Найпростіші тригонометричні рівняння

Рівняння називається **тригонометричним,** якщо невідома величина знаходиться під знаком тригонометричних функцій. **Найпростішими тригонометричними рівняннями** називаються рівняння $\sin x = a$, $\cos x = a$, $tgx = a$, $ctgx = a$. Розв'язати найпростіше тригонометричне рівняння – означає знайти множину всіх кутів, що мають дане значення тригонометричної функції. Якщо тригонометричне рівняння не є найпростішим, то за допомогою тотожних перетворень його треба звести до одного або кількох найпростіших, розв'язання яких визначається стандартними формулами.

(оскільки $|\sin x| \le 1$). Корені рівняння $\sin x = a$ можна розглядати як абсциси точок перетину синусоїди $y = \sin x$ з прямою .

Всі розв'язки рівняння $\sin x = a$ записуються у вигляді $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$, $n \in Z$. Однак в трьох таких випадках, коли $\alpha \in \{-1;\ 0;\ 1\}$, розв'язки рівнянь зображуються такими формулами:

при $a = 0$ $x = \pi n$, $n \in Z$;

при $a = -1$ $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$;

при $a = 1$ $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$.

Рівняння $\cos x = a$. Оскільки $|\cos x| \le 1$, то рівняння має розв'язок тільки при $|a| \le 1$. Корені рівняння $\cos x = a$ можна розглядати як абсциси точок перетину косинусоїди $y = \cos x$ з прямою $y = a$.

Всі розв'язки рівняння $\cos x = a$ записуються у вигляді $x = \pm \arccos a + 2\pi n$, $n \in Z$.

Для окремих випадків $a = 0$, $a = \pm 1$ маємо:

а) $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$;

б) $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2\pi n$, $n \in Z$;

в) $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2\pi n$, $n \in Z$.

Всі корені рівняння $tgx = a$, $a \in R$ задаються формулою $x = arctga + \pi n$, $n \in Z$.

У випадку $a = 0$ розв'язок записується у вигляді $x = \pi n$, $n \in Z$.

Всі корені рівняння $ctgx = a$, $a \in R$ визначаються співвідношенням $x = arcctga + \pi n$, $n \in Z$. При $a = 0$ розв'язок має вигляд $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$.

При використанні формул для розв'язування тригонометричних рівнянь враховують, що

$\arcsin(-a) = -\arcsin a$; $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$;

$arctg(-a) = -arctga$; $arcctg(-a) = \pi - arcctga$.

Розглянемо на прикладах найпростіші тригонометричні рівняння.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Розв'язання

Оскільки $a = \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$, то скористаємось формулою $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$, $n \in Z$. Отже, $x = (-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \pi n$, $n \in Z \Leftrightarrow x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in Z$.

Відповідь: $\left\{ (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n \middle| n \in Z \right\}$.

Розв'язати рівняння $ctg^2\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{3}$.

Розв'язання

$$ctg^2\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow ctg\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-\frac{\pi}{4}=arctg\frac{\sqrt{3}}{3}+\pi n, n\in Z, \\ 2x-\frac{\pi}{4}=arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+\pi k, k\in Z; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}+\pi n, n\in Z, \\ 2x=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}+\pi k, k\in Z; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=\frac{7\pi}{12}+\pi n, n\in Z, \\ 2x=-\frac{\pi}{12}+\pi k, k\in Z; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{7\pi}{24}+\frac{\pi n}{2}, n\in Z, \\ x=-\frac{\pi}{24}+\frac{\pi k}{2}, k\in Z. \end{array}\right.$$

Відповідь: $\left\{\frac{7\pi}{24}+\frac{\pi n}{2}; -\frac{\pi}{24}+\frac{\pi k}{2} \middle| n,k\in Z\right\}$.

Розв’язати рівняння $tg\left(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Розв’язання

Запишемо дане рівняння у вигляді $tg\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{\sqrt{3}}$, тоді скористаємось формулою $x=arctga+\pi n$, $n\in Z$, тобто

$$\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}=-arctg\frac{1}{\sqrt{3}}+\pi n, n\in Z \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z \Leftrightarrow \frac{x}{2}=\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z.$$