

Лисичанський промислово-технологічний коледж

ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА

Конспект лекцій

до змістового модулю 1 «Основи теоретичної механіки»

ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА. Конспект лекцій до змістового модулю 1
«Основи теоретичної механіки».

Розробник: Кравцова В.М., викладач першої категорії

ЗМІСТ

1.	ЛЕКЦІЯ 1. Вступ. Основні поняття та аксіоми статyki	4
2.	ЛЕКЦІЯ 2. Плоска система збіжних сил	11
3.	ЛЕКЦІЯ 3. Пара сил	14
4.	ЛЕКЦІЯ 4. Плоска система довільно розташованих сил	17
5.	ЛЕКЦІЯ 5. Просторова система сил	23
6.	ЛЕКЦІЯ 6. Центр тяжіння	27
7.	ЛЕКЦІЯ 7. Основи кінематики	36
8.	ЛЕКЦІЯ 8. Основи динаміки. Робота і потужність	41
9.	ЛЕКЦІЯ 9. Загальні теореми динаміки	48
	ЛІТЕРАТУРА	51

ЛЕКЦІЯ 1

Тема. Вступ. Основні поняття та аксіоми статички

План.

1. Механічні рухи. Стан спокою. Розділи механіки. Роль та значення механіки в техніці.
2. Основні поняття статички. Система сил. Рівнодійна та врівноважувальна сили.
3. Аксіоми статички.
4. Вільне та невільне тіло. Зв'язки та їх реакції.

Література.

1. Ткачук А.І. Технічна механіка. Статика абсолютно твердого тіла. Опір матеріалів. – Кіровоград: ПП «Центр оперативної поліграфії «Авангард», 2015. с.3-21.
2. Федуліна А.І. Теоретична механіка. – К.: Вища школа, 2005. с.5-17.
3. Аркуша А.И. Техническая механика. Теоретическая механика и сопротивление материалов. – М.: Высшая школа, 1989. с.4-20.

1. Механічні рухи. Стан спокою. Розділи механіки. Роль та значення механіки в техніці

Механіка – це наука про найпростіші форми руху матерії, що зводяться до простих переміщень або переходів фізичних тіл з одного положення чи стану у просторі та часі в інше внаслідок взаємодії між матеріальними тілами. Вона охоплює цілий комплекс дисциплін, що вивчають рух і взаємодію різних матеріальних тіл.

Технічна механіка – це частина механіки, в якій вивчаються закономірності, що використовуються при побудові машин, механізмів і технічних споруд. В основі технічної механіки лежить класична механіка.

Технічна механіка вивчає:

- 1) механічний рух матеріальних тіл (матеріальних точок, абсолютно твердих тіл) – «Теоретична механіка»;
- 2) розрахунок на міцність, жорсткість і стійкість елементів механізмів і споруд – «Опір матеріалів»;
- 3) теоретичні основи розрахунку та конструювання деталей і складаних одиниць (вузлів) машин – «Деталі машин».

Теоретична механіка вивчає найбільш загальні закони руху, спокою та взаємодії тіл, вважаючи своїм головним завданням пізнання кількісних і якісних закономірностей, що спостерігаються у природі.

Статика – розділ теоретичної механіки, в якому вивчають методи перетворення одних систем сил на інші, що еквівалентні їм, а також умови рівноваги різних систем сил, які діють на абсолютно тверде тіло.

Механіка є однією з давніх наук, її виникнення і розвиток зумовлені потребами практики. Однак, відомості з механіки, накопичені людством протягом багатьох століть, являли собою, як правило, ряд окремих розрізнених робіт, не зібраних в єдину наукову систему. В створенні такої системи велику роль відіграли праці Галілео Галілея (1564-1642 рр.), який вперше сформулював найважливіші поняття механіки: ідеї про інерцію речовини, поняття прискорення, закони складання рухів і швидкостей, закони падіння тіл тощо.

З моменту виходу у світ в 1687 р. знаменитої наукової праці Ісаака Ньютона (1643-1727 рр.) «Математичні початки натуральної філософії» можна вважати, що механіка дійсно стала наукою. В цій праці Ньютон узагальнив як досвід своїх попередників, так і результати своєї багатогранної наукової діяльності і систематично виклав основні закони класичної механіки.

Подальший розвиток механіки, що спирається на диференціальне й інтегральне числення, пов'язаний з розробкою аналітичних методів, основи яких були закладені в працях Л.Ейлера (1707-1783 рр.), Ж.Даламбера (1717-1783 рр.), Ж.Лагранжа (1736-1813 рр.).

Наукові основи статички і гідростатички закладені давньогрецьким вченим Архімедом (287-212 рр. до н.е.). Він виклав теорію рівноваги важеля, що перебуває під дією паралельних сил, створив учення про центр ваги тіл, а також дослідив рівновагу тіл, що плавають у рідині. У геометричну статику значний внесок зробили французькі вчені П.Варіньон (1654-1722 рр.) і Л.Пуансо (1777-1859 рр.). Основоположником аналітичної статички є видатний французький математик Ж.Лагранж. Подальший розвиток аналітичної статички пов'язаний з ім'ям видатного російського математика і механіка М.В.Остроградського (1801-1861 рр.). В обґрунтуванні аксіоматички статички значну роль відіграли Л.Ейлер, М.Є.Жуковський (1847-1921 рр.), С.О.Чаплигін (1869-1942 рр.), В.Г.Імшенецький (1832-1892 рр.), О.І.Сомов (1815-1876 рр.).

Значний внесок у розвиток графостатички зробив В.Л.Кирпичов (1845-1913 рр.) – перший ректор НТУУ «КПІ».

2. Основні поняття статички. Система сил. Рівнодійна та врівноважувальна сили

До основних понять статички належать:

1) **матеріальна точка** – геометрична точка, яка має певну масу (наприклад: Земля – планета та земля – поверхня, по якій ми рухаємося);

2) **абсолютно тверде тіло** – тіло, в якому відстань між будь-якими двома його точками завжди залишається незмінною;

3) **сила** – це міра механічної взаємодії матеріальних тіл, в результаті якої тіла, що взаємодіють, можуть надавати одне одному прискорення, або деформуватися.

Данні поняття є ідеальними моделями матеріальних тіл з тим чи іншим ступенем абстракції реальних фізичних властивостей.

Сила є векторною величиною, яка характеризується:

1) напрямом, або лінією дії;

2) числовим значенням (модулем);

3) точкою прикладання.

Лінія дії сили – пряма, вздовж якої направлена сила. В системі SI числове значення сили вимірюється в таких одиницях, як ньютон (Н). В системі МКГСС – в кілограм-силах (кгс або кГ), $1 \text{ кГ} = 9,81 \text{ Н}$.

Сукупність сил, прикладених до тіла або точки, називається **системою сил**.

Система сил, лінії дії яких лежать в одній площині, називається **плоскою**. Система сил, лінії дії яких лежать у різних площинах, називається **довільно розміщеною або просторовою**.

Система сил, лінії дії яких перетинаються в одній точці, називається **збіжною**. Система паралельних сил може розміщуватися як у просторі, так і в площині.

Якщо, не порушуючи стану тіла, одну систему сил можна замінити іншою системою сил і навпаки, то такі системи сил називаються **еквівалентними**.

В тому випадку, коли система сил еквівалентна одній силі R , тоді її називають **рівнодійною** даної системи сил. Сила, яка за значенням дорівнює рівнодійній і направлена вздовж тієї самої лінії дії, але в протилежний бік, називається **врівноважувальною** силою.

3. Аксиоми статки

Аксиомами статки називають ті загальні закони, яким підлягають сили, діючі на одне і те ж тіло, або ж сили, прикладені до взаємодіючих тіл. Ці закони встановлені багатьма безпосередніми спостереженнями, а також дослідами перевіркою наслідків, які логічно випливають з цих аксіом.

Аксиома I: Принцип інерції

Система сил, прикладених до твердого тіла, є врівноваженою, якщо під її дією точка перебуває в стані відносного спокою або рухається рівномірно та прямолінійно.

Аксиома II: Умова рівноваги двох сил

Дві сили, прикладені до абсолютно твердого тіла, взаємно врівноважуються (еквівалентні нулеві) тоді і лише тоді, коли вони рівні за величиною і діють вздовж однієї прямої у протилежних напрямках (рисунок 1.1).

Аксиома III: Принцип прикладання та віднімання врівноважувальних сил

Дія заданої системи сил на тіло не зміниться, якщо до неї додати або від неї відняти врівноважену систему сил (рисунок 1.2).

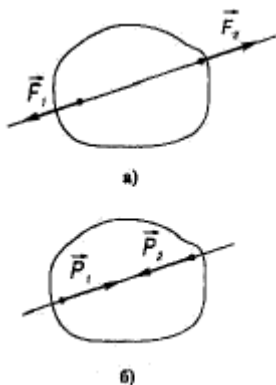


Рисунок 1.1

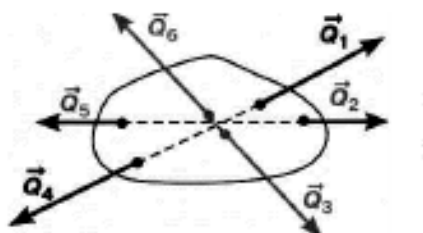


Рисунок 1.2

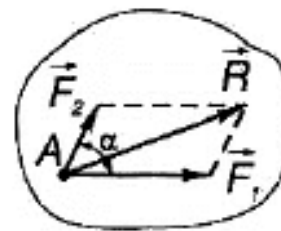


Рисунок 1.3

З цієї аксиоми випливає **наслідок** – точку прикладання сили можна переносити вздовж лінії її дії в яку завгодно точку тіла без порушення його рівноваги. **Сила – це ковзний вектор.**

Аксиома IV: Правило паралелограма

Рівнодійна двох сил, що прикладені до однієї точки, є діагоналлю паралелограма, побудованого на векторах, які зображають дані сили (рисунок 1.3).

З аксиоми паралелограма сил випливає **правило силового багатокутника (або векторного додавання сил)**, що дозволяє будь-яку кількість таких сил

додавати геометрично. Для цього достатньо побудувати векторний багатокутник, приєднуючи послідовно до першої сили F_1 вектор, геометрично рівний вектору другої сили F_2 і т.д. Вектор, проведений з точки прикладання першої сили в останню вершину побудованого багатокутника, є рівнодійною R , рівною сумі всіх сил. Одержаний таким чином багатокутник називається **силовим багатокутником**.

Аксіома V: Закон дії та протидії

Сили, з якими два тіла взаємодіють між собою, завжди рівні за величиною і протилежні за напрямом (рисунок 1.4).

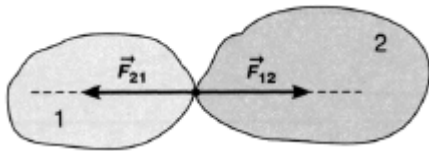


Рисунок 1.4

Дана аксіома є третім законом Ньютона – законом рівності дії і протидії. Важливо пам'ятати, що дія і протидія являють собою дві сили, прикладені завжди до різних тіл, тому ці сили не утворюють систему взаємно врівноважених сил.

4. Вільне та невільне тіло. Зв'язки та їх реакції

При розгляданні різних систем сил, прикладених до абсолютно твердого тіла, увагу необхідно приділити таким двом питанням (основним задачам статyki):

1. Як дану систему сил замінити найбільш простою, їй еквівалентною (перша основна задача статyki)?

2. Які умови рівноваги тіла, на яке діє задана система сил (друга основна задача статyki)?

При розв'язанні першої задачі статyki припустимо, що всі сили, які діють на тіло, відомі. При розв'язуванні другої задачі статyki частина сил може бути невідома.

Тіло, переміщення якого в просторі ні чим не обмежено, і яке може рухатися в будь-якому напрямку, називається **вільним**. Наприклад: повітряна кулька, що летить за вітром.

Тіло, переміщення якого в просторі в будь-якому напрямку обмежене іншими тілами, називається **невільним**. Наприклад: повітряна кулька, що прив'язана ниткою.

Тіло, яке обмежує його рух в будь-якому із напрямків, називається **в'яззю (зв'язком)**. Протидії зв'язків, що прикладаються до тіла, називають **реакціями зв'язків**.

Всі сили, що діють на невільне тіло, можна розподілити на зовнішні та внутрішні, а також поділити на задані або активні сили і пасивні (реакції зв'язків).

Внутрішні сили – це сили взаємодії між тілами, які входять в одну матеріальну систему.

Зовнішні сили – це сили взаємодії тіл даної матеріальної системи з тілами, які не входять в дану систему. Фактично, можна казати, що це сили взаємодії між розглядуваним елементом конструкції та пов'язаними з ним тілами.

Зв'язки та їх реакції. Статика розглядає переважно невідільні тіла, тобто тіла, які певним чином закріплені. Правильне визначення напрямку реакції цього закріплення має велике значення при розв'язуванні задач статки. Будь-який зв'язок обмежує одне або декілька переміщень однієї або групи точок тіла. **Реакція зв'язку завжди направлена в сторону, протилежну неможливому руху.** Таким чином, якщо відомо, переміщення яких точок тіла обмежені і в якому напрямку, то відомі і точки прикладання та напрямки реактивних сил.

Розглянемо, як направлені реакції деяких основних видів зв'язків.

Вільне опирання тіла на зв'язок. Реакція R такого зв'язку направлена вздовж нормалі до опорної поверхні в цій точці (перпендикулярно дотичній). Приклади наведені на рисунку 1.5.

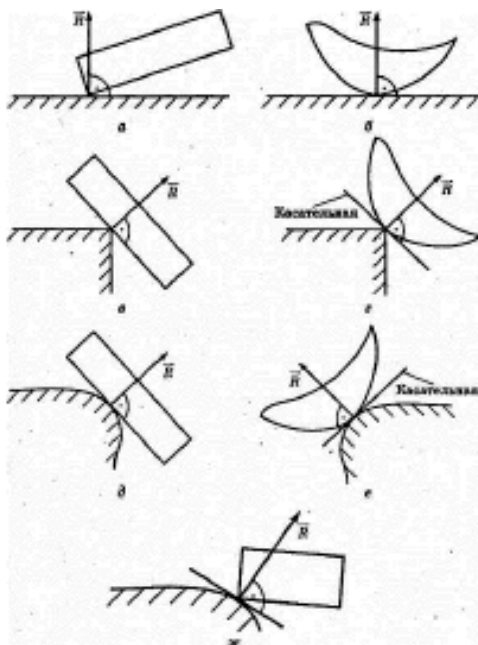


Рисунок 1.5

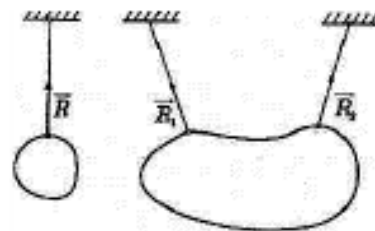


Рисунок 1.6

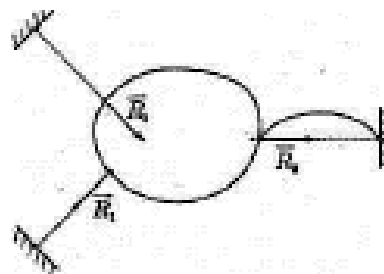


Рисунок 1.7

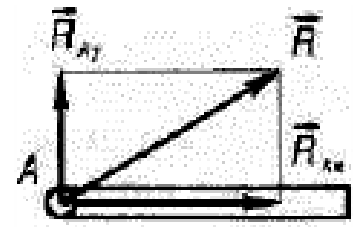
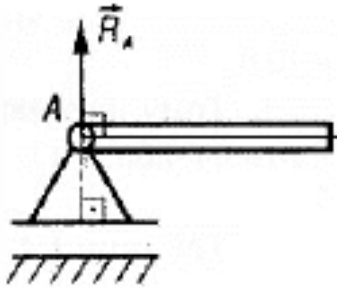
Гнучкий зв'язок (нерозтяжні нитка, трос, ланцюг, канат). Реакція цього зв'язку прикладена в точці кріплення і направлена вздовж зв'язку до точки підвішування. Гнучка невагома нерозтяжна нитка перешкоджає руху тільки в натягнутому стані (рисунок 1.6).

Невагомні жорсткі стрижні, кінці яких кріпляться з обох боків шарнірно. Якщо на стрижень не діє ніяка сила, крім зв'язку в шарнірах, то реакція зв'язку направлена вздовж прямої, яка проходить через центри шарнірів (рисунок 1.7). Якщо, стрижень розтягнений, то його реакція напрямлена в бік від тіла до стрижня, якщо, стрижень стиснений, то його реакція напрямлена в бік від стрижня до тіла.

Шарнірно-рухома опора дозволяє поворот навколо осі шарніра та лінійне переміщення на незначну відстань вздовж опорної поверхні.

Лінія дії реакція зв'язку R_A проходить через центр шарніра перпендикулярно до опорної поверхні (рисунок 1.8).

Шарнірно-нерухома опора дозволяє поворот навколо осі шарніра, але не здійснює лінійні переміщення. Реакція зв'язку R_A лежить в площині XY (перпендикулярній до осі обертання), але напрямок її невідомий. При розв'язуванні задач цей зв'язок замінюють двома невідомими взаємно перпендикулярними складовими реакції R_{AX} і R_{AY} (рисунок 1.9).



а)

б)

Рисунок 1.8

Рисунок 1.9

Питання для самоконтролю

1. Дайте визначення поняттю матеріальна точка.
2. Що розуміють під абсолютно твердим тілом?
3. Дайте визначення поняттю сила.
4. Поясніть, чим характеризується така фізична величина, як сила.
5. Що називають системою сил?
6. Які системи сил називаються еквівалентними?
7. Яка сила називається рівнодієюною даної системи сил?
8. Яку систему сил називають зрівноваженою або еквівалентною нулю?
9. Сформулюйте першу аксіому статички – принцип інерції.
10. Сформулюйте другу аксіому статички – умову рівноваги двох сил.
11. Сформулюйте третю аксіому статички – принцип прикладання і відкидання взаємно врівноважених сил.
12. Поясніть, чому сила, прикладена до абсолютно твердого тіла, являє собою ковзний вектор.
13. Сформулюйте четверту аксіому статички – про паралелограм сил.
14. Як визначається рівнодійна двох сил, напрямлених уздовж однієї прямої та в один бік?
15. Як визначається рівнодійна двох сил, напрямлених уздовж однієї прямої але в протилежні боки?
16. Як визначається геометрична сума двох векторів?
17. В чому полягає правило векторного додавання системи сил, прикладених в одній точці твердого тіла?
18. Сформулюйте п'яту аксіому статички – закон рівності дії і протидії.
19. Яке тіло називається вільним?
20. Яке тіло називається невольним?

21. Що називають зв'язком?
22. Поясніть, чим внутрішні сили відрізняються від зовнішніх сил.
23. Які сили відносять до заданих (активних)?
24. Що називається реакцією зв'язку?
25. Куди направлена реакція такого зв'язку, як гладка опорна поверхня?
26. Як направлена реакція шарнірно-нерухомої опори?
27. Як направлена реакція шарнірно-рухомої опори?
28. Куди направлена реакція гнучкого зв'язку?
29. Куди направлена реакція стрижневого зв'язку?

ЛЕКЦІЯ 2

Тема. Плоска система збіжних сил

План

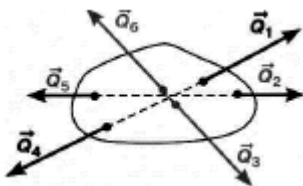
1. Поняття плоскої системи збіжних сил, визначення рівнодійної системи сил.
2. Геометричне визначення рівнодійної сили методом послідовного додавання.
3. Метод проекцій сили на вісь. Аналітичне визначення рівнодійної сили методом проекцій сили та вісь.
4. Рівняння рівноваги плоскої системи збіжних сил.

Література.

1. Ткачук А.І. Технічна механіка. Статика абсолютно твердого тіла. Опір матеріалів. – Кіровоград: ПП «Центр оперативної поліграфії «Авангард», 2015. с.22-34.
2. Федуліна А.І. Теоретична механіка. – К.: Вища школа, 2005. с.17-35.
3. Аркуша А.И. Техническая механика. Теоретическая механика и сопротивление материалов. – М.: Высшая школа, 1989. с.21-34.

1. Поняття плоскої системи збіжних сил

Система сил, лінії дії якої лежать в одній площині та перетинаються в одній точці, називається **плоскою системою збіжних сил** (рисунк 2.



1). Рисунок 2.1

2. Геометричне визначення рівнодійної сили методом послідовного додавання

При послідовному додаванні сил методом силового багатокутника (геометричним шляхом), якщо остання вершина багатокутника сил збігається з першою, то багатокутник називається **замкнутим** (рисунк 2.2). В цьому випадку рівнодійна дорівнює нулю: $R = F_1 + F_2 + \dots + F_n = \sum F_n = 0$, а система сил $(F_1, F_2, \dots, F_n)$ є врівноваженою.

Геометрична умова рівноваги плоскої системи збіжних сил – силовий багатокутник замкнений.

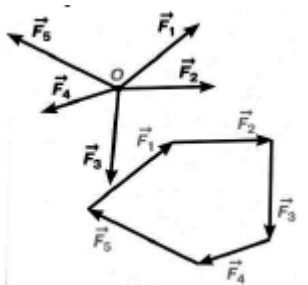


Рисунок 2.2

3. Метод проекцій сили на вісь. Аналітичне визначення рівнодіючої сили методом проекцій сили та вісь

Аналітичний метод розв'язання задач статки побудований на понятті про проекцію сили на вісь.

Проекція сили на вісь – це алгебраїчна величина, що дорівнює добутку модуля сили на косинус кута між напрямком сили і додатним напрямком осі.

Якщо цей кут гострий – проекція додатна, якщо тупий – від'ємна, а якщо сила перпендикулярна осі – її проекція дорівнює нулю (рисунк 2.3).

$$F_x = F \cdot \cos \alpha = ab;$$

$$Q_x = - Q \cdot \cos \varphi = de;$$

$$P_x = 0.$$

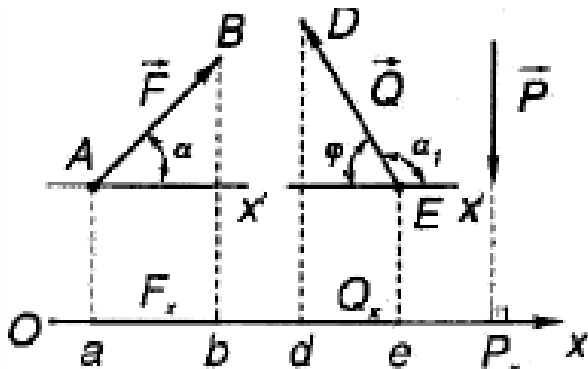


Рисунок 2.3

Для аналітичного задавання сили необхідно вибрати систему координатних осей XY , за відношенням до якої буде визначатись напрям сили на площині. Вектор, який зображає силу F , можна побудувати, якщо відомі модуль цієї сили і кути, які сила складає з координатними осями.

Для розв'язування задач зручніше задавати силу її проекціями F_x , F_y на координатні осі. Знаючи ці проекції, можна визначити модуль сили і косинуси кутів, які вона складає з координатними осями, за формулами:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}; \cos \alpha = \frac{F_x}{F}; \sin \beta = \frac{F_y}{F}$$

4. Рівняння рівноваги плоскої системи збіжних сил

Для рівноваги плоскої системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб рівнодійна сила дорівнювала нулю:

$$R = F_1 + F_2 + \dots + F_n = \sum F_n = 0$$

Користуючись методом проекцій сили на вісь, одержуємо:

$$\begin{cases} R_x = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = \sum F_{nx} = 0; \\ R_y = F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} = \sum F_{ny} = 0 \end{cases}$$

Ці умови називаються **аналітичними умовами рівноваги плоскої системи збіжних сил** і формулюються наступним чином:

Для рівноваги плоскої системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми проекцій сил на дві взаємно перпендикулярні осі дорівнювали нулю одночасно.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_x = 0; \\ \sum F_y = 0. \end{array} \right.$$

Умови рівноваги називаються також рівняннями рівноваги.

Одержані вирази дають змогу відповісти на питання, чи буде тіло знаходитись в рівновазі під дією даної системи збіжних сил.

Загальні умови розв'язування задач статки на рівновагу плоскої системи збіжних сил

Аналітичні умови рівноваги дають змогу відповісти на питання, чи буде тіло знаходитись в рівновазі під дією даної системи збіжних сил. З практичної точки зору більш важливою є інша задача про рівновагу тіла. В більшості випадків наперед відомо, що тіло знаходиться в рівновазі під дією заданої системи активних сил і зв'язків, а реакції зв'язків є невідомими. В даному випадку за допомогою рівнянь рівноваги можуть бути визначені реакції зв'язків.

Алгоритм розв'язування задач плоскої системи збіжних сил

1. Виділити об'єкт рівноваги – тіло або точку, рівновагу якого потрібно розглянути.
2. Задані активні сили прикласти до виділеного об'єкта рівноваги.
3. Відкинути зв'язки та замінити їх відповідними реакціями.
4. Вибрати координатні осі та скласти рівняння рівноваги.
5. Складені рівняння розв'язати відносно відомих величин.
6. Виконати перевірку шляхом визначення суми проекцій всіх сил на нахилenu ось.
7. Записати відповідь.

Питання для самоконтролю

1. Що називається проекцією сили на вісь?
2. За яких умов проекцією сили на вісь додатна, від'ємна або дорівнює нулю?
3. Запишіть формулу для визначення модуля сили F за її проекціями F_x , F_y на координатні осі.
4. Запишіть формули для визначення напрямних косинусів кутів, які сила F складає з координатними осями.
5. Запишіть вирази для проекцій на осі координат рівнодійної R системи збіжних сил.
6. Які вирази дають повне аналітичне визначення рівнодійної системи збіжних сил?
7. Чим може бути замінена система збіжних сил?
8. Що виражає умову рівноваги системи збіжних сил в графічній формі?
9. Сформулюйте аналітичну умову рівноваги плоскої системи збіжних сил та запишіть відповідні рівняння рівноваги.

ЛЕКЦІЯ 3

Тема. Пара сил

План

1. Поняття пари сил, характеристика пари сил та її основні властивості: обертова дія пари сил на тіло, момент пари сил, правило моментів пари сил, еквівалентність, складання і рівновага пар сил, що розміщені в одній площині. Умова рівноваги пар сил.
2. Характеристика моменту сили відносно точки, правило моментів сил відносно точки, різниця між моментом пари сил і моментом сили.

Література.

1. Ткачук А.І. Технічна механіка. Статика абсолютно твердого тіла. Опір матеріалів. – Кіровоград: ПП «Центр оперативної поліграфії «Авангард», 2015. с.36-53.
2. Федуліна А.І. Теоретична механіка. – К.: Вища школа, 2005. с.43-63.
3. Аркуша А.И. Техническая механика. Теоретическая механика и сопротивление материалов. – М.: Высшая школа, 1989. с.35-44.

1. Поняття пари сил, характеристика пари сил та її основні властивості.

Умова рівноваги пар сил.

Парою сил, прикладеною до твердого тіла, називається система двох паралельних рівних за величиною сил, які направлені в протилежні боки вздовж ліній дії (рисунок 3.1).

Площина (N), в якій розміщені сили пари, називається площиною дії пари або площиною пари.

Плечем пари h (l) називається найкоротша відстань між лініями дії сил пари.

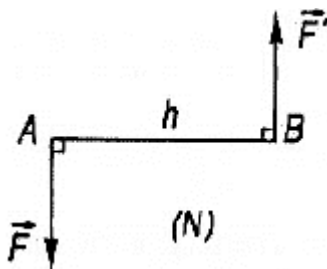


Рисунок 3.1

З Аксиоми II випливає, що система сил пари не знаходиться в рівновазі. Пара сил не має рівнодійної, оскільки лінії дії цих сил не проходять через одну точку.

Дослідним шляхом встановлено, що пари сил, які діють на тверде тіло, намагається надати йому деяке обертання.

Моментом пари сил називається вектор M , перпендикулярний площині пари і рівний за модулем добутку модуля однієї з сил пари на плече пари. $M = F \cdot l$.

Правило моментів пари сил

Момент пари сил вважається **позитивним**, якщо пара намагається обернути тіло за годинниковою стрілкою, а **негативним** – навпаки.

За одиницю вимірювання модуля моменту пари сил прийнятий ньютон на метр (Н·м).

Дві пари сил називаються **еквівалентними**, якщо вони діють на тіло однаково. Для того, щоб дві пари сил, які лежать в одній площині, були еквівалентними, достатньо, щоб моменти цих пар та їхні напрями обертання збігалися.

Властивості пари сил

1. Не змінюючи дії пари на тіло, її можна переносити в площині її дії.
2. Не змінюючи дії пари на тіло, її можна змінити величину сили, яка входить в цю пару і довжину плеча так, щоб момент пари залишався незмінним. Наприклад: $M = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4 = 12 \text{ Нм}$.
3. Додавати дві або кілька пар сил – це означає знайти таку пару сил, яка б чинила на тіло таку саму дію, як і вся система пар.

$$M_{\Sigma} = F_1 \cdot l_1 + F_2 \cdot l_2 - \dots - F_n \cdot l_n$$

Пара сил, яка замінює дію кількох пар, називається **рівнодійною**. Момент **рівнодійної** кількох пар сил, розміщених в одній площині, дорівнює алгебраїчній сумі моментів пар, які додаються.

Умова рівноваги пар сил, що лежать в одній площині

Система пар сил, розміщених в одній площині, врівноважуються, якщо алгебраїчна сума моментів цих пар дорівнює нулю.

2. Характеристика моменту сили відносно точки, правило моментів сил відносно точки, різниця між моментом пари сил і моментом сили.

Модуль моменту сили **F** відносно центра **O** чисельно дорівнює добутку сили на плече та направлений перпендикулярно площині, що проходить через точку **O** і лінію дії сили. Модуль моменту сили визначається за формулою: $M_o = F \cdot l$.

З визначення моменту сили відносно точки випливає:

- 1) якщо переміщувати точку прикладання сили вздовж лінії дії сили, то момент сили відносно точки не зміниться;
- 2) момент сили відносно точки дорівнює нулю, якщо лінія дії сили проходить через цю точку, оскільки плече сили дорівнює нулю.

Правило моментів сил відносно точки

Момент сили відносно точки є **позитивним**, якщо сила обертає тіло відносно точки за рухом годинникової стрілки, а **негативним** – навпаки.

Різниця між моментом пари сил і моментом сили

Значення і напрям моменту пари сил у будь-якій точці є однаковим: $M = F \cdot l$.

Значення і напрям моменту сили відносно точки залежить від положення точки, відносно якої визначається момент (точка лежить справа, зліва чи на лінії дії сили):

$$M_a = F \cdot l; \quad M_b = - F \cdot l; \quad M_c = F \cdot l = 0, \text{ тому що } l = 0.$$

Питання для самоконтролю

1. Що називається парою сил, прикладеною до твердого тіла?
2. Що називається площиною дії пари сил?
3. Що називається плечем пари сил?
4. Поясніть, чому система сил пари не знаходиться в рівновазі.
5. Поясніть, що намагається зробити з абсолютно твердим тілом прикладена до нього пара сил.
6. Що називається моментом пари сил?
7. Запишіть формулу для визначення моменту пари сил.
8. В яких одиницях вимірюється моменту пари сил?
9. Вкажіть правило знаків моменту пари сил.
10. Поясніть, чому дії над парами сил можна замінити еквівалентними операціями над їх моментами.
11. Сформулюйте та поясніть основні властивості пар сил.
12. Що називається моментом сили F відносно точки O (центра)?
13. Запишіть формулу для визначення моменту сили відносно точки та поясніть його розмірність.
14. Що називається плечем сили відносно центра?
15. Вкажіть правило знаків моменту сили відносно точки.
16. Поясніть, чому якщо переміщувати точку прикладання сили вздовж лінії дії сили, то момент сили відносно центру не зміниться.
17. За яких умов момент сили відносно точки дорівнює нулю?
18. Яка різниця між моментом пари сил і моментом сили?

ЛЕКЦІЯ 4

Тема. Плоска система довільно розташованих сил

План.

1. Поняття плоскої системи довільно розташованих сил. Приведення сили до заданої точки. Приведення плоскої системи сил до заданої точки. Головний вектор і головний момент.
2. Визначення рівнодійної плоскої системи сил. Теорема Варіона.
3. Рівняння рівноваги. Умови рівноваги плоскої системи довільно розташованих та паралельних сил.
4. Види опор балок: рухомий та нерухомий шарнір, жорстке закріплення та їх реакції.
5. Види навантажень.

Література.

1. Ткачук А.І. Технічна механіка. Статика абсолютно твердого тіла. Опір матеріалів. – Кіровоград: ПП «Центр оперативної поліграфії «Авангард», 2015. с.36-53.
2. Федуліна А.І. Теоретична механіка. – К.: Вища школа, 2005. с.63-82.
3. Аркуша А.И. Техническая механика. Теоретическая механика и сопротивление материалов. – М.: Высшая школа, 1989. с.45-63.

1. Поняття плоскої системи довільно розташованих сил. Приведення сили до заданої точки. Приведення плоскої системи сил до заданої точки. Головний вектор і головний момент

Система сил, лінії дії якої довільно розташовані на площині, називається **плоскою системою довільно розташованих сил**.

Приведення сили до заданої точки

В точці А прикладена сила F (рисунок 4.1), її необхідно перенести в точку В. Але за наслідком Аксиоми III силу можна переносити тільки вздовж її лінії дії. Тому прикладемо тепер в точці В тіла систему двох сил F' і F'' , яка еквівалентна нулю, причому $|F'| = |F''|$, спрямовані в протилежні боки $F' = -F''$ і лежать на одній лінії дії. При цьому тіло залишилось в рівновазі.

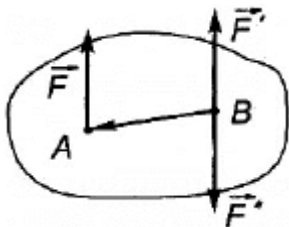


Рисунок 4.1

Але з іншого боку система сил, що діє на тіло еквівалентна силі F' і парі сил (F, F'') з моментом, що дорівнює моменту даної сили відносно точки В. Одержану таким чином пару сил (F, F'') називають **присданою парою сил**.

Не змінюючи статичного стану тіла, прикладену до цього тіла силу можна перенести у будь-яку його точку, паралельно самій собі, прикладаючи при цьому пару, момент якої дорівнює моменту даної сили відносно нової точки прикладення.

Ми виконали приведення сили до заданої точки, але також можна привести систему сил до заданої точки. В результаті приведення довільної плоскої системи сил до однієї точки отримуємо систему сил та систему пар сил. Склавши систему сил, отримуємо головний вектор, склавши систему пар – головний момент. **Отже, довільну плоску систему сил можна привести до однієї сили – головного вектора і однієї пари з моментом, що дорівнює головному моменту.**

2. Визначення рівнодійної плоскої системи сил. Теорема Варіона

Момент рівнодійної збіжної системи сил відносно довільної точки дорівнює алгебраїчній сумі моментів складових сил відносно тієї ж самої точки.

$$M_o(R) = \sum M_o(F)$$

Доведення:

Нехай в точці А перетинаються лінії дії системи збіжних сил ($F_1, F_2, \dots, F_n$) (рисунок 4.2).

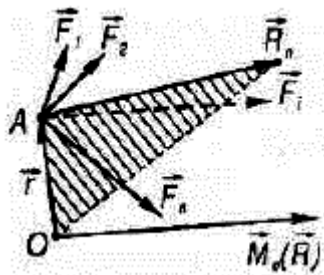


Рисунок 4.2

Рівнодійна заданої системи сил дорівнює

$R = F_1 + F_2 + \dots + F_n$. Позначимо через r – радіус-вектор точки А відносно довільного центра О.

Тоді з визначення моменту сили відносно точки О маємо:

$$\begin{aligned} M_o(R) &= r \cdot R = r \cdot (F_1 + F_2 + \dots + F_n) = r \cdot F_1 + r \cdot F_2 + \dots + r \cdot F_n = \\ &= M_o(F_1) + M_o(F_2) + \dots + M_o(F_n) = \sum M_o(F), \end{aligned}$$

що й потрібно було довести.

Слід зазначити, що ця теорема узагальнюється на випадок будь-якої системи, що зводиться до рівнодійної.

Якщо сили і точка О розміщені в одній площині, то їх моменти перпендикулярні до цієї площини і лежать на одній прямій. Тому **момент рівнодійної такої системи сил дорівнює алгебраїчній сумі моментів складових сил відносно цієї точки:**

$$M_o(R) = M_o(F_1) + M_o(F_2) + \dots + M_o(F_n) = \sum M_o(F).$$

3. Рівняння рівноваги. Умови рівноваги плоскої системи довільно розташованих та паралельних сил

Аналітична умова рівноваги плоскої системи довільно розташованих сил

Для рівноваги плоскої системи довільно розташованих сил необхідно і достатньо, щоб головний вектор $F_{\text{гол}}$ та головний момент $M_{\text{гол}}$ дорівнювали нулю одночасно:

$$\begin{cases} F_{\text{гол}} = 0; \\ M_{\text{гол}} = 0. \end{cases}$$

Три види рівнянь рівноваги

$$\begin{array}{lll} \text{I} \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_0 = 0 \end{cases} & \text{II} \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum M_A = 0 \\ \sum M_B = 0 \end{cases} & \text{III} \begin{cases} \sum M_A = 0 \\ \sum M_B = 0 \\ \sum M_C = 0 \end{cases} \end{array}$$

Аналітична умова рівноваги плоскої системи паралельних сил

Для рівноваги плоскої системи паралельних сил необхідно і достатньо, щоб головний вектор $F_{\text{гол}}$ та головний момент $M_{\text{гол}}$ дорівнювали нулю одночасно:

$$\begin{cases} F_{\text{гол}} = 0; \\ M_{\text{гол}} = 0. \end{cases}$$

Два види рівнянь рівноваги при умові паралельності ОУ

$$\begin{array}{ll} \text{I} \begin{cases} \sum F_y = 0 \\ \sum M_A = 0 \end{cases} & \text{II} \begin{cases} \sum M_A = 0 \\ \sum M_B = 0 \end{cases} \end{array}$$

4. Види опор балок: рухомий та нерухомий шарнір, жорстке закріплення та їх реакції

Балкою називається деталь, яка зроблена з прямого бруса з опорами у двох (чи більше) точках і яка несе прямоосьове навантаження. Балкові системи застосовують у машинах і спорудах.

Види кріплень балок та напрямки реакцій зв'язків:

- 1) балка має дві опори – шарнірно-нерухому і шарнірно-рухому (рисунок 4.3);
- 2) балка має три непаралельні шарнірно прикріплені стрижні (рисунок 4.4);
- 3) балка спирається на три гладенькі поверхні, одна з яких має упор (рисунок 4.5);
- 4) балка в трьох точках спирається на гладенькі поверхні (рисунок 4.6);
- 5) балка жорстко закріплюється в стіні або затискується спеціальним пристроєм (рисунок 4.7).

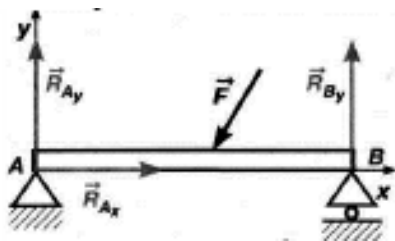


Рисунок 4.3

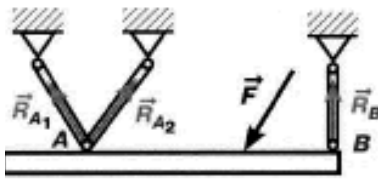


Рисунок 4.4

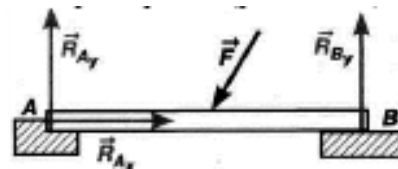


Рисунок 4.5

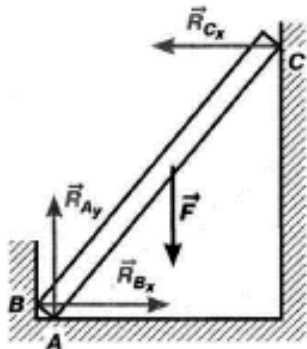


Рисунок 4.6

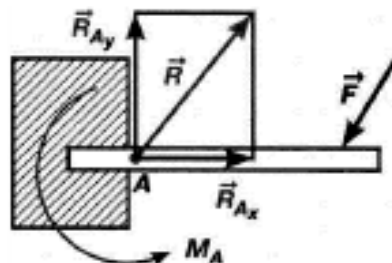


Рисунок 4.7

5. Види навантажень

Навантаженнями називають зовнішні сили, які діють на елементи конструкцій чи деталі машин і споруд під час їх експлуатації.

За часом дії навантаження бувають:

- 1) **постійні**, які діють завжди, наприклад, сила тяжіння, що діє на споруду;
- 2) **тимчасові**, що діють протягом обмеженого періоду часу, наприклад, поїзд, що їде через міст.

Залежно від характеру прикладання сил у часі розрізняють:

- 1) **статичні навантаження**, які відносно повільно й плавно (хоча б протягом кількох секунд) зростають від нуля до свого граничного значення, а далі залишаються незмінними (або незначно змінними). При передачі статичних навантажень на конструкцію всі її частини знаходяться в рівновазі. Прискорення елементів конструкції відсутні або настільки малі, що ними можна знехтувати, а отже, й силами інерції. Прикладом можуть слугувати навантаження, які діють на гідротехнічні споруди;

- 2) **динамічні навантаження** – навантаження, яке змінює свою величину за малий час. Воно супроводжується значними прискореннями як деформованого тіла, так і тіл, що взаємодіють з ним. При цьому виникають сили інерції, якими не можна нехтувати. **Динамічні навантаження поділяють на:**

- а) **миттєво прикладені**, які зростають від нуля до свого граничного значення за дуже малий проміжок часу (частки секунди). Таким є навантаження при займанні пального в циліндрі двигуна внутрішнього згорання або при зрушуванні з місця поїзда;

- б) **ударні навантаження**, для яких характерне те, що в мить їх прикладання тіло, яке спричинює навантаження, має певну кінетичну енергію. Таке навантаження утворюється, наприклад, при забиванні паль за допомогою копра, в деталях механічного ковальського молота, в гідросистемах під час гідравлічного удару;

в) **повторно-змінні навантаження**, які безперервно й періодично змінюються в часі. Вони, як правило, пов'язані з рухами деталей, що циклічно змінюються. Це зворотно-поступальні рухи штока поршня, коливання елементів конструкцій тощо. Дії таких навантажень зазнають шатуни у двигунах внутрішнього згоряння, вали, осі залізничних вагонів тощо. **Це самі небезпечні навантаження.**

За характером прикладання навантаження поділяють на:

1) **зосереджені** (рисунок 4.8) – такі зовнішні сили, що передаються на елемент конструкції через нескінченно малі площадки (фактично, прикладені до тіла в певній точці), наприклад, дія ваги електровоза на рейки;

2) **розподілені** (рисунок 4.9, 4.10) – такі зовнішні сили, що діють на одиницю об'єму, площі або довжини конструкції, наприклад, сила тяжіння, що діє на всю балку, дія снігового або вітрового навантаження на споруду. Розподілені за об'ємом, площею чи довжиною навантаження характеризуються **інтенсивністю** – силою, що припадає на одиницю об'єму (γ), площі поверхні (p) чи довжини лінії (q) відповідно.

Зосереджена сила є абстракцією, так як будь яке реальне навантаження прикладене до певної ділянки лінії, площі чи об'єму тіла. Наприклад, навіть сила, що передається по нитці, розподілена по площі поперечного перерізу нитки.

За характером розподілу навантаження можуть бути:

- 1) рівномірно розподілені (рисунок 4.8);
- 1) нерівномірно розподілені (рисунок 4.10).

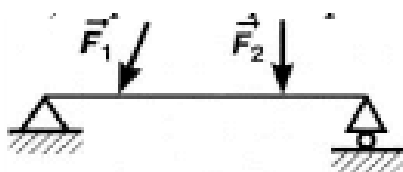


Рисунок 4.8

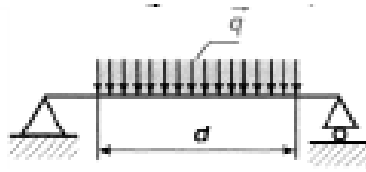


Рисунок 4.9

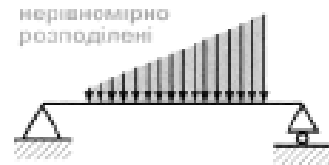


Рисунок 4.10

Рівномірно розподілене навантаження, що прикладене під прямим кутом до елемента споруди або деталі машини, може бути перетворене на зосереджене за довжиною, яке прикладається до середини довжини балки (рисунок 4.11):

$$Q = q \cdot d,$$

де Q – зосереджена сила, Н;
 q – інтенсивність розподіленого навантаження, Н/м;
 d – довжина дії розподіленого навантаження, м.

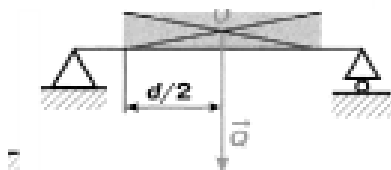


Рисунок 4.11

Алгоритм розв'язування задач просторової системи довільно розташованих сил

- 1 Вибираємо координатні осі так, щоб ось Ox сумістилась з балкою.
- 2 Виконуємо перетворення активних сил балки:
 - нахилену силу замінюємо двома взаємно перпендикулярними складовими;
 - рівномірне розподілене навантаження замінюємо зосередженою силою.
- 3 Відкидаємо опори та замінюємо їх дію відповідними реакціями.
- 4 Складаємо три рівняння рівноваги.
- 5 Складені рівняння розв'язуємо відносно відомих величин.
- 6 Перевіряємо визначені невідомі реакції.
- 7 Записуємо відповідь.

Питання для самоконтролю

1. Дайте визначення плоскої системи довільно розташованих сил.
2. Сформулюйте та доведіть теорему Варіньона.
3. Сформулюйте правило приведення сили до точки.
4. Сформулюйте правило приведення системи сил до точки.
5. Що називається приєднаною парою сил?
6. Сформулюйте аналітичні умови рівноваги плоскої системи довільних сил.
7. Запишіть рівняннями рівноваги плоскої системи довільних сил.
8. Запишіть рівняннями рівноваги плоскої системи паралельних сил.
9. Що називається балкою?
10. Які види кріплень балок вам відомі?
11. Куди направлена реакція такого зв'язку, як защемлення (жорстке закладання)?
12. Які сили називаються навантаженнями?
13. На які види поділяються навантаження за характером дії?
14. На які види поділяються навантаження за часом дії?
15. Поясніть, чим розподілені навантаження відрізняються від зосереджених.
16. На які види поділяються розподілені навантаження?
17. Як рівномірно розподілене паралельне навантаження, що прикладене під прямим кутом, може бути перетворене на зосереджене за довжиною?
18. Наведіть послідовність дій, якої слід дотримуватись при розв'язуванні задач на рівновагу довільної просторової системи сил.

ЛЕКЦІЯ 5

Тема. Просторова система сил

План.

1. Просторова система збіжних сил, поняття та її основні властивості: рівнодійна, умова рівноваги просторової системи збіжних сил.
2. Просторова система довільно розташованих сил, поняття і її основні властивості: головний вектор, головний момент; умова рівноваги; опорні реакції вала, моменти сили відносно осі.

Література.

1. Ткачук А.І. Технічна механіка. Статика абсолютно твердого тіла. Опір матеріалів. – Кіровоград: ПП «Центр оперативної поліграфії «Авангард», 2015. с.54-86.
1. Федуліна А.І. Теоретична механіка. – К.: Вища школа, 2005. с.94-107.
2. Аркуша А.И. Техническая механика. Теоретическая механика и сопротивление материалов. – М.: Высшая школа, 1989. с.4-20, с.72-88.

1. Просторова система збіжних сил, поняття та її основні властивості: рівнодійна, умова рівноваги просторової системи збіжних сил

Система сил, лінії дії яких лежать в просторі та перетинаються в одній точці, називається **просторовою системою збіжних сил**. Наприклад: кут кімнати, де перетинаються висота, ширина та довжина кімнати.

У просторі сили проектується на три координатні осі X, Y, Z.

Рівнодійна просторової системи трьох збіжних сил прикладена в тій же самій точці і за модулем і напрямком дорівнює діагоналі паралелепіпеда, побудованого на цих силах, як на ребрах.

Рівнодійна просторової системи збіжних сил визначається за правилом багатокутника.

Геометрична умова рівноваги просторової системи збіжних сил – силовий багатокутник замкнений.

Для рівноваги просторової системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб рівнодійна сила дорівнювала нулю:

$$R = F_1 + F_2 + \dots + F_n = \sum F_n = 0$$

Користуючись методом проекцій сили на осі, одержуємо:

$$\begin{cases} R_X = F_{1X} + F_{2X} + \dots + F_{nX} = \sum F_{nX} = 0; \\ R_Y = F_{1Y} + F_{2Y} + \dots + F_{nY} = \sum F_{nY} = 0; \\ R_Z = F_{1Z} + F_{2Z} + \dots + F_{nZ} = \sum F_{nZ} = 0. \end{cases}$$

Ці умови називаються **аналітичними умовами рівноваги просторової системи збіжних сил** і формулюються наступним чином:

Для рівноваги просторової системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми проекцій сил на три взаємно перпендикулярні осі дорівнювали нулю одночасно.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_x = 0; \\ \sum F_y = 0; \\ \sum F_z = 0. \end{array} \right.$$

2. Просторова система довільно розташованих сил, поняття і її основні властивості: головний вектор, головний момент; умова рівноваги; опорні реакції вала, моменти сили відносно осі

Просторова система довільно розташованих сил – система сил, лінії дії якої довільно розташовані в просторі.

Першою (основною) задачею статички твердого тіла є встановлення умов приведення заданої (довільної) системи сил до простішого вигляду.

Ми виконували приведення сили до заданої точки, в результаті отримували силу та пару сил. Також приводили систему сил до заданої точки. В результаті приведення довільної плоскої системи сил до однієї точки отримували систему сил та систему пар сил. Склавши систему сил, отримували головний вектор, склавши систему пар – головний момент. Аналогічно можемо звести просторову довідну систему сил до однієї точки.

Отже, довільну просторову системи сил можна привести до однієї сили – головного вектора і однієї пари з моментом, що дорівнює головному моменту.

Головним вектором $F_{\text{гол}}$ системи сил називається векторна сума всіх сил заданої системи:

$$\vec{F}_{\text{ГОЛ}} = \vec{F}_O = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum \vec{F}_n$$

Головним моментом $M_{\text{гол}}$ системи сил відносно центра зведення (точки O) називається векторна сума моментів всіх сил, що входять в систему, відносно того ж центра:

$$\vec{M}_{\text{ГОЛ}} = \vec{M}_O = M_O(\vec{F}_1) + M_O(\vec{F}_2) + \dots + M_O(\vec{F}_n) = \sum M_O(\vec{F}_n)$$

Проектуючи вирази $\vec{F}_{\text{гол}}$ і $\vec{M}_{\text{гол}}$ на осі декартової прямокутної системи координат OXYZ, одержимо аналітичні вирази для головного вектора і головного моменту довільної просторової системи сил:

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{OX} = F_{1X} + F_{2X} + \dots + F_{nX} = \sum F_{nX}; \\ F_{OY} = F_{1Y} + F_{2Y} + \dots + F_{nY} = \sum F_{nY}; \\ F_{OZ} = F_{1Z} + F_{2Z} + \dots + F_{nZ} = \sum F_{nZ}; \\ \left\{ \begin{array}{l} M_{OX} = M_O(F_{1X}) + M_O(F_{2X}) + \dots + M_O(F_{nX}) = \sum M_O(F_{nX}); \\ M_{OY} = M_O(F_{1Y}) + M_O(F_{2Y}) + \dots + M_O(F_{nY}) = \sum M_O(F_{nY}); \\ M_{OZ} = M_O(F_{1Z}) + M_O(F_{2Z}) + \dots + M_O(F_{nZ}) = \sum M_O(F_{nZ}). \end{array} \right. \end{array} \right.$$

де F_{Ox} , F_{Oy} , F_{Oz} і M_{Ox} , M_{Oy} , M_{Oz} – проекції відповідно головного вектора F_O і головного моменту M_O на осі координат.

Тоді модулі головного вектора F_O та головного моменту M_O довільної просторової системи сил визначаються за формулами:

$$F_O = \sqrt{F_{OX}^2 + F_{OY}^2 + F_{OZ}^2};$$

$$M_O = \sqrt{M_{OX}^2 + M_{OY}^2 + M_{OZ}^2}.$$

Умова рівноваги просторової системи довільно розташованих сил

Для рівноваги просторової системи довільно розташованих сил необхідно і достатньо, щоб головний вектор $F_{гол}$ та головний момент $M_{гол}$ дорівнювали нулю одночасно:

$$\begin{cases} F_{гол} = 0 \\ M_{гол} = 0 \end{cases}$$

Рівняння рівноваги

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum F_z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} M_x(F) = 0 \\ M_y(F) = 0 \\ M_z(F) = 0 \end{cases}$$

Опорами валів є підшипники, тобто це шарнірно-рухома та шарнірно-нерухома опори, тому опорними реакціями валів є реакції шарнірно-рухомої та шарнірно-нерухомої опор, які розкладаються на осі OXYZ.

Моменти сили відносно осі дорівнює проекції на цю вісь векторного моменту сили відносно будь-якої точки на цій осі. Отже, момент сили відносно осі є скалярною величиною, як і будь-яка проекція вектора на вісь.

Якщо сила розташована в площині, перпендикулярній до осі, то її проекція на цю площину дорівнює самій силі, а модуль моменту сили відносно точки O – перетину осі з площиною, дорівнює добутку сили на плече: $M_z(F) = F_{xy} \cdot l$.

Момент сили F відносно даної осі z не зміниться при переміщенні точки A прикладання даної сили вздовж лінії її дії, оскільки при цьому не зміниться ні проекція F_{xy} сили F на площину xy , ні її плече l (рисунок 5.1).

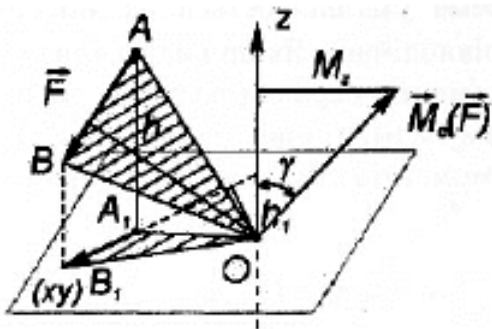


Рисунок 5.1

Момент сили відносно осі дорівнює нулю, якщо сила і вісь лежать в одній площині.

Алгоритм розв'язування задач просторової системи довільно розташованих сил

1. Вибираємо координатні осі так, щоб ось OZ сумістилась з балкою.
2. Визначаємо активні сили.
3. Відкидаємо опори та замінюємо їх дію відповідними реакціями.

- 4 Складаємо шість рівнянь рівноваги.
- 5 Складені рівняння розв'язуємо відносно відомих величин.
- 6 Перевіряємо визначені невідомі реакції.
- 7 Записуємо відповідь.

Питання для самоконтролю

1. Що називається головним вектором F_0 системи сил?
2. Що називається головним моментом M_0 системи сил відносно центра зведення O ?
3. Запишіть та поясніть аналітичні вирази для проекцій головного вектора довільної просторової системи сил.
4. Запишіть та поясніть аналітичні вирази для проекцій головного моменту довільної просторової системи сил.
5. Якими виразами задається модуль головного вектора довільної просторової системи сил?
6. Якими виразами задається модуль головного моменту довільної просторової системи сил?
7. Що називається моментом сили відносно осі?
8. Поясніть, чому момент сили відносно даної осі не зміниться при переміщенні точки прикладання даної сили вздовж лінії її дії.
9. Сформулюйте умови рівноваги просторової системи збіжних сил в аналітичній формі.
10. Запишіть рівняння рівноваги просторової системи збіжних сил в аналітичній формі.
11. Сформулюйте умови рівноваги довільної просторової системи сил в аналітичній формі.
12. Запишіть рівняння рівноваги довільної просторової системи сил в аналітичній формі.
13. Наведіть послідовність дій, якої слід дотримуватись при розв'язуванні задач на рівновагу довільної просторової системи сил.

ЛЕКЦІЯ 6

Тема. Центр тяжіння.

План.

1. Центр паралельних сил. Центр тяжіння тіла.
2. Формули для визначення положення центра тяжіння простих фігур, які мають осі симетрії та складних геометричних фігур і стандартних профілів.
3. Рівновага твердого тіла, що має нерухому точку або вісь обертання; стійка, нестійка та байдужа рівновага.
4. Рівновага тіла, що має опорну площину.
5. Момент перекидання, момент стійкості, коефіцієнт стійкості.

Література.

1. Ткачук А.І. Технічна механіка. Статика абсолютно твердого тіла. Опір матеріалів. – Кіровоград: ПП «Центр оперативної поліграфії «Авангард», 2015. с.87-117.
2. Федуліна А.І. Теоретична механіка. – К.: Вища школа, 2005. с.107-121.
3. Аркуша А.И. Техническая механика. Теоретическая механика и сопротивление материалов. – М.: Высшая школа, 1989. с.88-107.

1. Центр паралельних сил. Центр тяжіння тіла

Припустимо, що до абсолютно твердого тіла в точках A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 прикладена система сил $(P_1, P_2, P_3, P_4, P_5)$, з яких P_1, P_2, P_3 направлені в один бік, а P_4, P_5 – в інший (рисунок 6.1).

Додамо сили P_1 і P_2 , за правилом додавання двох паралельних сил, направлених в один бік:

$$R_1 = P_1 + P_2; \quad \frac{A_1 B_1}{A_2 B_1} = \frac{P_2}{P_1}$$

Визначивши модуль рівнодійної R_1 та її точку прикладення B_1 , додамо R_1 і силу P_3 .

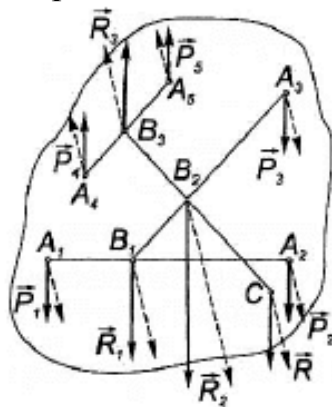


Рисунок 6.1

Аналогічно визначимо рівнодійну сил P_4 і P_5 :

$$R_2 = P_4 + P_5; \quad \frac{A_3 B_2}{B_1 B_2} = \frac{R_1}{P_3}$$

Внаслідок послідовного складання заданих паралельних сил одержимо дві протилежно направлені паралельні сили R_2 і R_3 , які прикладені в точках B_2 і B_3 .

В залежності від значення модулів і взаємного розташування точок прикладення цих сил можливі наступні випадки:

I. Сили R_2 і R_3 не рівні за модулем. Прийmemo, що $R_2 > R_3$, тоді рівнодійна R заданих сил має модуль:

$$R = R_2 - R_3$$

і направлена в бік R_2 (рисунок 6.1). Точка C прикладення рівнодійної лежить на продовженні відрізка B_2B_3 за точкою прикладення більшої сили R_2 , причому

$$\frac{B_2C}{B_3C} = \frac{R_3}{R_2}.$$

Точка C називається центром паралельних сил. Через цю точку обов'язково проходить лінія дії рівнодійної заданої системи паралельних сил, якщо, не змінюючи модуля сил, повертати лінії їхньої дії навколо точок прикладення сил на один і той самий кут, в один і той самий бік (рисунок 6.1). Положення центра паралельних сил не залежить від напрямку сил, а залежить тільки від їхніх модулів і точок їх прикладання. Таким чином, **центром паралельних сил називається точка C на лінії дії рівнодійної системи паралельних сил, яка не змінює свого положення при повороті всіх сил системи навколо точок їх прикладання на один і той самий кут в одному напрямі.**

II. Сили R_2 і R_3 рівні за модулем, але їх лінії дії не збігаються. В цьому випадку система зводиться до пари сил.

III. Сили R_2 і R_3 рівні за модулем і їх лінії дії збігаються. Задані сили в цьому випадку взаємно врівноважуються.

Система паралельних сил, направлених в один і той же бік не може врівноважуватись або приводиться до пари сил. Ця система завжди має рівнодійну.

Центр тяжіння твердого тіла

Якщо абсолютно тверде тіло, розмірами якого можна знехтувати порівняно з розмірами Землі, знаходиться в полі тяжіння нашої планети, наприклад поблизу земної поверхні, то з великим ступенем точності можна вважати, що сили тяжіння, які діють на окремі частини тіла, утворюють систему паралельних сил.

Ця гіпотеза про паралельність сил тяжіння є виправданою в багатьох задачах техніки. **Наприклад**, якщо уявити собі потяг завдовжки 1870 м (1 морська миля), то напрями сил тяжіння, що діють на перший і останній вагони, будуть відхилятися від паралельності лише на 1 дугову хвилину, оскільки радіус Землі в середньому дорівнює 6371 км. Дана гіпотеза еквівалентна гіпотезі про те, що поверхня Землі є плоскою і Земля не обертається. Зрозуміло, що в задачах небесної механіки, в задачах про рух штучних супутників Землі, в задачах про рух кораблів, літаків, ракет тощо сили тяжіння розглядаються як центральні сили. У цьому випадку робочою гіпотезою, але теж наближеною, є гіпотеза про те, що поверхня Землі сферична і Земля рівномірно обертається навколо своєї осі.

Розглянемо абсолютно тверде тіло, що складається з окремих частин 1, 2, ..., n , на які діють сили тяжіння ($G_1, G_2, \dots, G_n$) прикладені в точках $M_1, M_2, \dots, M_n$ відповідно (рисунок 6.2).

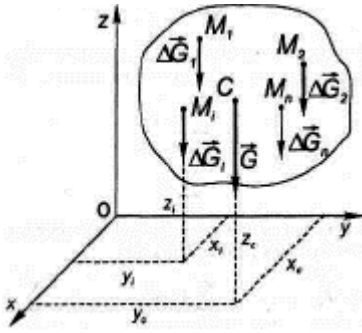


Рисунок 6.2

Сили тяжіння, що діють на окремі частини тіла, направлені приблизно до центру Землі. Якщо розміри даного тіла значно менші порівняно з радіусом Землі, то ці сили можна вважати паралельними між собою. Рівнодіюча G даної системи паралельних сил тяжіння $\Delta G_1, \Delta G_2, \dots, \Delta G_n$ дорівнює їх сумі $G = \Delta G_1 + \Delta G_2 + \dots + \Delta G_n$ і є **силою тяжіння**, що діє на все тіло, а центр цієї системи паралельних сил, в якому прикладена сила G , називається **центром тяжіння тіла С** з координатами (X_C, Y_C, Z_C) . **Центр тяжіння тіла** – центр паралельних сил ваги, які діють на всі частини тіла. В твердому тілі центр тяжіння займає певне визначене положення, що не залежить від розміщення тіла в просторі.

Якщо позначити через M_i з координатами (X_i, Y_i, Z_i) будь-яку частину тіла, на яку діє сила тяжіння ΔG_i (рисунок 7.2), то формули для **координат центра тяжіння абсолютно твердого тіла**, як центра паралельних сил, приймуть вигляд:

$$x_c = \frac{\sum G \cdot x_c}{\sum G}; \quad y_c = \frac{\sum G \cdot y_c}{\sum G}; \quad z_c = \frac{\sum G \cdot z_c}{\sum G}.$$

Якщо тіло має вигляд просторової решітки, яка складається з однорідних тонких стрижнів, площі поперечних перерізів яких постійні, то формули для **координат центра тяжіння такого тіла**, приймуть вигляд:

$$x_c = \frac{\sum l \cdot x_c}{\sum l}; \quad y_c = \frac{\sum l \cdot y_c}{\sum l}; \quad z_c = \frac{\sum l \cdot z_c}{\sum l},$$

де l – довжина стрижня.

Якщо тіло складається з однорідних тонких пластин однакової товщини, то формули для **координат центра тяжіння такого тіла**, приймуть вигляд:

$$x_c = \frac{\sum A \cdot x_c}{\sum A}; \quad y_c = \frac{\sum A \cdot y_c}{\sum A}; \quad z_c = \frac{\sum A \cdot z_c}{\sum A},$$

де A – площа поверхні пластин.

Якщо тіло складається з однорідних об'ємних частин, то формули для **координат центра тяжіння такого тіла**, приймуть вигляд:

$$x_c = \frac{\sum V \cdot x_c}{\sum V}; \quad y_c = \frac{\sum V \cdot y_c}{\sum V}; \quad z_c = \frac{\sum V \cdot z_c}{\sum V},$$

де V – об'єм пластин.

Алгебраїчні суми добутків площ частин плоскої фігури на відстань їх центрів тяжіння до відповідної осі називаються статичними моментами площ відносно осей.

$S_x = \sum A \cdot X_c$ – статичний момент площі відносно осі ОУ;

$S_y = \sum A \cdot Y_c$ – статичний момент площі відносно осі ОХ.

Статичний момент виражається в одиницях довжини в третьому степені (м³, см³, мм³).

2. Формули для визначення положення центра тяжіння простих фігур, які мають осі симетрії та складних геометричних фігур і стандартних профілів

Положення центрів тяжіння простих геометричних фігур можуть бути розраховані за формулами (рисунок 6.3):

а) коло; б) квадрат, прямокутник; в) трикутник; г) півколо

Рисунок 6.3

При вирішенні завдань використовуються такі методи:

Метод симетрії: центр тяжіння симетричних фігур знаходиться на осі симетрії.

Метод поділу: складні перерізи поділяємо на кілька простих частин, положення центрів тяжіння яких легко визначити.

Метод від'ємних площ: порожнини (отвори) розглядаються як частина перерізу із від'ємною площею.

Координати центра тяжіння тіла

$$x_c = \frac{\sum A \cdot x_c}{\sum A}; \quad y_c = \frac{\sum A \cdot y_c}{\sum A}; \quad z_c = \frac{\sum A \cdot z_c}{\sum A}.$$

Профіль – це форма поперечного перерізу прокатного виробу. **Стандартні профілі прокату:** куткові профілі, двутавр, швелер. При визначенні центра тяжіння стандартного профіля використовуються таблиці стандартів, де вказані положення та всі необхідні розміри для визначення координат центра тяжіння.

Алгоритм розв'язування задач для визначення положення центра тяжіння складної фігури

- 1 Зображуємо переріз у довільному масштабі.
- 2 Розбиваємо переріз на прості фігури та наносимо положення центрів їхньої ваги на схему перерізу.

3 Вибираємо систему осей координат (якщо переріз має ось симетрії, то одну з координатних осей направляємо вздовж осі симетрії).

4 Визначаємо координати центрів ваги кожної фігури відносно вибраних осей та їх площі.

5 Визначаємо координати центрів ваги всієї фігури.

6 Записуємо відповідь.

3. Рівновага твердого тіла, що має нерухому точку або вісь обертання; стійка, нестійка та байдужа рівновага

Будь яке тверде тіло може перебувати під дією зовнішніх сил у стані:

1) **стійкої рівноваги** (рисунок 6.4), коли, після незначного відхилення від положення рівноваги, прикладені до тіла сили повертають його в попереднє положення. Ознакою стійкої рівноваги є таке положення тіла, за якого його центр тяжіння займає найнижче положення порівняно з іншими найближчими можливими положеннями;

2) **нестійкої рівноваги** (рисунок 6.5), коли, після незначного відхилення від положення рівноваги, тіло вже не повертається в попереднє положення. Ознакою нестійкої рівноваги є таке положення тіла, за якого його центр тяжіння займає найвище положення порівняно з іншими найближчими можливими положеннями;

3) **байдужої рівноваги** (рисунок 6.6), коли, після незначного відхилення від положення рівноваги, тіло фактично зберігає своє попереднє положення. Ознакою байдужої рівноваги є таке положення тіла, за якого його центр тяжіння займає однакове положення порівняно з іншими найближчими можливими положеннями, тому всі найближчі положення тіла є рівноправними положеннями рівноваги.

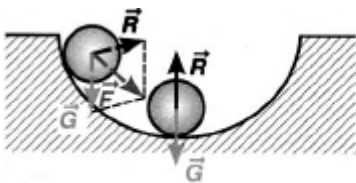


Рисунок 6.4

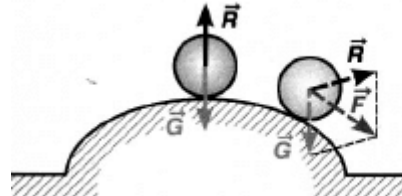
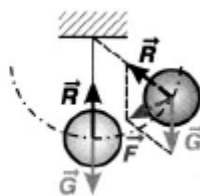


Рисунок 6.5



Рисунок 6.6

В загальному випадку, **положення статичної рівноваги абсолютно твердого тіла називається статично стійким**, якщо при невеликих відхиленнях тіла від цього положення момент, що повертає тіло в положення рівноваги, буде більшим за збурюючий момент, що відхиляє тіло від цього положення.

4. Рівновага тіла, що має опорну площину

Поняття стійкості статичної рівноваги тіла – це лише необхідна умова стійкості положення рівноваги, коли відсутній рух тіла, тобто без урахування його динаміки і збурення початкових умов.

Незважаючи на вузькість самого поняття статичної стійкості, воно може бути корисним при розв'язуванні багатьох прикладних задач статички, що зводяться до схеми одноланкового механізму. Більшість одноланкових механізмів або тіл зводяться до схеми фізичного маятника з **верхньою чи нижньою маятниковістю** (рисунок 6.7).

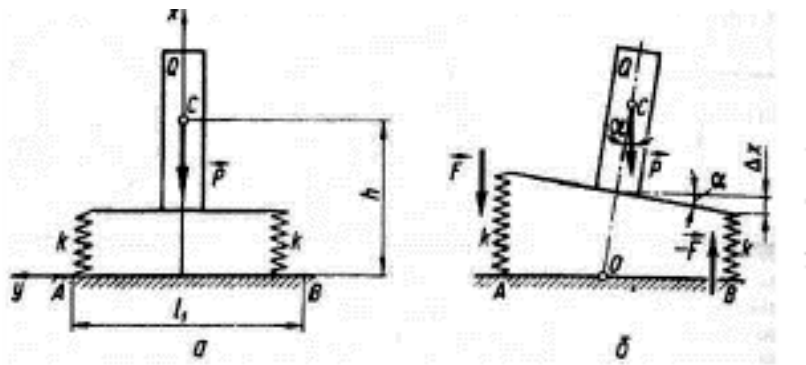


Рисунок 6.7

Прикладами системи з верхньою маятниковістю є, зокрема, підйомні крани на рухомій основі (на шасі автомобіля чи іншого рухомого об'єкту), або й самі об'єкти, що рухаються по поверхні Землі, у воді чи повітрі.

Якщо жорсткість пружних опор (коліс чи упорів) позначити k , то при повороті на невеликий кут α (рисунок 6.7, б) в опорах А і В виникнуть сили $(F, -F)$, що створять пару сил з моментом $M = F \cdot l_1$, який протилежно направлений моменту сили тяжіння P тіла Q відносно точки О – $M_o(P)$.

Очевидно, що тіло Q утримається у вертикальному положенні, якщо момент пари пружних опор буде більшим за момент сили тяжіння P , яка намагається перекинути тіло. Знайдемо співвідношення між ними.

При повороті тіла на кут α , згідно з законом Гука, в пружних опорах виникнуть сили:

$$F = k \cdot \Delta X = k \cdot \frac{l_1}{2} \cdot \alpha,$$

де $\Delta X = \frac{l_1}{2} \cdot \alpha$;

k – коефіцієнт лінійної жорсткості опор.

Момент пари сил пружних опор дорівнюватиме:

$$M = l_1 \cdot F = l_1 \cdot k \cdot \frac{l_1}{2} \cdot \alpha = \frac{1}{2} k \cdot l_1^2 \cdot \alpha$$

Момент сили тяжіння P , що намагається перекинути тіло дорівнює:

$$M_o(P) = h \cdot \alpha \cdot P.$$

Для стійкості системи необхідно, щоб момент пари сил пружних опор був більший за момент повертаючої сили тяжіння, тобто: $M(F, -F) > M_o(P)$.

З урахуванням попередніх співвідношень, нерівність, скоротивши на α , перепишемо у вигляді:

$$\frac{1}{2} k \cdot l_1^2 > h \cdot P, \quad \text{або} \quad k > \frac{2 \cdot h \cdot P}{l_1^2}.$$

Як видно, **стійкість системи забезпечити тим легше, чим більша жорсткість опор k і більша відстань l між опорами.**

Цей факт використовується на практиці. Наприклад, крани на автомобільних шасі ставлять на додаткові жорсткі металеві опори, які виносять за межі габаритів автомобіля, щоб збільшити l .

При русі автомобіля по кривій до перекидних сил слід додати ще перекидний момент від відцентрових сил.

Системи з нижньою маятниковістю реалізують, наприклад, у рухомих об'єктах, що переміщуються по воді або у воді (кораблі, підводні човни).

Геометрію цих об'єктів і розташування мас у них вибирають так, щоб центр прикладання гідростатичних сил Архімеда (точка O) був завжди вище центра тяжіння цієї конструкції (точка C) (рисунок 6.8), тобто реалізують схему фізичного маятника.

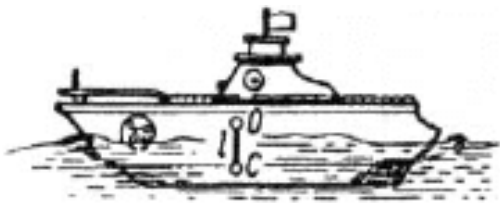


Рисунок 6.8

До схеми з верхньою маятниковістю зводяться також будівельні конструкції, що прикріплені до основи.

5. Момент перекидання, момент стійкості, коефіцієнт стійкості

Якщо тверде тіло не прикріплене до основи, то умова його статичної рівноваги така, що сила тяжіння не повинна виходити за межі основи і створювати момент сили тяжіння, який перекидає тіло.

Здатність тіла чинити опір порушенню його рівноваги називається статичною стійкістю тіла.

Таким чином, умови статичної стійкості незакріпленого твердого тіла, яке спирається на площину, забезпечують співвідношення між значеннями діючих сил і геометричними розмірами тіла.

Розглянемо це більш детально. Нехай на незакріплене тверде тіло ABCD (рисунок 6.9) діють сила тяжіння G і зсувна сила F , яка направлена під кутом α до горизонту.

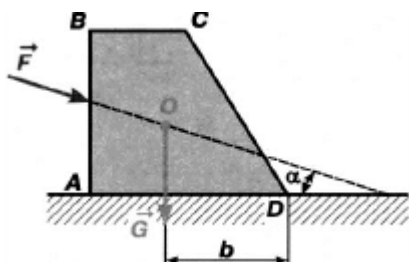


Рисунок 6.9

Добуток сили тяжіння на її плече відносно точки D можливого обертання тіла називається моментом стійкості тіла: $M_{cm} = G \cdot b$.

Добуток перекидної сили на її плече відносно точки D можливого обертання тіла називається перекидним моментом тіла: $M_{пер} = F \cdot a$.

Для статичної стійкості тіла потрібно, щоб момент стійкості тіла був більшим за перекидний момент:

$$M_{cm} > M_{пер}$$

Відношення моменту стійкості до перекидного моменту називається коефіцієнтом стійкості:

$$K = \frac{M_{cm}}{M_{пер}}$$

За можливих відхилень у значеннях діючих сил коефіцієнт стійкості беруть $K \geq 1,3 \dots 1,5$. Таким чином, при $K > 1$ (рисунок 6.10) незакріплене тверде тіло, яке спирається на площину, перебуває в стані стійкої рівноваги. При $K = 1$ (рисунок 6.11) тіло перебуває в стані байдужої рівноваги. При $K < 1$ (рисунок 6.12) тіло перебуває в стані нестійкої рівноваги (воно перекидається).

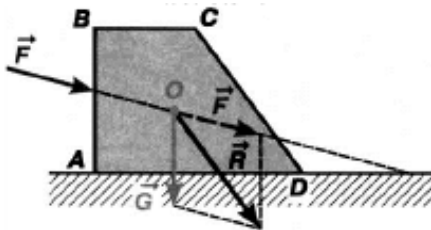


Рисунок 6.10

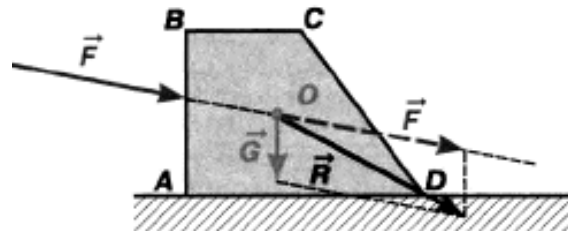


Рисунок 6.11

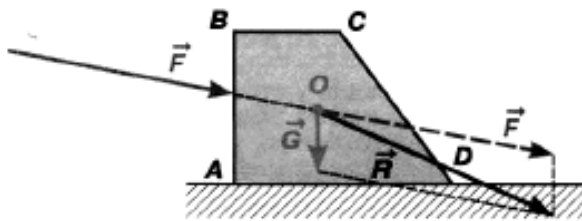


Рисунок 6.12

Питання для самоконтролю

1. Запишіть та поясніть формули для координат центра паралельних сил.
2. Що називається центром тяжіння твердого тіла?
3. Запишіть та поясніть формули для координат центра тяжіння твердого тіла.
4. Запишіть та поясніть формули для визначення координат центра тяжіння тіла, що має вигляд просторової решітки, яка складається з однорідних тонких стрижнів, площі поперечних перерізів яких постійні.
5. Запишіть та поясніть формули для визначення координат центра тяжіння тіла, якщо тіло складається з однорідних тонких пластин однакової товщини.
6. Запишіть та поясніть формули для визначення координат центра тяжіння тіла, якщо тіло складається з однорідних об'ємних частин.
7. В чому полягає такий спосіб визначення координат центра тяжіння плоскої фігури, з якої вирізана деяка частина, як спосіб від'ємних площ?

8. Поясніть, в чому полягає метод поділу при визначенні координат центра тяжіння однорідного твердого тіла.
9. Поясніть, в чому полягає метод симетрії при визначенні координат центра тяжіння однорідного твердого тіла.
10. Що називається перекидним моментом?
11. Що називається моментом стійкості?
12. Що називається коефіцієнтом стійкості?
13. Яка умова статичної стійкості тіла?
14. Що називається стійкою рівновагою?
15. Що називається нестійкою рівновагою?
16. Що називається байдужою рівновагою?

ЛЕКЦІЯ 7

Тема. Основи кінематики

План.

1. Основні поняття кінематики. Механічний рух, його параметри: система і точка відліку, траєкторія, відстань, шлях, швидкість, прискорення дотичне та нормальне.
2. Кінематика точки. Способи задання руху точки. Природний спосіб задання руху точки. Рівняння руху та рівняння швидкості.
3. Найпростіші рухи твердого тіла. Поступальний рух тіла. Обертання тіла навкруги нерухомої вісі. Параметри: кут повороту, кутова швидкість, частота обертання. Кутова швидкість та прискорення точок обертового тіла. Залежність між лінійними та кутовими величинами.

Література.

1. Кафтарян Л.С., Міщенко С.О. Технічна механіка. Кінематика. – Суми: СДУ, 2011. с.3-8.
2. Федуліна А.І. Теоретична механіка. – К.: Вища школа, 2005. с.191-212.
3. Аркуша А.И. Техническая механика. Теоретическая механика и сопротивление материалов. – М.: Высшая школа, 1989. с.108-148.

1. Основні поняття кінематики. Механічний рух, його параметри: система і точка відліку, траєкторія, відстань, шлях, швидкість, прискорення дотичне та нормальне

Кінематика – розділ теоретичної механіки, в якому вивчається рух матеріальних тіл без урахування їхніх мас та сил, що діють на них.

Механічним рухом тіла називають зміну положення тіла в просторі відносно інших тіл з часом. Механічний рух відносний. Рух одного і того ж тіла відносно різних тіл виявляється різним. Для опису руху тіла треба вказати, по відношенню до якого тіла розглядається рух. Це тіло називають **точкою відліку**.

Система координат, пов'язана з точкою відліку, і годинник для відліку часу утворює **систему відліку**, що дозволяє визначати положення рухомого тіла у будь-який момент часу.

У Міжнародній системі одиниць (СІ) за одиницю довжини прийнятий метр, а за одиницю часу – секунда.

Якщо усі частини тіла рухаються однаково, то такий рух називається **поступальним**. Поступально рухаються, наприклад, кабіни в атракціоні «Колесо огляду», автомобіль на прямолінійній ділянці шляху і т.д. При поступальній ході тіла його також можна розглядати як матеріальну точку.

Траєкторія – лінія, вздовж якої рухається тіло. Траєкторія буває прямолінійною і криволінійною.

Система відліку (СВ) – це точка відліку, пов’язана з ним система координат і засіб вимірювання часу (годинник).

Пройдений шлях (l) – довжина ділянки траєкторії. Шлях – скалярна величина.

Переміщенням тіла ($\vec{s}$) називають напрямлений відрізок, який сполучає початкове і кінцеве положення тіла.

Якщо рух тіла розглядати протягом досить короткого проміжку часу, то вектор переміщення виявиться спрямованим по дотичній до траєкторії в цій точці, а його довжина дорівнюватиме пройденому шляху.

У разі досить малого проміжку часу Δt пройдений тілом шлях Δl майже співпадає з модулем вектора переміщення. При русі тіла по криволінійній траєкторії модуль вектора переміщення завжди менше пройденого шляху (рисунок 7.1).

Відстань – це довжина траєкторії, відлічена від деякої нерухомої точки, яку беруть за початок відліку.

Для характеристики руху вводиться поняття **середньої швидкості**:

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}.$$

Найбільший інтерес представляє не середня, а **миттєва швидкість**, яка визначається як межа, до якої прагне середня швидкість на нескінченно малому проміжку часу Δt :

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}; (\Delta t \rightarrow 0).$$

Миттєва швидкість тіла в будь-якій точці криволінійної траєкторії спрямована по дотичній до траєкторії в цій точці. Відмінність між середньою і миттєвою швидкостями показано на рисунку 7.2.

Рисунок 7.2

Рисунок 7.3

При русі тіла по криволінійній траєкторії його швидкість змінюється по модулю і напрямку. Зміна вектора швидкості за деякий малий проміжок часу Δt можна задати за допомогою вектора (рисунок 7.3).

Вектор зміни швидкості за малий час Δt можна розкласти на дві складові: спрямовану уздовж вектора (дотична складова), і спрямовану перпендикулярно вектору (нормальна складова).

2. Кінематика точки. Способи задання руху точки. Природний спосіб задання руху точки. Рівняння руху та рівняння швидкості

Рух точки відносно вибраної системи відліку вважається заданим, якщо відомий спосіб, за допомогою якого можна визначити положення точки в просторі у будь який момент часу.

Використовуються три способу завдання руху.

1. Векторний спосіб застосовується, звичайно, в теоретичних дослідженнях, при цьому задається вектор $r = r(t)$.

2. Координатний спосіб. У цьому випадку визначені координати точки в функції часу: $x = x(t)$; $y = y(t)$; $z = z(t)$.

3. Натуральний (природний) спосіб застосовується тоді, коли траєкторія точки заздалегідь відома. **Рівняння руху точки** по заданій траєкторії має вигляд: $S = f(t)$,

де S – відстань точки від початкового положення, що є функцією часу;

t – час руху точки від початкового моменту.

Для того, щоб задати (математично описати) рух точки **натуральним способом**, необхідно:

а) задати траєкторію руху точки;

б) задати початок відліку дугової координати на траєкторії, а також додатний напрям відліку цієї координати;

в) задати закон зміни дугової координати з часом.

Знаючи траєкторію точки і рівняння руху по цій траєкторії, можна визначити положення точки в будь-який момент часу, для чого слід в рівність підставити час.

При своєму русі точка проходить певний шлях, який також є функцією часу. Слід підкреслити, що шлях, пройдений точкою, збігається з відстанню від початку відліку лише тоді коли точка весь час рухається в одному напрямку і початок її руху збігається з початком відліку.

Модуль швидкості точки визначається за формулою:

$$v = \frac{dS}{dt} = S'$$

Значення швидкості точки визначають як першу похідну від функції відстані за часом, а напрям її збігається з дотичною до траєкторії у даній точці.

Прискорення точки визначається як векторна сума дотичного і нормального прискорень точки.

Дотичне прискорення характеризує швидкість зміни модуля вектора швидкості з часом.

Модуль дотичного прискорення визначається за формулою:

$$a_\tau = \frac{d^2 S}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = S''$$

Вектор дотичного прискорення направлений по дотичній до траєкторії.

Модуль нормального прискорення визначається за формулою:

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

де ρ – радіус кривизни траєкторії в даній точці.

Вектор нормального прискорення завжди спрямований по головній нормалі в бік центру кривизни траєкторії.

Модуль повного прискорення $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$.

Нормальне прискорення характеризує швидкість зміни напрямку вектора швидкості з часом.

3. Найпростіші рухи твердого тіла. Поступальний рух тіла. Обертання тіла навкруги нерухомої вісі. Параметри: кут повороту, кутова швидкість, частота обертання. Кутова швидкість та прискорення точок обертового тіла. Залежність між лінійними та кутовими величинами.

Поступальним рухом (спрямований вперед) тіла називають такий рух, при якому будь-яка лінія, що з'єднує дві довільні точки тіла, зберігає незмінною свою орієнтацію в просторі.

При поступальному русі:

- всі точки тіла описують однакові траєкторії;
- швидкості усіх його точок однакові в даний момент часу;
- прискорення усіх його точок однакові в даний момент часу.

Поступальний рух твердого тіла повністю визначається рухом будь-якої однієї його точки, тобто кінематика поступального руху може бути зведена до кінематики точки.

При поступальному русі рівняння руху має вигляд: $S = S_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$.

рівняння швидкості має вигляд: $v = v_0 + a_\tau t$.

Обертальний рух тіла навколо осі – це рух, при якому траєкторією руху усіх його точок є кола з центром, що лежать на одній прямій, яка називається віссю обертання. **Миттєва швидкість** направлена по дотичній до траєкторії (завжди перпендикулярна до радіуса). Рух тіла по коловій траєкторії є окремим випадком криволінійного руху. Такий рух завжди буде прискореним, оскільки швидкість буде змінюватись за напрямком. Тому тіло має нормальне прискорення, яке напрямлене перпендикулярно до швидкості в даній точці, тобто вздовж радіуса кривизни траєкторії. Якщо змінюється й модуль швидкості, то тіло також має і тангенціальне прискорення

Повне прискорення точки дорівнює векторній сумі її тангенціального і нормального прискорення.

Модуль прискорення точки: $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$

$$\varphi; \operatorname{tg} \varphi = \frac{a_n}{a_\tau}$$

Напрямок повного прискорення визначається кутом

Зміну положення матеріальної точки під час руху по колу характеризують довжиною дуги або кутом повороту. **Кут повороту (кутове переміщення) φ** скалярна фізична величина, яка характеризує зміну положення тіла в просторі при обертальному русі і вимірюється кутом повороту радіуса, який проведено від осі обертання до певної точки тіла, що обертається. Одиниця кута в СІ – радіан: $[\varphi] = 1 \text{ рад} = 57,3^\circ$.

Частота обертання n – скалярна фізична величина, яка характеризує швидкість обертального руху і вимірюється відношенням кількості обертів до

інтервалу часу, протягом якого вони здійснені: $n = \frac{N}{t}$.

Одиниця частоти обертання в СІ – об/хв: $[n] = \text{с}^{-1} = \text{Гц} = \text{об/хв}$.

Кутова швидкість ω – кут повороту радіуса, проведеного до певної точки тіла, що обертається за одну секунду:

$$\omega = \frac{d \cdot \varphi}{d \cdot t} = \varphi'$$

Одиниця кутової швидкості в СІ – $[\omega] = \text{рад/с}$.

Модуль кутової швидкості при рівноприскореному русі тіла по колу:

$$\omega = \frac{\pi \cdot n}{30}$$

При рівномірному русі по колу тіло має тільки нормальне прискорення, яке завжди напрямлене до центра кола по радіусу і називається доцентровим

прискоренням: $a_n = \frac{v^2}{\rho}$.

При рівнозмінному обертанні **модуль кутового прискорення** визначається:

$$\varepsilon = \frac{d^2 \cdot \varphi}{d \cdot t} = \frac{d \cdot \omega}{d \cdot t} = \omega''$$

При обертальному русі рівняння руху має вигляд: $\varphi = \varphi_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2}$.
рівняння швидкості має вигляд: $\omega = \omega_0 + \varepsilon \cdot t$.

Залежність між лінійними та кутовими величинами:

$$S = R \cdot \varphi,$$

де R – радіус обертання точки;

$$v = R \cdot \omega ;$$

$$a_{\tau} = R \cdot \varepsilon ; \quad a_n = R \cdot \omega^2 ; \quad a = R \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} .$$

Питання для самоперевірки

1. Кінематика – що це?
2. Назвіть основні поняття кінематики.
3. Що таке механічний рух?
4. Назвіть способи завдання руху, в чому їх суть.
5. Охарактеризуйте природний та координатний спосіб завдання руху точки.
6. Що називається поступальним рухом?
7. Наведіть основні формули при обертанні тіла навкруг непорушної осі.
8. Наведіть залежність між лінійними та кутовими величинами.

ЛЕКЦІЯ 8

Тема. Основи динаміки. Робота і потужність

План.

1. Основні поняття та аксіоми динаміки: закон інерції, основний закон динаміки точки, закон незалежності дії сил, закон взаємодії.
2. Ідеальні та реальні зв'язки.
3. Поняття про силу інерції. Рух матеріальної точки.
4. Метод кінетостатики. Сутність методу кінетостатики.
5. Поняття про роботу змінної сили. Робота постійної сили, сили тяжіння, сил тертя ковзання та кочення, обертального моменту.
6. Поняття потужності. Потужність при поступальному русі та обертанні тіла.
7. Механічний коефіцієнт корисної дії.

Література.

1. Кафтарян Л.С., Міщенко С.О. Технічна механіка. Динаміка. – Суми: СДУ, 2011. с.5-15.
2. Федуліна А.І. Теоретична механіка. – К.: Вища школа, 2005. с.255-291.
3. Аркуша А.И. Техническая механика. Теоретическая механика и сопротивление материалов. – М.: Высшая школа, 1989. с.167-189.

1. Основні поняття та аксіоми динаміки: закон інерції, основний закон динаміки точки, закон незалежності дії сил, закон взаємодії

Динаміка – розділ теоретичної механіки, в якому вивчається рух матеріальних тіл з урахування їхніх мас та сил, що діють на них.

В основі динаміки лежать закони І.Ньютона, які є об'єктивними законами природи, встановленими на основі численних дослідів і спостережень Ньютона і його попередників.

Аксіоми динаміки

Аксіома І. Перший закон Ньютона (закон інерції).

Ізольована матеріальна точка зберігає стан спокою або рівномірного і прямолінійного руху до того часу, поки вплив з боку інших тіл не виведе її з цього стану.

Ізольованою називається матеріальна точка, взаємодією якої з навколишніми тілами нехтують. Властивість ізольованої матеріальної точки зберігати стан рівномірного і прямолінійного руху називається властивістю інертності.

Із закону інерції випливає, що спонтанна зміна руху матеріальної точки неможлива. Рух матеріальної точки може змінитися лише внаслідок її взаємодії з іншими тілами. Мірою цих взаємодій є сила.

Аксіома ІІ. Другий закон Ньютона (основний закон динаміки).

Прискорення матеріальної точки пропорційне прикладеній до неї силі і має однаковий із нею напрям.

Математично цей закон виражається рівнянням:

$$F = m \cdot a,$$

де m – маса точки;
 a – прискорення точки.

Аксіома III. Закон незалежності дії сил.

Прискорення матеріальної точки, що виникає при одночасній дії на неї декількох сил, дорівнює векторній сумі прискорень, яких надають точці окремі сили.

Цей закон випливає з аксіоми про паралелограм сил. Він не придатний при дії на матеріальну точку сил, що залежать від прискорення.

$R = F_1 + F_2 + \dots + F_n$, якщо $F = m \cdot a$, тоді $a = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

Аксіома IV. Третій закон Ньютона (закон взаємодії).

Сили взаємодії двох матеріальних точок або двох тіл (дія і протидія) рівні за величиною, напрямлені в протилежні боки і мають загальну лінію дії (На кожну дію є своя протидія).

Якщо перший і другий закони Ньютона належать до динаміки матеріальної точки, то третій закон належить до динаміки системи матеріальних точок або тіл. Слід зазначити, що дія і протидія прикладені до різних матеріальних точок або тіл. Цей закон дає змогу відрізнити реальні сили, прикладені до точок, від фіктивних, які можуть виникнути при математичному розв'язанні задач механіки.

2. Ідеальні та реальні зв'язки

Матеріальна точка називається **вільною**, якщо в будь-який момент часу можна довільно задати її швидкість.

Матеріальна точка називається **невільною**, якщо в наслідок накладання зв'язків вона під дією активних сил і початкових умов здійснює рух тільки вздовж заданої лінії.

Зовнішні сили поділяють на:

- активні (рушійні);
- пасивні (сили реакцій зв'язків).

Коли сила тертя не враховується, реакція зв'язку направлена перпендикулярно до опорної поверхні, зв'язок називається **ідеальним**.

У реальних зв'язках обов'язково виникає тертя і реакція завжди відхилена від нормалі (рисунок 8.1).

Рисунок 8.1

3. Поняття про силу інерції. Рух матеріальної точки

Сила інерції – це сила спротиву тіла активній силі, яка намагається його прискорити.

$$F_{in} = -m \cdot a,$$

де F_{in} – сила інерції;
 m – маса тіла;

a – прискорення тіла, яке здійснювала зовнішня сила.

Сили інерції реальні, бо вони в неінерційній системі координат можуть здійснювати роботу.

Всі реально існуючі системи відліку неінерційні і у всіх них діють реальні пасивні сили інерції у повній відповідності з третім законом Ньютона.

Сила інерції при прямолінійному русі

Якщо напрями прискорення і швидкості однакові, то сила інерції направлена в бік, протилежний руху.

Якщо прискорення і швидкості направлені в різні боки, то сила інерції направлена в бік дії руху.

Сила інерції при криволінійному (обертovому) русі

Повна сила інерції точки визначається як геометрична сума нормальної і дотичної складових сил інерції:

$$\mathbf{F}_{in} = \mathbf{F}_n + \mathbf{F}^\tau,$$

де $\mathbf{F}_n$ – нормальна (відцентрова) сила інерції визначається:

$$\mathbf{F}_n = m \cdot \mathbf{a}^n,$$

де $\mathbf{a}^n$ – нормальне прискорення точки;

$\mathbf{F}^\tau$ – дотична (тангенціальна) сила інерції визначається:

$$\mathbf{F}^\tau = m \cdot \mathbf{a}^\tau,$$

$\mathbf{a}^\tau$ – дотичне прискорення точки.

Аналітичне визначення повної сили інерції визначається:

$$\mathbf{F}_{in} = \sqrt{(F_n)^2 + (F^\tau)^2}.$$

Відцентрова і повна сили інерції завжди направлені в бік опуклості траєкторії.

Сила інерції твердого тіла дорівнює добутку маси тіла на прискорення центра тяжіння тіла і направлена в бік, протилежний напрямку прискорення центра тяжіння:

$$\mathbf{F}_{in} = m \cdot \mathbf{a}^c.$$

4. Метод кінетостатики. Сутність методу кінетостатики

Принцип Д'Аламбера і заснований на ньому метод кінетостатики встановлюють єдиний підхід до дослідження руху невідільної матеріальної точки і невідільною матеріальної системи незалежно від виду зв'язків, що накладаються на їх рух. Цей підхід полягає в доданні динамічним рівнянням виду рівнянь рівноваги або виду рівнянь статички, що дозволяє при вирішенні задач динаміки застосовувати прості і наочні прийоми і методи статички.

Принцип Д'Аламбера: у кожен момент руху матеріальної точки активні сили, реакції зв'язків та сила інерції утворюють врівноважену систему сил (їх сума дорівнює нулю).

5. Поняття про роботу змінної сили. Робота постійної сили, сили тяжіння, сил тертя ковзання та кочення, обертального моменту

Найпростіше фізичне поняття про роботу можна одержати на прикладі піднімання вантажу або його переміщення по шорсткій площині. Очевидно, що чим більша сила ваги вантажу, і чим вище його піднято, тим більша міра механічної дії сили, тобто тим більшою є виконана робота.

Коли вантаж переміщується по горизонтальній площині, то із збільшенням сили ваги зростає сила тертя, а тому збільшується і робота. Величина роботи залежить як від величини сили, що прикладена для переміщення тіла (точки), так і від величини самого переміщення (пройденого шляху). У найпростішому випадку, коли до матеріальної точки прикладена постійна сила $\vec{F}$ і точка переміщується в напрямі дії сили, робота A дорівнює добутку модуля сили F на шлях S , який пройшла точка прикладання сили, тобто:

$$A = F \cdot S.$$

Звідси випливає, що одиниця роботи дорівнює добутку одиниці сили на одиницю довжини. У системі вимірювань СІ одиницею роботи є джоуль – робота сили в один ньютон на шляху переміщення в один метр: $1 \text{ Дж} = 1 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

Робота постійної сили дорівнює добутку модуля сили на шлях, що пройшла точка її прикладання, і на косинус кута між напрямками сили й переміщення (рисунк 8.2). $A = F \cdot S \cdot \cos \alpha$.

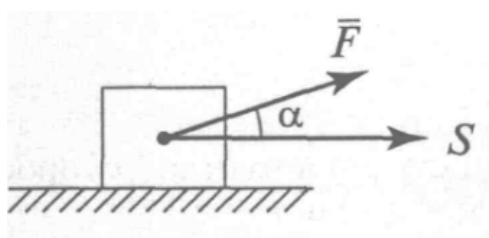
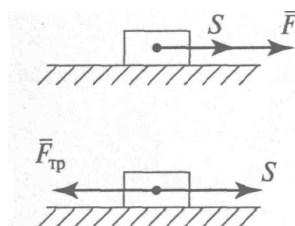
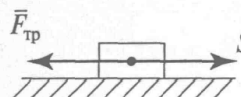


Рисунок 8.2

1)



2)



3)

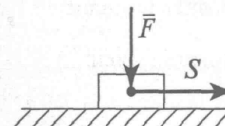


Рисунок 8.3

Залежно від величини кута α робота сили F може приймати як додатні, так і від'ємні значення (рисунк 8.3).

1) Коли $0 < \alpha$, робота додатна.

При $\alpha = 0$, $\cos 0^\circ = 1$, робота $A = F \cdot S$. Сила, що виконує додатну роботу, називається **рушійною**.

2) При $\alpha = 180^\circ$, $\cos 180^\circ = -1$, робота $A = -F \cdot S$. Сили, що виконують від'ємну роботу, називаються **силами опору**. Прикладами сил опору можна назвати силу тертя, силу опору води при русі корабля, сили зчеплення між молекулами тіла, які дають, опір при обробці металів різанням, і т.ін.

Коли $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ (кут α тупий), $\cos \alpha < 0$, робота від'ємна.

3) Коли $\alpha = 90^\circ$, $\cos 90^\circ = 0$, робота сили, перпендикулярної до напрямку переміщення, дорівнює нулю.

Робота сили тяжіння

Визначимо роботу сили тяжіння при русі тіла масою m по похилій площині, довжина якої L , а висота h (рисунк 8.4). На тіло діє дві сили: сила тяжіння, спрямована вертикально вниз і сила реакції опори N , спрямована перпендикулярно до поверхні площини АС. Їхня рівнодіюча F_1 виконує роботу, надаючи тілу прискорення (силою тертя знехтуємо).

$$A_p = P \cdot S \cdot \cos \alpha ;$$

$$\text{з } \triangle ABC \Rightarrow \cos \alpha = h / l;$$

$$S = l; \quad P = m \cdot g;$$

$$\text{тому } A_p = m \cdot g \cdot h.$$

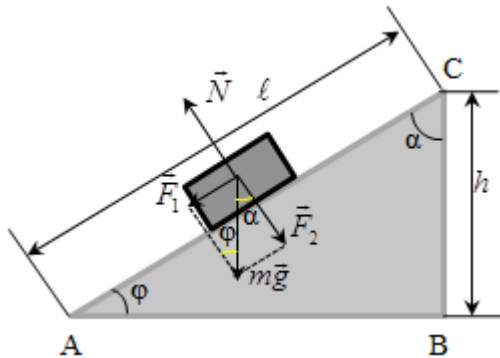


Рисунок 8.4

Визначимо роботу, чинену силою тяжіння **при вільному падінні тіла на висоту:**

$$A_p = m \cdot g \cdot \Delta h.$$

Робота сили тяжіння не залежить від довжини і форми шляху, пройденого тілом, і визначається добутком сили тяжіння на різницю висот у початковому і кінцевому положенні.

При русі вниз сила тяжіння робить позитивну роботу, при русі нагору – негативну. Робота сили тяжіння по замкненому шляхові рівна 0.

Робота сили тертя

Сила тертя $F_{тер}$ визначається відносною швидкістю дотичних тіл (сила тертя ковзання). Сила тертя завжди направлена проти руху ($\alpha = 180^\circ$), завжди є **силою опору**, і тому виконувана нею робота завжди негативна.

Робота сили тертя визначається за наступними формулами:

а) якщо тіло рухається горизонтально (рисунок 8.5)

$$A_{тер} = -F_{тер} \cdot S = -m \cdot g \cdot f \cdot S,$$

де f – коефіцієнт тертя, який залежить від властивостей поверхні;

б) якщо тіло рухається по похилій площині (рисунок 8.6)

$$A_{тер} = -F_{тер} \cdot S = -m \cdot g \cdot \cos \alpha \cdot f \cdot S.$$

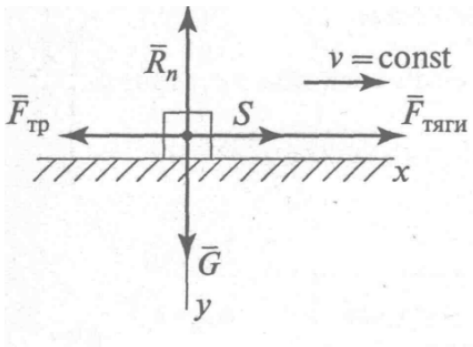


Рисунок 8.5

Рисунок 8.6

Робота змінної сили

Визначимо роботу сили, величина якої змінюється від точки до точки, за законом показаному на рисунку 8.7.

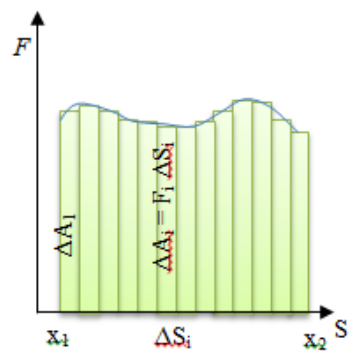


Рисунок 8.7

Розіб'ємо переміщення S на елементарні ділянки dS , на яких величина сили залишається постійною, тоді елементарна робота запишеться у вигляді:

$$\Delta A = F_s \cdot \Delta S;$$

$$F_s = F \cdot \cos \alpha .$$

Повна робота A на всьому переміщенні від точки 1 до точки 2 дорівнює:

$$A = \sum F_s \cdot \Delta S.$$

Робота при обертальному русі (рисунок 8.8) визначається за формулою:

$$W = F \cdot S = F \cdot r \cdot \varphi = M \cdot \varphi .$$

де $S = r \cdot \varphi ;$

$$M = Mo(F) = F \cdot r.$$

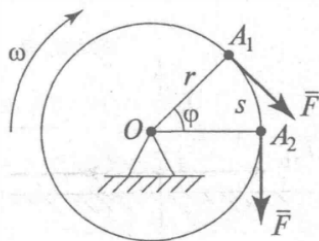


Рисунок 8.8

6. Поняття потужності. Потужність при поступальному русі та обертанні тіла

Потужність – це величина, чисельно рівна роботі, зробленої за одиницю часу: $N = A / t$. За одиницю потужності приймається $1 \text{ Вт} = 1 \text{ Дж/с}$.

Потужність при поступальному русі:

$$N = A / t = F \cdot S \cdot \cos \alpha / t = F \cdot v \cdot \cos \alpha .$$

Якщо $\alpha = 0$, $\cos 0 = 1$, то $N = F \cdot v$.

Потужність при обертальному русі:

$$N = W / t = M \cdot \varphi / t = M \cdot \omega .$$

7. Механічний коефіцієнт корисної дії

Коефіцієнт корисної дії (ККД) машин і механізмів – це величина, що показує, яка частина від усієї виконаної роботи витрачається корисно:

$$\eta = \frac{A_{\text{кор}}}{A} = \frac{N_{\text{кор}}}{N},$$

де $A_{\text{кор}}$, A – корисна і повна робота;
 $N_{\text{кор}}$, N – корисна і повна потужність.

При багатоступеневій передачі загальний ККД механізму дорівнює добутку ККД кожного ступеня:

$$\eta_{\text{заг}} = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \dots \cdot \eta_n.$$

Питання для самоперевірки

1. Що таке динаміка?
2. Аксиоми динаміки.
3. В чому принцип методу кінетостатики?
4. Що таке робота?
5. Чому дорівнює робота постійної сили?
6. Чому дорівнює робота змінної сили?
7. Чому дорівнює робота сили тяжіння?
8. Чому дорівнює робота сили тертя?
9. Чому дорівнює робота при обертовому русі?
10. Чому дорівнює потужність при поступальному русі?
11. Чому дорівнює потужність при обертовому русі?
12. Як визначити механічний коефіцієнт корисної дії?
13. Як визначити механічний коефіцієнт корисної дії багатоступеневої передачі?

ЛЕКЦІЯ 9

Тема. Загальні теореми динаміки

План.

1. Загальні теореми динаміки.
2. Імпульс сили, кількість руху. Закон кількості руху точки.
3. Кінетична енергія. Закон зміни кінетичної енергії точки.
4. Основне рівняння динаміки для обертального руху тіла.

Література.

1. Кафтарян Л.С., Міщенко С.О. Технічна механіка. Динаміка. – Суми: СДУ, 2011. с.35-47.
2. Федуліна А.І. Теоретична механіка. – К.: Вища школа, 2005. с.294-299.
3. Аркуша А.И. Техническая механика. Теоретическая механика и сопротивление материалов. – М.: Высшая школа, 1989. с.193-206.

1. Загальні теореми динаміки

Для вирішення багатьох завдань динаміки замість безпосереднього інтегрування диференціальних рівнянь руху більш ефективно користуватися так званими загальними теоремами, які є наслідком основного закону динаміки.

Основні теореми динаміки характеризують окремі властивості механічного руху і надають часткову інформацію про цей рух. При розв'язанні динамічних задач, що потребують визначення окремих властивостей руху системи, основні теореми динаміки є найбільш ефективними методами дослідження.

У динаміці матеріальної точки – три основні теореми: про зміну кількості руху, про зміну моменту кількості руху і про зміну кінетичної енергії.

2. Імпульс сили, кількість руху. Закон кількості руху точки

Кількістю руху (мірою механічного руху) **матеріальної точки** q називається вектор, який дорівнює добутку маси точки m на вектор її швидкості v :

$$q = m \cdot v.$$

Вектор кількості руху за напрямом збігається зі швидкістю.

У системі СІ кількість руху вимірюється у кілограм-метрах за секунду (кг·м/с).

Імпульсом сталої сили називається вектор, який дорівнює добутку сили на час її дії та має напрям сили:

Імпульс сталої сили змінюється залежно від часу, визначається як сума елементарних імпульсів.

У системі СІ імпульс сталої сили вимірюється у ньютон-секунда (Н·с).

Якщо та точку діє кілька сил, то їх загальний імпульс дорівнює геометричній сумі імпульсів окремих сил.

Теорема про зміну кількості руху матеріальної точки: зміна кількості руху матеріальної точки за деякий проміжок часу дорівнює геометричній сумі імпульсів сил, прикладених до точки за той же проміжок часу:

$$F \cdot \Delta t = m \cdot v_2 - m \cdot v_1.$$

Доведення: на т. А масою m діє система сталих сил, рівнодійною яких є сила F .

Відповідно до основного закону динаміки: $F = m \cdot a$.

Враховуючи час дії, помножимо обидві частини рівняння на Δt :

$$F \cdot \Delta t = m \cdot a \cdot \Delta t.$$

Швидкість т. А в положення A_2 буде становити:

$$v_2 = v_1 + a \cdot t \Rightarrow a = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t}, \text{ тоді}$$

$$F \cdot \Delta t = m \cdot \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} \cdot \Delta t \Rightarrow F \cdot \Delta t = m \cdot v_2 - m \cdot v_1.$$

Теорему імпульсів застосовують в теорії удару, а також у гідродинаміці.

3. Кінетична енергія. Закон зміни кінетичної енергії точки

Кінетична енергія визначається здатністю тіла виконувати роботу:

$$A_k = m \cdot \frac{v^2}{2}.$$

У системі СІ кінетична енергія вимірюється у джоулях (Дж).

Теорема про зміну кінетичної енергії точки: зміна кінетичної енергії точки дорівнює сумі роботи діючих сил:

$$\sum A_R = \frac{m \cdot v_2^2}{2} - \frac{m \cdot v_1^2}{2}.$$

Доведення: на т. А масою m діє система сталих сил, рівнодійною яких є сила $F \Sigma$.

Відповідно до основного закону динаміки: $F \Sigma = m \cdot a$.

Враховуючи переміщення точки, помножимо обидві частини рівняння на ΔS :

$$F \Sigma \cdot \Delta S = m \cdot a \cdot \Delta S.$$

Швидкість т. А в положення A_2 буде становити:

$$v_2 = v_1 + a \cdot t \Rightarrow a = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} \quad \Delta S = v_{cp} \cdot \Delta t = \frac{v_2 + v_1}{2} \cdot \Delta t.$$

$$\text{Тоді } F \Sigma \cdot \Delta S = m \cdot \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} \cdot \frac{v_2 + v_1}{2} \cdot \Delta t, \quad F \Sigma \cdot \Delta S = \sum A_R \Rightarrow$$

$$\sum A_R = \frac{m \cdot v_2^2}{2} - \frac{m \cdot v_1^2}{2}.$$

Кінетична енергія тіла при поступальному русі дорівнює добутку

половини квадрата швидкості будь-якої точки тіла на всього тіла: $A_k = \frac{M \cdot v_C^2}{2}$,
де M – маса твердого тіла.

Кінетична енергія тіла, яке обертається навколо осі, дорівнює добутку половини квадрата кутової швидкості тіла на момент інерції тіла відносно осі його

обертання: $A_R = J_Y \cdot \frac{\omega^2}{2}$,

де J_Y – момент інерції тіла відносно осі його обертання;

$J_Y = \sum m \cdot r^2$ – сума добутків маси кожної частини на квадрат її відстані до осі обертання ОУ.

Кінетична енергія тіла при плоскопаралельному русі складається з кінетичної енергії поступального руху і кінетичної енергії обертального руху

навколо полюса: $A_K = \frac{M \cdot v^2}{2} + J_Y \cdot \frac{\omega^2}{2}$.

4. Основне рівняння динаміки для обертового руху тіла

До тіла, що обертається навколо осі, прикладені сили $F_1, F_2, \dots, F_n$. Алгебрична сума моментів цих сил відносно осі обертання ОУ називається **обертальним моментом** $\sum M_Y$.

Відцентрові сили інерції перетинають вісь обертання і не створюють відносно неї моменту. Дотичні сили інерції створюють обертальний момент: $\sum F_{\text{інт}} \cdot r = \sum M_Y$.

Нам відомо, що $F_{\text{інт}} = m \cdot a_{\tau} = m \cdot r \cdot \varepsilon$, підставивши отримуємо:

$$\sum m \cdot r^2 \cdot \varepsilon = \sum M_Y \Rightarrow \varepsilon \sum m \cdot r^2 = \varepsilon \cdot J_Y = \sum M_Y.$$

Основне рівняння динаміки для обертового руху тіла: добуток моменту інерції тіла на кутове прискорення його обертання навколо будь-якої осі дорівнює сумі моментів усіх сил відносно цієї осі: $J_Y \cdot \varepsilon = \sum M_Y$.

Питання для самоперевірки

1. Що характеризують основні теореми динаміки?
2. Що називають кількістю руху?
3. Як визначити кількість руху, його одиниці вимірювання в системі СІ?
4. Що називають імпульсом сталої сили?
5. Як визначити імпульс сталої сили, його одиниці вимірювання в системі СІ?
6. Сформулювати закон зміни кількості руху для матеріальної точки.
7. Довести закон зміни кількості руху для матеріальної точки.
8. Сформулювати закон про зміну кінетичної енергії точки.
9. Довести закон про зміну кінетичної енергії точки.
10. Дати визначення кінетична енергія тіла при поступальному русі.
11. Дати визначення кінетична енергія тіла при обертовому русі.
12. Дати визначення кінетична енергія тіла при плоскопаралельному русі.
13. Сформулювати основне рівняння динаміки для обертового руху тіла.

ЛІТЕРАТУРА

1. Кафтарян М.С., Міщенко С.О. Теоретична механіка: розділ «Динаміка». Конспект лекцій. – С.: СДУ, 2011. – 56 с.
2. Федуліна А.І. Теоретична механіка. – К.: Вища школа, 2005. – 320 с.
3. Ткачук А.І. Технічна механіка. Статика абсолютно твердого тіла. Опір матеріалів. – Кіровоград: ПП «Центр оперативної поліграфії «Авангард», 2015. – 260 с.
4. Приятельчук В.О., Риндюк В.І., Федотов В.О. Теоретична механіка. Статика. Розрахунково-графічні та контрольні завдання. Навчальний посібник. – В.: ВДТУ, 2002. – 108 с.
5. Іванов Б.О. Конспект лекцій із теоретичної механіки. Навчальний посібник. – К.: ВПЦ «Київський університет», 2012. – 207 с.
6. Кондель В.М. Машинознавство. Ч.1. Теоретична механіка. Збірник індивідуальних завдань до контрольних робіт з прикладами розв'язування. – П.: ПНПУ, 2011. – 20 с.
7. Вамболь С.О., Халипа В.М. Методичні вказівки до самостійного вивчення курсу «Теоретична механіка». Розділ «Статика». – Х.: АЦЗУ, 2005. – 56 с.
8. Шпачук В.П., Пушня В.О. Методичні вказівки і завдання для практичних занять, виконання контрольних робіт і самостійної роботи з курсу «Технічна механіка». – Х.: ХНАМГ, 2010. – 59 с.
9. Гуліда Е.М., Дзюба Л.Ф., Ольховий І.М. Прикладна механіка: Підручник. – Л.: Світ, 2007. – 384 с. з іл.
10. Аркуша А.И. Техническая механика. Теоретическая механика и сопротивление материалов. – М.: Высшая школа, 1989. – 352 с.