Законы сложения

Докажем сначала переместительный закон, т. е. докажем, что для любых целых неотрицательных чисел a и b выполняется равенство a + b = b + a.

Пусть a — число элементов в множестве A, b — число элементов в множестве B и A∩ B=0. Тогда по определению суммы целых неотрицательных чисел a + b есть число элементов объединения множеств A и B: a+b=n (AUB). Но множество A∪ B равно множеству B∪A согласно переместительному свойству объединения множеств, и, значит, п (A∪B)= n (B). По определению суммы п (B∪A)=b+a, поэтому a+b=b+a для любых целых неотрицательных чисел a и b.

Докажем теперь сочетательный закон, т. е. докажем, что для любых целых неотрицательных чисел a, b, c выполняется равенство(a+ b)+c=a+(b+c).

Пусть a = п (A), b=п(B), c=п(C), причем A B=0, B C=0. Тогда по определению суммы двух чисел можно записать (a + b)+ c = n(A)+n(C)= n((A)

Так как объединение множеств подчиняется сочетательному закону, то

n((AUB)C) = n(AU(B C)). Откуда по определению суммы двух чисел имеем

п (A U(BUC)=n(A) + n (BUC) = a + (b + c). Следовательно, (a+b)+c =a+(b+c) для любых целых неотрицательных чисел a, b и c.

Каково назначение сочетательного закона сложения? Он объясняет, как можно находить сумму трех слагаемых: для этого достаточно сложить первое слагаемое со вторым и к полученному числу прибавить третье слагаемое или прибавить первое слагаемое к сумме второго и третьего. Заметим, что сочетательный закон не предполагает перестановки слагаемых.

И переместительный и сочетательный законы сложения могут быть обобщены на любое число слагаемых. При этом переместительный закон будет означать, что сумма не изменяется при любой перестановке слагаемых, а сочетательный — что сумма не изменяется при любой группировке слагаемых (без изменения их порядка).

Из переместительного и сочетательного законов сложения вытекает, что сумма нескольких слагаемых не изменится, если их переставить любым способом и если любую их группу заключить в скобки.

Вычислим, используя законы сложения, значение выражения 109 + 36+191 +64 + +27.

На основании переместительного закона переставим слагаемые 36 и 191. Тогда 109 + 36+ 191 +64 + 27 = 109+ 191 +36 + 64 + 27.

Воспользуемся сочетательным законом, сгруппировав слагаемые, а затем найдем суммы в скобках: 109 + 191+ 36 + 64 + 27 = (109 + + 191) + (36 + 64)+27 = 300+ 100 + 27.

Применим еще раз сочетательный закон, заключив в скобки сумму чисел 300 и 100: 300+100+ 27 = (300+100)+ 27.

Произведем вычисления: (300+100) +27 = 400 + 27 = 427.

С переместительным свойством сложения учащиеся начальных классов знакомятся при изучении чисел первого десятка. Сначала оно используется при составлении таблицы сложения однозначных чисел, а затем для рационализации различных вычислений.

Сочетательный закон сложения в начальном курсе математики в явном виде не изучается, но постоянно используется. Так, он является основой приема прибавления числа по частям: 3 + 2 = 3 + (1 + 1)=(3+ 1)+1 =4+1=5. Кроме того, в тех случаях, **когда надо прибавить число к сумме, сумму к числу, сумму к сумме, сочетательный закон используется в сочетании с переместительным**. Например, прибавлять сумму 2+1 к числу 4 предлагается следующими способами:

1) 4 + (2 + l)=4 + 3 = 7;
2) 4 + (2+1) = 6+1=7;
3) 4 + (2+1) = 5 + 2 = 7.

Проанализируем эти способы. В случае 1 вычисления выполнены в соответствии с указанным порядком действий. В случае 2 применено сочетательное свойство сложения. Вычисления же в последнем случае опираются на переместительный и сочетательный законы сложения, причем промежуточные преобразования опущены. Они таковы. Сначала на основании переместительного закона переставили местами слагаемые 1 и 2: 4 +(2+1) = 4+(1 +2). Затем воспользовались сочетательным законом: 4+(1 + 2) = (4+1) + 2.И,наконец, произвели вычисления согласно порядку действий (4+1)+ 2 = 5 + 2 = 7.