

Simple ou double vitrages, isolations- thermique et phonique d'une salle de classe.

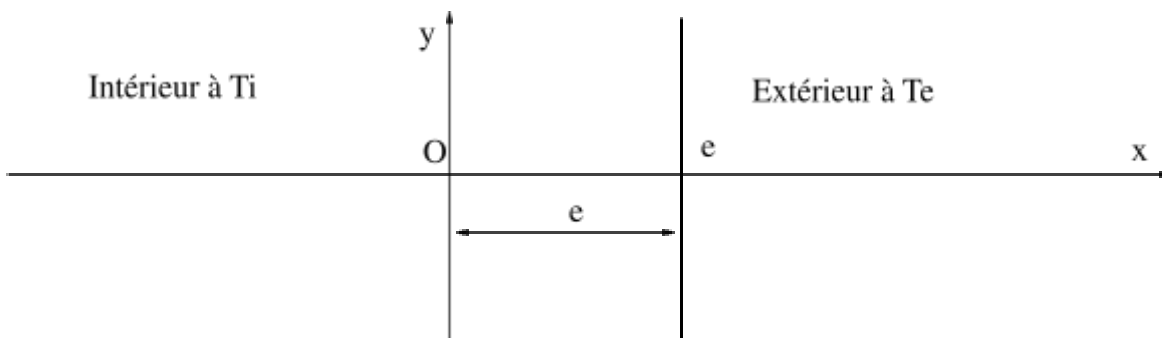
Il sera tenu compte de la rédaction dans la notation des copies. De nombreuses questions qualitatives doivent recevoir une réponse soignée et précise pour obtenir des points. Des résultats non établis par des lois et des principes simples et clairement identifiés ne sont d'aucune valeur.

Les applications numériques sont à faire dès que possible (on ne les demandera pas dans les questions explicitement) et devront toujours être associées à une unité pertinente.

Dans ce problème, on traitera des aspects thermiques et phoniques d'un simple vitrage (fenêtre à une vitre): on s'intéressera au flux de chaleur et au flux sonore qui la traversent. Ensuite, on verra quel est l'effet d'un double vitrage sur ces deux flux.

On considère d'abord (parties I et II) une plaque de verre de conductivité thermique

$\lambda_{\text{verre}} = 0,8 \text{ W.m}^{-1}\text{K}^{-1}$. Son épaisseur est $e = 4 \text{ mm}$, sa masse volumique est μ et elle est de capacité thermique massique à pression constante c . On n'envisage pas d'effet de bord: contact avec d'autres matériaux de conductivité, d'épaisseur différentes. Les résultats obtenus dans le modèle sans limite (plaque infinie) traité ici seront ensuite utilisés pour des plaques de verre de dimension finie: on assimilera les effets obtenus par unité de surface dans les deux cas. On fera de plus une étude unidimensionnelle: le seul paramètre de position considéré sera celui suivant la perpendiculaire à la surface de la vitre. On respectera les notations introduites sur le schéma ci-après:



Dans un deuxième temps (partie III), on considère un double vitrage fait des mêmes matériaux que le simple vitrage décrit plus haut.

Les applications numériques seront faites pour une salle de classe de 60 m^2 au sol dont la surface vitrée est de 12 m^2 . Elle servira de fil conducteur au problème. Dans un premier temps, le chauffage de la salle ne servira qu'à compenser les pertes au travers des fenêtres.

I) Etude thermique d'un simple vitrage.

1) Etude de la conduction seule.

La plaque de verre est utilisée dans une fenêtre. L'intérieur de la pièce où elle est installée est à une température $T_i = 20^\circ\text{C}$ et l'extérieur à une température $T_e = 0^\circ\text{C}$.

a) Etablir l'équation de conduction thermique: équation différentielle qui régit l'évolution de $T(x,t)$ à l'intérieur de la plaque dans le cas unidimensionnel envisagé ici.

b) On suppose maintenant le régime permanent: que signifie ce terme? Déterminer alors $T(x)$ la température à l'intérieur de la vitre à l'abscisse x . Les températures de surface seront prises égales aux températures de l'air au contact des parois.

c) Déterminer le flux thermique Φ par unité de surface qui traverse alors la vitre.

d) La salle de classe de 60 m^2 qui possède une surface vitrée donnant sur l'extérieur de 12 m^2 doit être chauffée. En ne considérant que les pertes thermiques liées à la conduction au travers des vitres, déterminer le nombre de radiateurs " standards " de 2 kW nécessaires pour maintenir la température à 20°C dans la pièce lorsque l'extérieur est à 0°C ? Conclure.

e) Quelle économie réaliserait-on en réduisant la température intérieure de 1°C ? Conclure. Dans quel cas de figure cette économie pourrait se révéler plus intéressante ?

f) On définit en électricité la résistance d'un conducteur ohmique par $\frac{\Delta V}{I}$ où ΔV est la différence de potentiels aux bornes et I l'intensité du courant électrique qui traverse le conducteur. On définit également une résistance dans les problèmes thermiques. Quelle en est la définition? Etablir un parallèle entre termes analogues dans les définitions électriques et thermiques de la résistance. En dégager le sens général et illustrer alors ce caractère commun par un troisième exemple (éventuellement sur une impédance) pris dans un autre domaine de la physique.

Donner l'expression de la résistance thermique R_v de la surface vitrée étudiée. Quelle est la relation analogue en électricité ?

2) Prise en compte des échanges à la surface.

On veut tenir compte d'autres échanges thermiques sur les surfaces: un échange thermique par mouvement d'air refroidi ou réchauffé au contact de la paroi de la vitre se produit en effet en surface. L'énergie thermique fournie algébriquement à la vitre par unité de surface et par unité de temps en $x = 0$ est donnée par $h(T_i - T(0))$ où $T(0)$ est la température de surface de la vitre en O . On prendra pour le verre et l'air $h = 10 \text{ S.I.}$.

a) Quelle peut être l'unité courante du coefficient h ?

b) Les simples vitrages se couvrent souvent de buée puis de gouttelettes d'eau en hiver (plus rarement, dans les pièces moins chauffées, de givre). Expliquer le phénomène. En quoi cela va-t-il dans le sens de la correction apportée au modèle précédent?

c) Par analogie avec les échanges donnés en $x = 0$, déterminer l'énergie thermique fournie algébriquement par la vitre à l'extérieur par unité de temps et de surface en $x = e$. Le même coefficient h sera utilisé .

d) Exprimer le flux thermique Φ par unité de surface au travers de la vitre de trois manières différentes en fonction des trois écarts de température observés aux surfaces et dans la vitre: en déduire alors les trois résistances thermiques correspondantes. Sont-elles en série ou en parallèle ? Justifier la réponse en utilisant un argument discriminant les deux associations (on pourra faire une analogie avec l'électricité).

Déterminer alors le flux Φ en fonction des caractéristiques des matériaux et de l'écart de température ($T_i - T_e$).

e) Quelle est la résistance thermique de la surface vitrée de la salle de classe en tenant compte des échanges en surface ? Combien faut-il maintenant de radiateurs pour chauffer cette pièce ? Conclure sur la pertinence du modèle.

Page3/8

II) Etude acoustique.

On va maintenant s'intéresser à un aspect acoustique de ce vitrage. Pour ce faire, on commencera par établir les équations qui régissent la propagation des ondes de pression longitudinales dans un matériau unidimensionnel paramétré par la variable de position x , on s'intéressera ensuite à la traversée d'une interface entre deux milieux de célérités différentes, puis on appliquera ces résultats au cas d'une vitre.

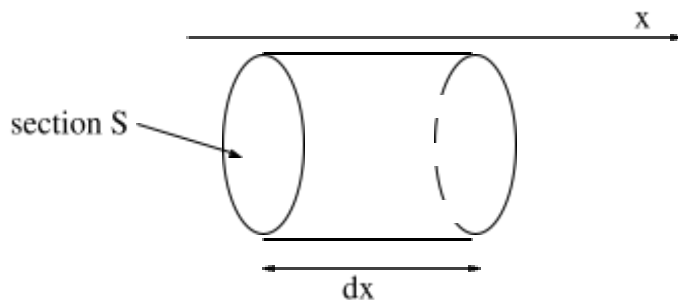
1) Etablissement des équations.

Le milieu auquel on va s'intéresser est, au repos, de masse volumique μ_0 et soumis à une pression P_0 . Lorsqu'une perturbation le traverse, la vitesse d'un point du milieu d'abscisse au repos x est $v(x)$, sa pression $P_0 + p(x)$ et sa masse volumique est $\mu_0 + \mu(x)$. La perturbation à laquelle on va s'intéresser est longitudinale et de faible amplitude. On établira des équations générales qu'on linéarisera en fin de question.

a) Qu'appelle-t-on approximation acoustique?

b) Que signifie longitudinale? Y a-t-il d'autres types de perturbation qui peuvent se propager dans les matériaux?

c) Soit un cylindre fixe dans le référentiel d'étude. Il est d'axe Ox de section S et de hauteur dx : voir figure ci-dessous. Faire un bilan de matière sur ce cylindre durant la propagation de la perturbation. On obtient alors une relation entre μ et v : quelle relation générale représente-t-elle (nom et expression générale)?



d) La perturbation est rapide devant le temps caractéristique de propagation des échauffements: elle est considérée comme adiabatique réversible. Le coefficient de compressibilité isentropique est alors utilisé pour lier le volume et la pression, ou encore la masse volumique et la pression. Donner cette dernière relation.

e) On considère la matière contenue au repos dans le cylindre du c). Lorsque la perturbation passe, cette matière est mise en mouvement. En utilisant le théorème du centre d'inertie, établir une nouvelle

relation entre μ , v et p .

f) Linéariser les équations précédentes en expliquant bien pourquoi tel ou tel terme est conservé ou négligé. Utiliser ces équations pour établir l'équation de propagation des ondes acoustiques dans ce matériau. Déterminer la célérité C et vérifier sa dimension.

Comparer cette équation à celle établie en I-1-a-. L'une d'elle est liée à une création d'entropie: expliquer laquelle et pourquoi.

g) Etablir l'expression de l'énergie (ou travail de la force exercée par la partie gauche sur la partie droite) traversant une surface S orthogonale à l'axe Ox pendant dt et en déduire l'expression du vecteur

Page4/8

densité de flux de puissance sonore $\overline{\Pi}$ en fonction de p et de v . Par un bilan d'énergie sur le volume défini en c) et en utilisant les équations linéarisées, retrouver l'expression liant $\overline{\Pi}$ et les énergies cinétique et potentielle volumiques associées à la perturbation. On identifiera clairement le terme d'énergie potentielle dans cette relation.

h) Application à l'air qu'on va considérer comme un gaz parfait. Ses capacités thermiques massiques à volume et à pression constants sont respectivement notées c_v et c_p et $\gamma = c_p / c_v = 1,40$. On donne de plus $\mu_{\text{air}} = 1,3 \text{ kg.m}^{-3}$ et $P_0 = 1 \text{ bar}$. Déterminer dans ces conditions χ_s pour le gaz parfait en fonction de γ et de P_0 et en déduire C_{air} , la célérité du son dans l'air.

Les valeurs numériques utilisées et obtenues ici seront conservées pour la suite.

2) Forme des ondes.

On considère dans ce qui suit une onde progressive sinusoïdale se propageant dans un milieu où la célérité des ondes sonores est C , ($x < 0$ par exemple dans le cas de la vitre étudiée). Les amplitudes en pression, vitesse et masse volumique seront notées respectivement A , V et M . Elles seront indicées au besoin. L'onde de pression incidente a la forme: $p_i = A_i \cos(\omega t - k_i x)$; $\omega = 2\pi f$ où f est la fréquence de l'onde.

a) Les signaux réels ne sont jamais sinusoïdaux ils ont un début et une fin contrairement à $A_i \cos(\omega t - k_i x)$. Même à un instant donné et autour d'un endroit, un signal se confond rarement avec un signal sinusoïdal. Pourquoi étudie-t-on malgré tout ce genre de signal ? Quel est son intérêt ?

b) Etablir la relation entre ω , k_i et C_i .

c) Déterminer les expressions de v ; et μ_i , les ondes de vitesse et de masse volumique associées à celle de pression.

d) Déterminer $\overline{\Pi}_i$, associé à cette onde.

e) On rappelle la définition de l'intensité sonore I d'une perturbation: $I = 10 \log\left(\frac{\langle \Pi \rangle}{\langle \Pi_0 \rangle}\right)$ où $\langle \Pi_0 \rangle$ est une référence de $10^{-12} \text{ W.m}^{-2}$ au seuil de perception de l'oreille humaine. I est ainsi défini en décibels. Soit une onde sonore d'intensité $I_i = 100 \text{ dB}$. Déterminer les amplitudes de la vitesse, de la position des molécules de l'air et de la pression pour une fréquence $f = 440 \text{ Hz}$ ($1a_3$). Conclure.

f) En se référant au I-l-f-, justifier la définition de l'impédance acoustique Z associée à une onde sonore en général et déterminer son expression dans le cas que l'on traite ici.

3) Conditions de passage d'un milieu à un autre.

On considère l'onde plane précédente. En $x = 0$, l'onde rencontre une interface: en $x < 0$, la célérité est bien C_1 mais en $x > 0$, elle devient C_2 . Une onde réfléchie est engendrée (les amplitudes seront indicées r) ainsi qu'une onde transmise (les amplitudes seront indicées t). Les caractéristiques du milieu en $x < 0$ sont indicées 1 et les caractéristiques du milieu en $x > 0$ sont indicées 2.

a) Donner les expressions générales des ondes de pression réfléchie et transmise.

b) Quelles grandeurs sont continues au passage de l'interface et pourquoi ?

Page 5/8

c) Utiliser ces continuités pour déterminer A_r et A_t . Donner les coefficients de réflexion $r = A_r/A_i$ et de transmission $t = A_t/A_i$ (en amplitude). Ces expressions seront d'abord obtenues en fonction des caractéristiques du milieu (μ , C), puis en fonction des impédances acoustiques Z_1 et Z_2 des deux milieux.

d) Dans quelles conditions portant sur Z_1 et Z_2 obtient-on une bonne transmission du flux sonore ?

e) Les résultats établis en c) vont être utilisés pour déterminer les caractéristiques d'un milieu opaque au son. Que vaut t dans un tel milieu ? Que peut-on en déduire sur r ? C_2 ? μ_{02} ? Z_2 ?

Dans le cas où le milieu 2 est un gaz parfait, que valent ? μ_{02} et C_2 ?

4) Cas d'une vitre.

On envisage maintenant le cas de la vitre définie en début de problème. On a donc une succession de trois milieux: air, verre, puis air à nouveau. On ne considérera pas de différence de vitesse de propagation du son, ni de masse volumique, entre l'air intérieur et l'air extérieur: ils seront identiques en tout. On prendra dans cette partie, $C_{\text{air}} = 340 \text{ m.s}^{-1}$ et $C_{\text{verre}} = 3000 \text{ m.s}^{-1}$.

a) On va s'intéresser à l'onde globalement transmise. Pour cela, on utilisera les notations complexes: à une onde réelle $p = A \cdot \cos(\omega t - kx)$ on associe sa représentation complexe

$p = A \cdot \exp(j[(\omega t - kx)])$ En tenant compte des réflexions multiples dans le verre, déterminer l'amplitude de l'onde de pression transmise. On notera r_1 et t_1 les coefficients de réflexion et de transmission à l'entrée dans le verre (en $x = 0$) et r_2 et t_2 ces mêmes coefficients à la sortie (en $x = e$).

b) Une plaque de verre carrée de 33 cm de côté et d'épaisseur $e = 3 \text{ mm}$ a une masse $m = 800 \text{ g}$.

Déterminer les impédances acoustiques des deux milieux. Que remarque-t-on ? Calculer alors, sur la première interface (en $x = 0$), les coefficients de réflexion r_1 et de transmission t_1 puis leurs analogues r_2 et t_2 sur la deuxième interface (en $x = e$).

c) On considère une onde de fréquence 440 Hz (λ_3) Calculer le rapport de l'amplitude de l'onde transmise sur l'amplitude de l'onde incidente puis la chute d'intensité sonore lors de la transmission au travers de la vitre pour une onde de 440 Hz. A quel paramètre physique est lié le caractère isolant de la vitre ?

d) Lors d'une échographie médicale, on utilise un gel appliqué entre la peau et la sonde qui émet une onde ultrasonore alors que la sonde et la peau ont des impédances acoustiques assez voisines. Ce gel permet cependant une meilleure transmission de l'onde qui, sans lui n'est pratiquement pas transmise. Qu'est-ce qui vient perturber le passage de l'onde et pourquoi utiliser du gel pour contourner le problème?

Page6/8

III) Double vitrage et isolation.

On va maintenant utiliser les résultats des parties précédentes pour montrer l'intérêt du double vitrage et de l'isolation dans les maisons d'habitation ou les locaux à chauffer (comme la salle de classe considérée). On abordera aussi bien l'aspect thermique que phonique.

1) Isolation thermique par double vitrage.

Un double vitrage est qualifié de « 4-10-4 » lorsqu'il est constitué d'une vitre d'épaisseur $e = 4$ mm d'une couche d'air sec de $e' = 10$ mm puis d'une deuxième vitre d'épaisseur 4 mm (il existe, bien entendu d'autres formats). On va examiner les différences qui apparaissent avec un simple vitrage. La

conductivité de l'air sec est $\lambda_{\text{air}} = 0,025 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ et on néglige les échanges en surface entre les deux vitres pour l'air emprisonné.

a) En utilisant, par exemple, le raisonnement de la partie I, déterminer la résistance thermique de la surface vitrée de la pièce définie en début de problème lorsqu'on l'équipe de double vitrage 4-10-4. Combien de radiateurs de 2000 W sont alors nécessaires pour chauffer la pièce ? Dégager l'intérêt de cet équipement en comparaison de la solution d'économie par abaissement de la température de la pièce évoquée en I.

b) On donne pour des matériaux de construction le coefficient de transfert thermique k défini par le flux thermique par unité de surface et d'écart de température aux bornes d'un mur d'épaisseur e :

Matériaux	k (en $\text{W.K}^{-1}.\text{m}^{-2}$)
20 cm de béton armé	2,9
30 cm de béton cyclopéen(à gros éléments)	1,3
30 cm de béton aéré (600 kg.m^{-3})	0,94
30 cm de brique creuse	1,5

Déterminer k pour le simple vitrage et pour le double vitrage étudiés. A-t-on intérêt à renforcer le double vitrage en isolation ? Doit-on tenir uniquement compte des surfaces vitrées ou les murs et leur matériau de construction doivent-ils rentrer en ligne de compte ?

2) Isolation phonique.

On considère à nouveau une onde sonore d'intensité acoustique $I_i = 100 \text{ dB}$ qui arrive sur le double vitrage. Déterminer, au vu des résultats du II- et sans calcul complet, une estimation de l'intensité sonore transmise par ce double vitrage et conclure sur l'intérêt du double vitrage en isolation phonique.

3) Triple vitrage ?

Le double vitrage est préférable au simple vitrage en matière d'isolation. La question peut alors se poser d'améliorer encore le caractère isolant des ouvertures. A coût à peu près constant (même encombrement, même masse de matière), on pourrait envisager un triple vitrage 3-5-2-5-3 de 18 mm d'épaisseur comme le double vitrage 4-10-4 précédent.

Y a-t-il un intérêt à ce dispositif en isolation thermique ? en isolation phonique? Discuter. Comment optimiser chaque isolation et quelles sont les contraintes que l'on rencontre ?

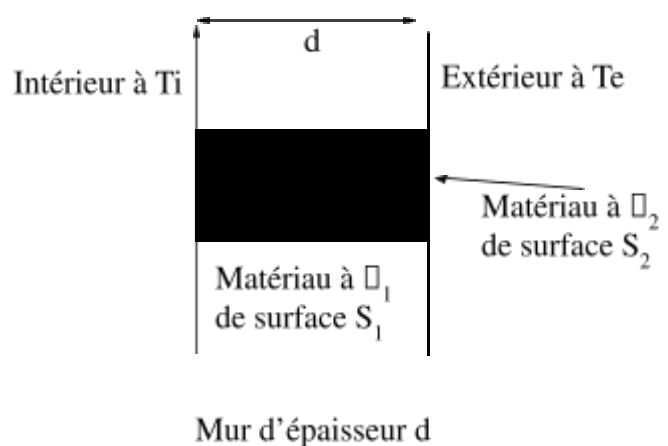
Page 7/8

4) Pont thermique.

En isolation, on cherche à éviter les « ponts Thermiques » synonymes de pertes importantes de chaleur ou de refroidissement des locaux chauffés. Un pont thermique peut être assimilé à un matériau conducteur de la chaleur placé entre l'extérieur et l'intérieur d'un local, réalisant alors un « pont » entre ces deux milieux (voir figure ci-contre). Il est inclus dans un mur de

conductivité bien moindre: $\lambda_1 < \lambda_2$.

Interpréter en terme de résistances thermiques: pourquoi le pont est-il si important alors que $S_1 > S_2$? Discuter.



Fin du problème.