникает на пустом месте, а является результатом предварительного индуктивного изучения материала.

Дедуктивные умозаключения позволяют из уже имеющегося знания получать новые истины, и притом с помощью рассуждения, без обращения к опыту, интуиции и т.д.

Мы выяснили, что математическое доказательство - это цепочка дедуктивных умозаключений, выполняемых по определенным правилам. Познакомились с простейшими из них: правилом заключения, правилом отрицания, правилом силлогизма. Узнали, что проверять правильность умозаключения можно с помощью кругов Эйлера.