

Найпростіші тригонометричні рівняння

Рівняння називається **тригонометричним**, якщо невідома величина знаходиться під знаком тригонометричних функцій. **Найпростішими тригонометричними рівняннями** називаються рівняння $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$. Розв'язати найпростіше тригонометричне рівняння – означає знайти множину всіх кутів, що мають дане значення тригонометричної функції. Якщо тригонометричне рівняння не є найпростішим, то за допомогою тотожних перетворень його треба звести до одного або кількох найпростіших, розв'язання яких визначається стандартними формулами.

(оскільки $|\sin x| \leq 1$). Корені рівняння $\sin x = a$ можна розглядати як абсциси точок перетину синусоїди $y = \sin x$ з прямою.

Всі розв'язки рівняння $\sin x = a$ записуються у вигляді $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Однак в трьох таких випадках, коли $a \in \{-1; 0; 1\}$, розв'язки рівнянь зображуються такими формулами:

при $a = 0$ $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

при $a = -1$ $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

при $a = 1$ $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Рівняння $\cos x = a$. Оскільки $|\cos x| \leq 1$, то рівняння має розв'язок тільки при $|a| \leq 1$. Корені рівняння $\cos x = a$ можна розглядати як абсциси точок перетину косинусоїди $y = \cos x$ з прямою $y = a$.

Всі розв'язки рівняння $\cos x = a$ записуються у вигляді $x = \pm \arccos a + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Для окремих випадків $a = 0$, $a = \pm 1$ маємо:

а) $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

$$6) \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$в) \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Всі корені рівняння $\operatorname{tg} x = a, a \in \mathbb{R}$ задаються формулою $x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$

У випадку $a = 0$ розв'язок записується у вигляді $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}.$

Всі корені рівняння $\operatorname{ctg} x = a, a \in \mathbb{R}$ визначаються співвідношенням

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \text{ При } a = 0 \text{ розв'язок має вигляд } x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

При використанні формул для розв'язування тригонометричних рівнянь враховують, що

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a, \arccos(-a) = \pi - \arccos a,$$

$$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a, \operatorname{arctg}(-a) = \pi - \operatorname{arctg} a.$$

Розглянемо на прикладах найпростіші тригонометричні рівняння.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

Розв'язання

Оскільки $a = \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$, то скористаємось формулою $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,$

$n \in \mathbb{Z}.$ Отже, $x = (-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$

Відповідь: $\left\{ (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n \mid n \in \mathbb{Z} \right\}.$

Розв'язати рівняння $\operatorname{ctg}^2 \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{3}.$

Розв'язання

$$\operatorname{ctg}^2 \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \operatorname{ctg} \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) = \pm \sqrt{\frac{1}{3}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{4} = \arctg \frac{\sqrt{3}}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ 2x - \frac{\pi}{4} = \arctg \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} \right) + \pi k, k \in \mathbb{Z}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ 2x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{7\pi}{12} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ 2x = -\frac{\pi}{12} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7\pi}{24} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}, \\ x = -\frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Відповідь: $\left\{ \frac{7\pi}{24} + \frac{\pi n}{2}; -\frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{2} \mid n, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Розв'язати рівняння $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Розв'язання

Запишемо дане рівняння у вигляді $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, тоді скористаємось формулою $x = \arctg a + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, тобто

$$\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3} = -\arctg \frac{1}{\sqrt{3}} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$