Représentation graphique

Exercice 1

On donne ci-contre la courbe représentative d'une fonction f.

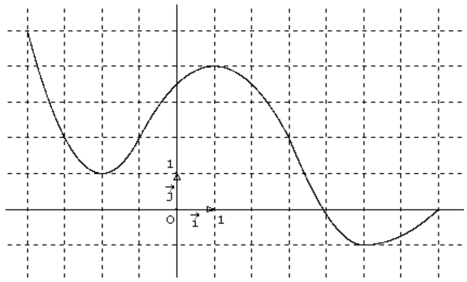
1. Donner le domaine de définition de f.

2. Déterminer graphiquement l'image de 5 par la fonction f.
Donner $f(-4)$.

3. Déterminer les antécédents de 0 par la fonction f.

4. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 2$.

5. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) > 2$.



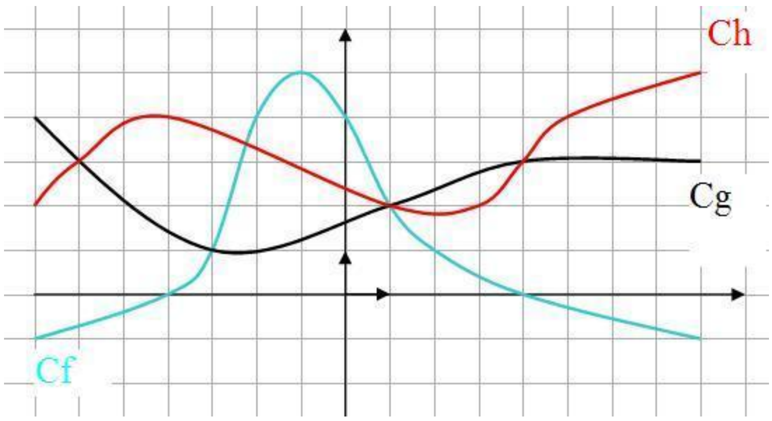
Exercice 2

Tracer la représentation graphique le la fonction $f(x) = x(x^2 - 4)$ définie sur $[-3; 3]$

Position relative de deux courbes

Exercice 3

On considère les fonctions f, g et h définies sur $[-7; 8]$ dont les représentations graphiques sont données ci-dessous.



Résoudre graphiquement les équations et inéquations suivantes.

$f(x) = g(x)$ $\quad$ $f(x) < g(x)$

$g(x) = h(x)$ $\quad$ $g(x) \leq h(x)$

$h(x) = f(x)$ $\quad$ $h(x) < f(x)$

Exercice 4

Deux loueurs de voiture proposent les tarifs suivants.

Loueur A $\quad 20€$ *la location* $+ 0,25€$ *par km*

Loueur B $\quad 35€$ *la location* $+ 0,10€$ *par km*

Soit x le nombre de km parcourus. Exprimer $A(x)$ et $B(x)$ le prix des 2 loueurs pour x km parcourus.
Déterminer graphiquement le prix le plus avantageux en fonction du kilométrage.

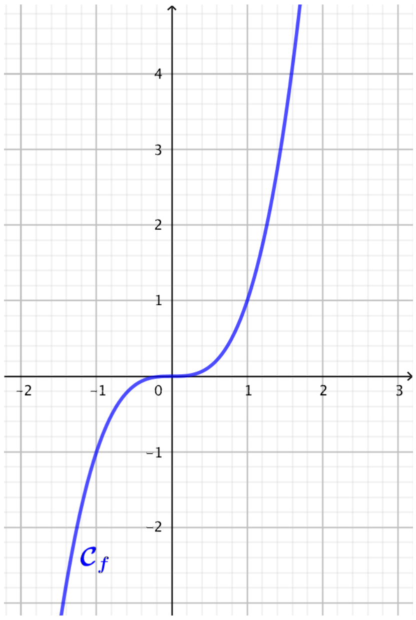
Déplacement de courbes

Exercice 5

On a représenté la fonction la fonction f définie sur R par

$$f(x) = x^3$$

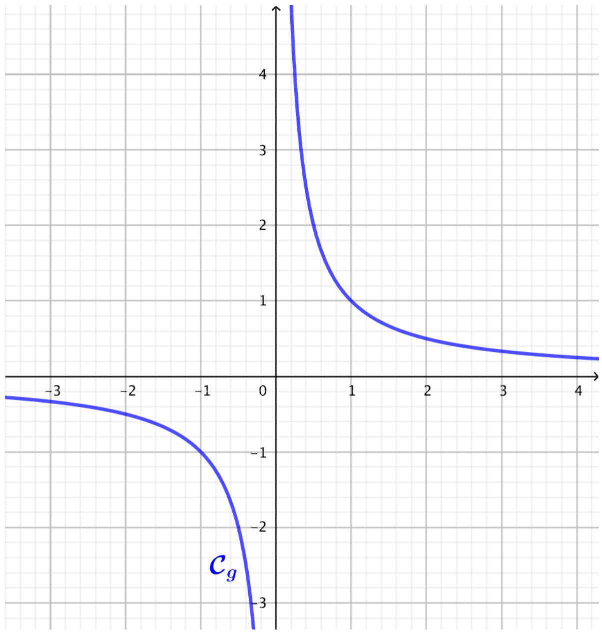
Sur ce graphique, tracer les représentations graphiques de $f + 2$ et de $\frac{1}{2}f$



On a représenté la fonction g définie sur R^* par

$$g(x) = \frac{1}{x}$$

Sur ce graphique, tracer les représentations graphiques de $h: x \longmapsto g(x + 1)$ et de $- g$



Taux d'accroissement

Exercice 6

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + x$.

a. Calculer le taux d'accroissement de f entre 1 et 2.

b. Soit h un réel non nul. Calculer le taux d'accroissement de f entre 1 et $1 + h$.

Exercice 7 *Coût marginal*

On considère la fonction notée C où $C(q)$ représente le coût total de production de q unités. On appelle coût marginal de la $q + 1^{ème}$ unité produite, noté $C_m(q)$, le coût supplémentaire induit par la production d'une unité supplémentaire. C'est le taux d'accroissement de la fonction C entre q et $q + 1$.

$$\frac{C(q+1)-C(q)}{q+1-q} = C(q + 1) - C(q) = C_m(q)$$

On considère le coût de production C de q objets définie par $C(q) = q^2 + q$.

a. Calculer le coût marginal du $15^{\text{ème}}$ objet.

b. Exprimer le coût marginal du $q^{ème}$ objet.

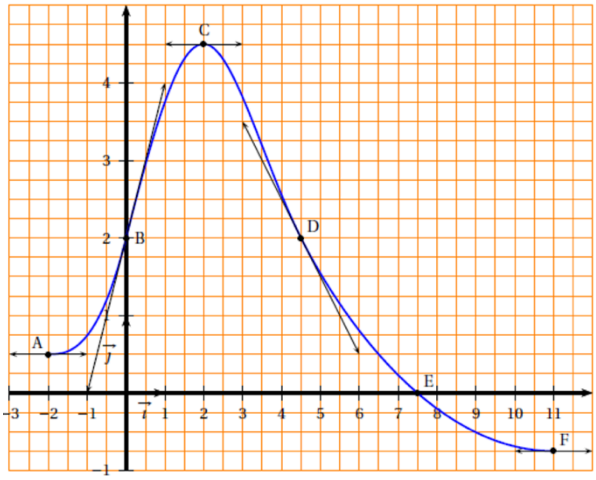
Nombre dérivé

Exercice 8

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-2; 11]$, et on donne sa courbe représentative C_f dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

On sait que la courbe C_f passe par les points $A(-2; 0,5)$, $B(0; 2)$, $C(2; 4,5)$, $D(4,5; 2)$, $E(7,5; 0)$ et $F(11; -0,75)$.

Les tangentes à la courbe C_f aux points *A, B, C, D* et *F* sont représentées sur la figure. Les tangentes aux points *A*, *C* et *F* sont parallèles à l'axe des abscisses.



Déterminer graphiquement

$f'(0)$ $\quad$ $f'(2)$ $\quad$ $f'(4,5)$

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point B et au point D.

Fonction dérivée

Exercice 9

Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes.

a. $f(x) = 2x^2 - x + 3$ $\quad$ *b.* $g(x) = -x^2 + 3x - 1$ $\quad$ *c.* $h(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3$

d. $k(t) = t^3 + \frac{3}{2}t^2 - 1$ $\quad$ *e.* $l(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{3x^2}{4} + 4x - 1$ $\quad$ *f.* $m(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 7$

Calculer une équation de la tangente à la courbe représentative de f en 3 et une équation de la tangente à la courbe représentative de g en -1.

Exercice 10

Déterminer la fonction dérivée sur I de chacune des fonctions.

a. $f(x) = \left(x^2 + 1\right)\left(-2x^3 + 3x - 7\right)$, $I = R$ $\quad$ *b.* $f(x) = (x^2 - 2)\sqrt{x}$, $I =]0; +\infty[$

c. $f(x) = \frac{1}{3x+1}$, $I =]-\frac{1}{3}; +\infty[$ $\quad$ *d.* $f(x) = \frac{1}{3+2x^2}$, $I = R$

e. $f(x) = \frac{3x-2}{x+3}$, $I =]-3; +\infty[$ $\quad$ *f.* $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$, $I = R\backslash\{1\}$

Variations de fonctions

Exercice 11

1. On considère la fonction f définie sur R par $f(x) = -x^2 + 4x - 1$

Calculer la dérivée de f et dresser le tableau de variations de la fonction f sur R.

2. On considère la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par

$$g(x) = \frac{20x}{x+4}$$

Calculer la dérivée de g et dresser le tableau de variations de la fonction g sur $[0; +\infty[$

3. On considère la fonction h définie sur R par $h(x) = -x^3 + 3x^2 + 1$

Calculer la dérivée de h et dresser le tableau de variations de la fonction h sur R.

Exercice 12

Une entreprise fabrique pendant un intervalle de temps donné une quantité x d'un certain objet. Le coût pour l'entreprise de la fabrication des x objets est donné en euros par $C(x) = x^2 - 20x + 400$ avec $x > 0$. Chaque objet est vendu 26 euros. On rappelle que les coûts fixes sont définis par le coût avant que ne débute la production (c'est-à-dire quand aucun objet n'a été produit)

1. Déterminer les coûts fixes.

2. Démontrer que le bénéfice est donné par

$$B(x) = -x^2 + 46x - 400$$

3. a. Calculer la dérivée de la fonction B.

3. b. En déduire les variations de la fonction B.

3. c. En déduire la quantité à produire pour obtenir le bénéfice maximal.

Exercice 13

Une entreprise fabrique x tonnes d'un produit alimentaire, où $x \in [0; 15]$, pour un ***coût total*** de fabrication, en milliers d'euros, de

$$C(x) = x^2 + 2x + 100$$

On assimile le ***coût marginal*** de fabrication C_m à la fonction dérivée du coût total.

$$C_m(x) = C'(x)$$

Le ***coût moyen*** de fabrication CM est défini par

$$CM(x) = \frac{C(x)}{x}$$

Le coût moyen est exprimé en *milliers d'euros par tonnes*, et le coût marginal en *euros par kilogramme*.

1. Déterminer le coût marginal $C_m(x)$ et le coût moyen $CM(x)$ en fonction de x.

2. Dresser le tableau de variation du coût moyen pour $x \in]0; 15]$.

3. Vérifier que, lorsque le coût moyen est minimum, il est égal au coût marginal.