

Données :

$$m_n = 1,6746887 \cdot 10^{-24} \text{ g}, m_p = 1,6723842 \cdot 10^{-24} \text{ g}, m_e = 9,109534 \cdot 10^{-28} \text{ g}, N_A = 6,023 \cdot 10^{23}, c = 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$$

Exercice 1

Le potassium (Z=19) existe sous forme de trois isotopes : ^{39}K , ^{40}K et ^{41}K dont les masses atomiques respectives sont : 38,9637 ; 39,9640 ; 40,9618 uma. L'isotope ^{40}K est le plus rare, son abondance naturelle est de 0,012 %. Sachant que la masse molaire du potassium naturel est 39,102 uma.

1. Calculer les abondances naturelles des isotopes ^{39}K et ^{41}K dans le potassium naturel.

Isotope	Masse Molaire	Abondance (%)
Isotope (K 39)	$M_1 = 38,9677$	$x_1 = 93,072$
Isotope (K 40)	$M_2 = 39,9640$	$x_2 = 0,012$
Isotope (K 41)	$M_3 = 40,9618$	$x_3 = 6,916$

La relation entre les abondances naturelles des isotopes et la masse molaire atomique de l'élément est donnée par :

$$M = \sum x_i M_i$$

Donc on obtient un système constitué de deux équations :

$$M_K = x_1 M_1 + x_2 M_2 + x_3 M_3$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \text{ avec } x_2 = 0.012\% = 0.00012$$

$$\text{Alors : } M_K = x_1 M_1 + 0,00012 M_2 + (0,99988 - x_1) M_3$$

$$M_K = x_1 M_1 + 0,00012 M_2 + 0,99988 M_3 - x_1 M_3$$

$$M_K - 0,00012 M_2 - 0,99988 M_3 = x_1 (M_1 - M_3)$$

$$x_1 = (M_K - 0,00012 M_2 - 0,99988 M_3) / (M_1 - M_3)$$

$$x_1 = (39,102 - 0,00012 \times 39,9640 - 0,99988 \times 40,9618) / (38,9637 - 40,9618)$$

$$x_1 = 0,93072 \text{ et } x_3 = 0,06916$$

$$\text{D'où : } ^{39}\text{K} = 93.072\% ; ^{40}\text{K} = 0.012\% ; ^{41}\text{K} = 6.916\%$$

2. Calculer l'énergie correspondante au défaut de masse de 1 uma.

$$\text{On a } 1 \text{ u.m.a} = \frac{1}{N_A} \cdot 10^{-3} \text{ Kg et } E.m.c^2 \quad (1)$$

$$\Delta m = 1 \text{ u.m.a} = 1.660.10^{-27} \text{ kg} \quad \text{et} \quad c = 3.10^8 \text{ m/s}$$

On remplace dans (1) et on obtient : $E = 1.49.10^{-10} \text{ Joules}$

3. Calculer, par deux méthodes, l'énergie de liaison des noyaux des isotopes ^{39}K , ^{41}K en J de noyaux puis en MeV / noyau et comparer la stabilité des noyaux de ces deux isotopes.

● **1^{ère} méthode :**

Pour le ^{39}K , $Z = 19$; $N = 39 - 19 = 20$ neutrons. Alors on calcule la masse théorique du noyau :

$$m_{\text{théorique}} = Z.m_p + N.m_n = (19 * 1.00727) + (20 * 1.00866) = 39.311 \text{ u.m.a}$$

la masse réelle du noyau : $m_{\text{réelle}} = 38.9637 \text{ u.m.a}$. Donc :

$$\text{Le défaut de masse : } \Delta m = m_{\text{théorique}} - m_{\text{réelle}} = 39.311 - 38.9637 = 0.348 \text{ u.m.a} / \text{noyau} = 0.348.10^{-3} \text{ Kg/}$$

mole de noyau.

Cette perte de masse correspond à l'énergie de cohésion du noyau (plus stable que ses composants séparés) par la relation d'Einstein : $E = \Delta m.c^2$

$$E(^{39}\text{K}) = 0.348 \times (3.10^8)^2 = 3.132.10^{13} \text{ J / mole de noyau} = 0.5185.10^{-10} \text{ J / noyau}$$

La conversion du Joule en eV :

$$1 \text{ eV} = 1.66 \cdot 10^{-19} \text{ Joules}$$

Alors :

$$E \approx 3.132 \cdot 10^{13} / 1.6 \cdot 10^{-19} \approx 1.96 \cdot 10^{32} \text{ eV/mole de noyau} \approx 1.96 \cdot 10^{26} \text{ MeV/mole de noyau}$$

$$E \approx 1.96 \cdot 10^{26} / 6.022 \cdot 10^{23} \approx 325.5 \text{ MeV / noyau}$$

- **2^{ème} méthode :** Dans la première question, on a calculé l'énergie correspondante au défaut de masse de 1 u.m.a. ainsi on peut calculer l'énergie correspondante au défaut de masse calculé pour le ^{39}K en utilisant la règle de 3.

$$\Delta m = 1 \text{ u.m.a} \rightarrow E = 1.41.10^{-10} \text{ Joules}$$

$$\Delta m = 0.348 \text{ u.m.a} \rightarrow E = X$$

$$\text{D'où : } E = 0.348 \times 1.41.10^{-10} = 0.5185.10^{-10} \text{ J / noyau}$$

Pour le ^{41}K , $Z = 19$; $N = 41 - 19 = 22$ neutrons. Alors on calcule la masse théorique du noyau :

$$m_{\text{théorique}} = Z.m_p + N.m_n = (19 * 1.00727) + (22 * 1.00866) = 41.328 \text{ u.m.a}$$

la masse réelle du noyau de ^{41}K : $m_{\text{réelle}} = 40.9618 \text{ u.m.a}$. Donc :

$$\Delta m = 41.328 - 40.9618 = 0.366 \text{ u.m.a} / \text{noyau} = 6.077.10^{-25} \text{ Kg/ noyau} = 0.366.10^{-3} \text{ Kg / mole de noyau}$$

$$\text{l'énergie de cohésion du noyau de } ^{41}\text{K} : E = \Delta m.c^2 = 0.366 \times (3.10^8)^2 = 3.24.10^{13} \text{ J / mole de noyau} = 0.538.10^{-10} \text{ J/ noyau} = 0.538.10^{-10} / 1.6.10^{-19} = 0.3662.10^9 \text{ eV} = 366.2 \text{ MeV}$$

3- L'énergie de liaison par nucléon est définie comme étant le rapport de l'énergie de liaison du noyau par le nombre de nucléons A :

$$E_A = \frac{E}{A}$$

Pour le ^{39}K : $E_A = E/A = 325,5/39 = 8,4 \text{ MeV / nucléon}$

Pour le ^{41}K : $E_A = E/A = 366,2/41 = 8,93 \text{ MeV / nucléon}$

Les causes de stabilité du noyau sont diverses et non unanimes :

- Selon la courbe d'Aston, la stabilité maximale tourne autour du noyau du fer avec $E_A = 8,8 \text{ MeV/nucléon}$.
- Les noyaux dont les nombres de nucléons rapprochés sont les plus stables. Pour un rapport $N/Z = 1$ les noyaux sont stables. Pour N/Z compris entre 1 et 1,5 les noyaux sont peu stables et les noyaux dont le rapport dépasse 1,5 se trouvent instables.
- D'où ^{39}K est plus stable que ^{41}K (les deux isotopes sont stables dans la nature)

4. L'énergie libérée lors de la formation d'une mole de ^{39}K .

Pour une mole d'atome du ^{39}K , on obtient :

$$E'(^{39}\text{K}) = E \times N_A = 0,5185 \cdot 10^{-10} \times 6,023 \cdot 10^{23} = 3,1229 \cdot 10^{17} \text{ Joules/mole}$$

Exercice 2

1. Donner pour un atome d'hydrogène, les expressions de l'énergie potentielles et l'énergie cinétique, en fonction du rayon de l'orbite atomique r.

- L'énergie potentielle est donnée par :

$$E_p = \int_{\infty}^r |F_A| dr \quad \text{avec} \quad F_A = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$D'où : \quad E_p = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0}$$

- L'énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2} m_e v^2$

On sait que l'électron est soumis à la force d'attraction coulombienne F_A exercée par le noyau et la force centrifuge F_c de sens opposé et de même intensité.

$$F_c \text{ est donnée par la 2}^{\text{ème}} \text{ loi de Newton : } F_c = \frac{m_e v^2}{r}$$

$$\text{De plus : } |F_A| = |F_c|$$

D'où nous pouvons relier la vitesse V et la distance r séparant l'électron du noyau :

Solution du TD 2: Module : Chimie ; E. de module : Atomistique

2AP1 _ 18/19 (S2)

$$m_e v^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0}$$

$$E_c = \frac{1}{2} m_e v^2 = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r_0}$$

L'énergie cinétique est :

2. Etablir (avec démonstration), l'expression de l'énergie du système noyau-électron correspondant à une orbite n.

On a $E_{\text{totale}} = E_p + E_c$ alors, $E_t = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}$

3. Donner la signification physique de cette expression (si l'on considère le modèle de Rutherford).
 - L'énergie est une fonction continue du rayon r.
 - L'électron étant en mouvement, il doit émettre un rayonnement. Par conséquent son énergie diminuera, chose qui n'est pas possible que si la quantité $(-1/r)$ diminue. Ce qui revient à une diminution de la distance r. l'électron finirait par s'écraser sur le noyau, contrairement aux conclusions expérimentales de Rutherford.
4. Donner deux raisons pour mettre en cause le modèle de Rutherford au profit de celui de Bohr.