Corrigé de e3a physique PSI 2008 par Jean Marc Drocourt

Remarques.

Ce problème très long comporte beaucoup de questions faciles ; à ce point de vue, il est bien adapté aux bons élèves passant le concours e3a. Il est très théorique et ne sélectionne pas les candidats sur leur sens concret.

La question B2 de la première partie est trop difficile, en l'absence de décomposition de cette question en plus petites étapes, au point que l'énoncé s'est trompé en demandant à tort de supposer $j = 0$. Au surplus, demander le tracé des lignes de champ est hors programme (et très vieillot), le programme ne demandant explicitement que de savoir commenter les symétries dans une carte de lignes de champ fournie par l'énoncé.

Le libellé de la première moitié de la question B7 qui suit est tout aussi déraisonnable.

PREMIÈRE PARTIE
COURANTS DE FOUCAULT DANS UNE PLAQUE MÉTALLIQUE

A / PROPAGATION D'UNE ONDE DANS UN DEMI-ESPACE INFINI MÉTALLIQUE

A.1. Loi d'Ohm : $\vec{J}(M,t) = s\vec{E}(M,t)$.

A.2. Pour montrer qu'une solution $\vec{H}(M,t) = H(M,t)\vec{u}_z$ convient, il faut montrer qu'elle satisfait aux équations du problème, soit les équations de Maxwell et la loi d'Ohm, et à ses conditions aux limites. C'est irréaliste de l'examiner au stade actuel. Nous le montrerons dans la suite, en résolvant les questions 2 à 7.

Comme $\mathrm{div}\vec{B} = 0$, $\frac{\partial H}{\partial z} = 0$, qui signifie que H ne dépend pas de z.

Si la solution du problème est unique, elle a même symétrie que le problème. Or le problème est invariant par translation parallèle à Oy. Il est donc probable que H ne dépend pas de y. En résumé, $H(M,t) = H(x,t)$.

A.3. L'équation de Maxwell-Ampère $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B} = m_0 m \vec{J}$ s'écrit :

$J_x = 0$

$J_y = -\frac{\partial H}{\partial x}$

$J_z = 0$

soit $\vec{J} = J(x,t)\vec{u}_y$, avec $J = -\frac{\partial H}{\partial x}$.

Tout plan parallèle à Oxz est un plan d'antisymétrie de $\vec{H}$ et un plan de symétrie des milieux, donc un plan de symétrie des courants source et un plan d'antisymétrie du champ magnétique produit par les variations temporelles de $\vec{H}$. Ceci est en accord avec la loi de Lenz qui dit le champ magnétique créé par les courants induits par une variation de champ magnétique s'oppose au champ magnétique qui lui donne naissance : ici, il a même direction.

A.4. L'équation de Maxwell-Faraday $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ s'écrit

$\frac{1}{s}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(J(x,t)\vec{u}_y\right) = -m_0 m \frac{\partial H(x,t)}{\partial t}\vec{u}_z$,

soit $\frac{\partial J}{\partial x} = -m_0 m s \frac{\partial H}{\partial t}$

ou $\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = m_0 m s \frac{\partial H}{\partial t}$.

Dérivons $\frac{\partial J}{\partial x} = -m_0 m s \frac{\partial H}{\partial t}$ par rapport à x :

$\frac{\partial^2 J}{\partial x^2} = m_0 m s \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)$,

soit $\frac{\partial^2 J}{\partial x^2} = m_0 m s \frac{\partial J}{\partial t}$.

H et J satisfont à la même équation aux dérivées partielles, qui est l'équation de propagation d'une onde électromagnétique polarisée rectilignement dans un conducteur ohmique ; cette équation est formellement la même que celles de la chaleur et de la diffusion.

A.5. Remplaçons les grandeurs sinusoïdales par leurs représentations complexes et la dérivation par rapport au temps par la multiplication par jw :

$$\frac{\partial^2 \underline{H}}{\partial x^2} = jw m_0 m_r s \underline{H}$$

.

Posons $d = \sqrt{\frac{2}{m_r m_0 s w}}$. L'équation s'écrit :

$$\frac{\partial^2 \underline{H}}{\partial x^2} = \frac{2j}{d^2}\underline{H}$$

.

De même, $\frac{\partial^2 \underline{J}}{\partial x^2} = \frac{2j}{d^2}\underline{J}$.

A.6. Fixons t. La solution générale est une combinaison de solutions de la forme $\underline{H} = A\exp(rx)$.

$$r^2 = \frac{2j}{d^2} \Rightarrow r = \pm\frac{1+j}{d}$$

La solution générale est $\underline{H} = A(t)\exp\left(\frac{1+j}{d}x\right) + B(t)\exp\left(-\frac{1+j}{d}x\right)$.

En pratique, H ne peut augmenter indéfiniment quand $x \to +\infty$, donc $B(t) = 0$ et la solution est :

$\underline{H} = A(t)\exp\left(\frac{1+j}{d}x\right)$, où $A(t)$ est une fonction complexe sinusoïdale du temps dont la pulsation est w.

Comme le conducteur est ohmique, il ne peut porter de nappe de courant sur sa surface, $\underline{H}$ est continu à la traversée de sa surface et $\underline{H}(x = 0) = H_0\exp(jwt)$, d'où finalement :

$$\underline{H} = H_0\exp\left(jwt - \frac{1+j}{d}x\right)$$

Comme $\underline{J} = -\frac{\partial \underline{H}}{\partial x}$, $\underline{J} = \frac{(1+j)H_0}{d}\exp\left(jwt - \frac{1+j}{d}x\right)$.

d est la variation caractéristique de x sur laquelle H et J évoluent.

A la fréquence de 10 kHz, $d = \sqrt{\frac{2}{10^2 \times 4p \times 10^{-7} \times 10^7 \times 2p \times 10^4}} = 159\ mm$.

La densité de courant peut être considérée comme négligeable à la profondeur de 1 mm.

A.7.

$$\vec{H} = \mathrm{Re}\left(H_0\exp\left(jwt - \frac{1+j}{d}x\right)\vec{u}_z\right) = H_0\exp\left(\frac{x}{d}\right)\cos\left(wt - \frac{x}{d}\right)\vec{u}_z$$

$$\vec{J} = \mathrm{Re}\left(\frac{(1+j)H_0}{d}\exp\left(jwt - \frac{1+j}{d}x\right)\vec{u}_y\right) = \frac{\sqrt{2}H_0}{d}\exp\left(\frac{x}{d}\right)\cos\left(wt - \frac{x}{d} + \frac{p}{4}\right)\vec{u}_y$$

Retour sur A.2.

La solution obtenue satisfait à la loi d'Ohm et aux trois équations de Maxwell utilisées, ainsi qu'aux conditions aux limites ; satisfait-elle à la quatrième ? oui, car $\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{1}{s}\mathrm{div}\,\vec{J} = 0$.

A.8. $\langle P_v \rangle = \left\langle \vec{J} \times \vec{E} \right\rangle = \frac{\langle J^2 \rangle}{s} = \frac{H_0^2}{sd^2}\exp\left(\frac{2x}{d}\right)$

A.9. La plaque réagit aux variations de champ magnétique appliqué par un courant proche de sa surface qui annule le champ magnétique à l'intérieur de la plaque. Ce courant est réparti sur une épaisseur de l'ordre de d. La plaque s'échauffe sur cette épaisseur.

B / CONTRÔLE NON DESTRUCTIF PAR COURANTS DE FOUCAULT

B.1. La formule «le champ produit par le fil en tout point de la plaque et de l'air sera considéré comme le champ produit par un fil infini dans le vide » peut laisser perplexe. Nous considérerons que, contrairement à ce qui précède, $m_r = 1$ dans la plaque.

Tout plan contenant l'axe du fil est un plan de symétrie du courant, donc d'antisymétrie du champ magnétique, aussi le champ magnétique est orthoradial et les lignes de champ sont les cercles d'axe le fil. En voici un dessin dans le plan Oxz.



B.2. En appliquant le théorème d'Ampère à une ligne de champ du fil, on voit que le fil produit le champ magnétique $\vec{B}_{fil} = \frac{m_0 i(t)}{2pr}\vec{u}_q$.

Le champ magnétique total est :

$$\vec{B} = \frac{m_0 i(t)}{2pr}\vec{u}_q + m_0 H(t)\vec{u}_z$$

$$B_r = m_0 H(t)\cos q$$

$$B_q = \frac{m_0 i(t)}{2pr} - m_0 H(t)\sin q$$

L'équation des lignes de champ, à un instant donné, est :

$$\frac{dr}{B_r} = \frac{r\,dq}{B_q}$$

$$\frac{dr}{m_0 H\cos q} = \frac{r\,dq}{\frac{m_0 i}{2pr} - m_0 H\sin q}$$

qui dépend du paramètre $h = \frac{4pH}{i}$ qui est l'inverse d'une longueur. Après un peu de calcul, on obtient :

$$\frac{2dr}{hr} = \sin q\,dr + r\cos q\,dq$$

$$\frac{2}{h}\ln r = r\sin q + cste$$

$\ln\left(x^2 + z^2\right) + hx = c$ où c est une constante dont la valeur définit la ligne de champ.

Discutons les lignes de champ à un instant déterminé ; il faut distinguer deux cas.

Si i et H sont en phase ou en opposition de phase (vrai en particulier avec la supposition de l'énoncé $j = 0$, exprimée de façon emberlificotée), h est une constante et les lignes de champ ne dépendent pas du temps, contrairement à ce que demande de montrer l'énoncé.

Sinon, $h = \frac{4pH_0\cos wt}{I\cos(wt + j)}$ dépend du temps et les lignes de champ se déforment au cours du temps. Comme h est l'inverse d'une longueur, quand il varie, cela fait subir aux lignes de champ une homothétie.

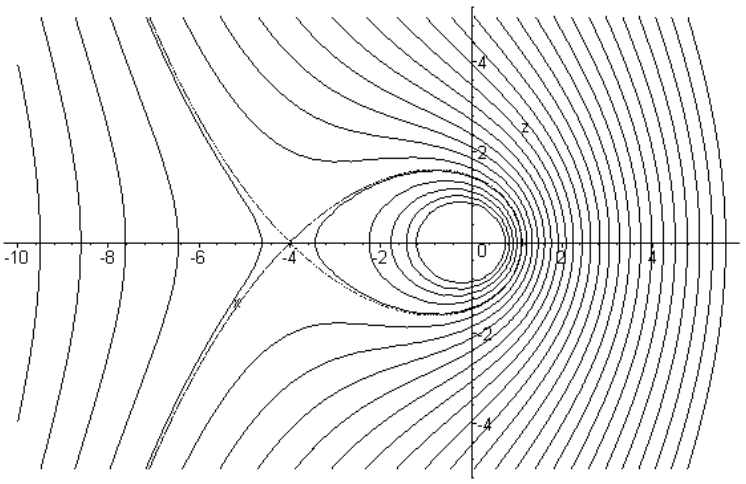
Pour tracer les lignes de champ, il faut distinguer trois cas :

Si $h = 0$, on retrouve les lignes de champ de la question B.1.

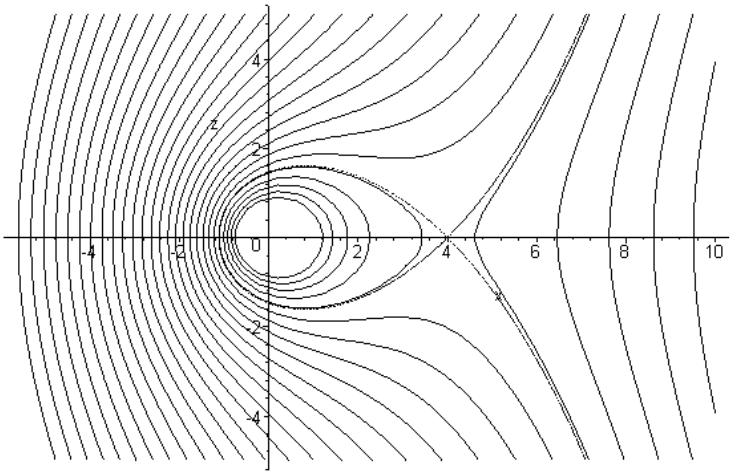
Si $h = \pm\infty$, les lignes de champ sont des droites parallèles à Oz.

Sinon, les lignes de champ au loin ($r >> \frac{1}{h}$) sont des droites parallèles à Oz et celles proches du fil ($r << \frac{1}{h}$) sont des cercles d'axe Oz. Quand on s'écarte de Oz, ces cercles se déforment et sont centrés sur un point de l'axe Ox dont le signe de l'abscisse est opposé à celui de h.

Voici des lignes de champ pour $h > 0$:



et pour $h < 0$:



La justification de ce tracé est en annexe.

B.3. L'auteur de l'énoncé attend probablement la réponse que le courant est celui qui annule J dans la section de la fissure, soit $i = -\frac{\sqrt{2}H_0 p d_2^2}{4d}\cos\left(wt + \frac{p}{4}\right)$,

qui est de la forme $i = I\cos(wt + j)$, avec $I = \frac{\sqrt{2}H_0 p d_2^2}{4d}$ et $j = -\frac{3p}{4}$.

En réalité, le courant dans le métal sert d'écran pour empêcher le champ magnétique de pénétrer dans le métal. La suppression du courant dans la fissure entraîne un renforcement du courant autour de la fissure. N'en tenant pas compte dans la suite, notre calcul surestime le signal produit par la fissure, particulièrement à grande distance de la fissure. L'existence d'un maximum en face de la fissure reste probablement juste.

B.4. Supposons que la bobine a une résistance négligeable devant celle du circuit dans lequel elle débite.

$u_0(t) = -\frac{dF_0}{dt}$ où F_0 est le flux magnétique compté positivement dans le sens de $\vec{u}_z$.

$F_0 = Nsm_0 H_0 \cos wt$

$u_0(t) = Nsm_0 H_0 w \sin wt$

La valeur maximale de u_0 est $Nsm_0 H_0 w$.

Le déplacement du capteur n'a pas d'influence sur $u_0(t)$.

B.5. Soit F_1 le flux du champ créé par $i(t)$.

$F_1 = -\frac{m_0 i N s}{2pr}\sin q = -\frac{m_0 i(t) D N s}{2pr^2}$ où $r^2 = D^2 + (z_0 - V_b t)^2$.

$u_1 = -\frac{dF_1}{dt} » \frac{m_0 D N s}{2pr^2}\frac{di}{dt} = \frac{m_0 D I N s w}{2pr^2}\cos\left(wt - \frac{p}{4}\right)$ si V_b est suffisamment petit.

La tension $u(t)$ est la somme de deux tensions, l'une d'amplitude constante et variant en $\cos(wt)$, l'autre, petite, d'amplitude maximum pour $z = 0$ et variant en $\cos\left(wt - \frac{p}{4}\right)$. Comme le déphasage entre ces deux tensions est inférieur à $\frac{p}{2}$, la construction de la somme par la représentation de Fresnel montre que l'amplitude de $u(t)$ varie un peu et passe par un maximum quand la bobine passe à la hauteur de la fissure.

L'altitude de la bobine lors du maximum de l'amplitude donne l'altitude de la fissure ; plus la variation d'amplitude est grande, plus la fissure est grosse ou proche de la surface.

Pourquoi faut-il que le capteur se déplace ? La variation d'amplitude du signal étant faible, elle n'est détectable que par comparaison avec le signal non perturbé. En outre, le déplacement du capteur a l'avantage d'explorer toute la surface du matériau, et non un seul endroit.

B.6. Il est possible de détecter des fissures dont la profondeur ne dépasse pas quelques d .

B.7. L'énoncé pose la question : « pourquoi cette configuration (orientations des axes de l'inducteur b et de la bobine $b¢$) ne permet-elle pas de détecter des fissures parallèles à l'axe Oz ? ». La réponse honnête est : « je ne sais pas le montrer, mais cela me paraît plausible ».

Pour répondre sérieusement, il faudrait trouver la perturbation du courant provoquée par la fissure : les lignes de courant doivent s'écarter de leur direction rectiligne en l'absence de fissure de façon à contourner la fissure ; ensuite, il faudrait calculer le champ magnétique créé par la différence entre le courant avec et sans fissure et finalement calculer le flux dans la bobine.

Si on admet qu'une fissure parallèle à Oz ne provoque pas d'effet, pour détecter une fissure passant par O , il faut faire tourner autour de Ox l'échantillon et après chaque rotation faire un déplacement complet de $b¢$; quand la perturbation est maximum, la fissure est parallèle à Oy .

DEUXIÈME PARTIE
PROPAGATION D'UNE ONDE ULTRASONORE DANS UNE BARRE MÉTALLIQUE

A / ÉTUDE DE LA BARRE EN TRACTION

A.1. Le scientifique le plus célèbre contemporain de Hooke est Newton.

A.2. $F = \frac{YS}{L}DL$ est semblable (y compris pour le signe) à $F = K_{eq}DL$, avec $K_{eq} = \frac{YS}{L}$.

A.3. $K_{eq} = \frac{2{,}1 \times 10^{11} \times 5 \times 10^{-4}}{0{,}5} = 2{,}1 \times 10^{8}\ \mathrm{N.m^{-1}}$.

$DL = \frac{F}{K_{eq}} = \frac{10^4}{2{,}1 \times 10^8} = 4{,}76 \times 10^{-5}\ \mathrm{m}$.

A.4. Un cube d'arête d contient un atome, d'où $nd^3 = 1$.

A.5. Soit deux ressorts identiques de raideurs K , tensions F et allongements DL , disposés en parallèle. L'ensemble équivaut à un ressort de tension $2F$ et d'allongement DL , d'où $K_{parallèle} = \frac{2F}{DL} = 2K$.

Soit deux ressorts identiques de raideurs K , tensions F et allongements DL , disposés en série. L'ensemble équivaut à un ressort de tension F et d'allongement $2DL$, d'où $K_{série} = \frac{F}{2DL} = \frac{K}{2}$.

Dans la barre, chaque chaîne comporte $\frac{L}{d}$ ressorts en série et il y a $\frac{S}{d^2}$ chaîne en parallèle.

A.6. La raideur d'une chaîne est $\frac{K}{L/d}$ et celle de l'ensemble des chaînes est $K_{eq} = \frac{S}{d^2}\frac{K}{L/d} = \frac{KS}{Ld} = \frac{YS}{L}$. D'où $Y = \frac{K}{d}$.

La loi de Hooke est vérifiée par ce modèle en chaînes d'atomes, puisque $Y = \frac{K}{d}$, indépendant de S, L, F et ΔL, est une propriété du matériau indépendante des conditions où il se trouve.

B / MODÈLE DE LA CHAÎNE INFINIE D'OSCILLATEURS

B.1. L'allongement du ressort reliant les atomes de rangs $q-1$ et q est $u_q - u_{q-1}$, d'où l'expression de la loi fondamentale de la dynamique :

$$m\ddot{u}_q = -K(u_q - u_{q-1}) - K(u_q - u_{q+1})$$

$$\ddot{u}_q + \omega_0^2(2u_q - u_{q-1} - u_{q+1}) = 0$$

B.2. Portons dans cette équation $u_q(t) = A\cos(\omega t - kqd)$:

$$-\omega^2 A\cos(\omega t - kqd) + \omega_0^2 A\left(2\cos(\omega t - kqd) - \cos(\omega t - k(q-1)d) - \cos(\omega t - k(q+1)d)\right) = 0$$

Utilisons $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a\cos b$

$$\cos(\omega t - k(q-1)d) - \cos(\omega t - k(q+1)d) = 2\cos(\omega t - kqd)\cos kd$$

D'où $-\omega^2 + \omega_0^2(2 - 2\cos kd) = 0$.

Comme $-1 \leq \cos kd \leq +1$, cette relation de dispersion n'a de solution en k que si $\omega \leq \omega_c = 2\omega_0$.

$f_c = \frac{\omega_0}{\pi}$.

Pour traiter le cas $\omega > \omega_c$, utilisons le formalisme complexe : $u_q = \mathrm{Re}\left(A\exp(i(\omega t - kqd))\right)$ et remplaçons dans l'équation différentielle u_q par $\underline{u}_q = A\exp(i(\omega t - kqd))$:

$$-\omega^2 \underline{u}_q + \omega_0^2(2\underline{u}_q - \underline{u}_{q-1} - \underline{u}_{q+1}) = 0$$

$$-\omega^2 + \omega_0^2(2 - \exp(ikd) - \exp(-ikd)) = 0$$

C'est une équation du second degré en $\exp(ikd)$, qui admet deux racines ; si $\omega > 2\omega_0$, ces deux racines donnent deux valeurs de k complexes conjuguées et l'amplitude de l'onde varie exponentiellement en fonction de x.

$K = Yd = 2{,}1 \times 10^{11} \times 250 \times 10^{-12} = 52{,}5\ \mathrm{N.m^{-1}}$.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K N_A}{M}} = \sqrt{\frac{52{,}5 \times 6{,}02 \times 10^{23}}{0{,}056}} = 2{,}38 \times 10^{13}\ \mathrm{rad.s^{-1}}$$

$\omega_c = 4{,}75 \times 10^{13}\ \mathrm{rad.s^{-1}}$

$f_c = 7{,}56 \times 10^{12}\ \mathrm{Hz}$

B.3.

$$u_q - u_{q-1} \approx d\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$2u_q - u_{q-1} - u_{q+1} \approx -d\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = -d^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

L'équation devient, à l'approximation linéaire :

$$m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - Kd^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

de la forme $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$

avec $V = \sqrt{\frac{Kd^2}{m}}$,

soit comme $m = \rho d^3$

$V = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$.

La solution générale est $u = f\left(t - \frac{x}{V}\right) + g\left(t + \frac{x}{V}\right)$, où f et g sont des fonctions arbitraires.
Il s'agit d'une onde progressive si l'une de ces deux fonctions est nulle.
Dans un fluide, le module d'Young doit être remplacé par l'inverse de la compressibilité.

$$V = \sqrt{\frac{2,1 \times 10^{11}}{7800}} = 5190\,\mathrm{m.s^{-1}}$$.

B.4. $$dE_c = \frac{1}{2}\rho S dx v^2 = \frac{1}{2}\rho S dx A^2\omega^2 \sin^2\left(\omega\left(t - \frac{x}{V}\right)\right)$$.

$$dE_p = \frac{1}{2}K_{eq}\Delta L^2 = \frac{1}{2}\frac{YS}{dx}\left(u(x+dx) - u(x)\right)^2 = \frac{1}{2}YSdx\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = \frac{1}{2}YSdxA^2\frac{\omega^2}{V^2}\sin^2\left(\omega\left(t - \frac{x}{V}\right)\right)$$.

Comme $V^2 = \frac{Y}{\rho}$, $dE_c = dE_p$.

$$s = \frac{Y\Delta L}{L} = \frac{Y}{dx}\left(u(x+dx) - u(x)\right) = Y\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{A\omega Y}{V}\sin\left(\omega\left(t - \frac{x}{V}\right)\right)$$,

alors que $v = \frac{\partial u}{\partial t} = -A\omega\sin\left(\omega\left(t - \frac{x}{V}\right)\right) \Rightarrow s = -\frac{Yv}{V}$.

B.5. La puissance transportée par l'onde est le produit de la vitesse v par la force $-sS$ exercée par le coté de la barre d'où vient l'onde sur l'autre coté : $P = -vsS$, soit par unité de surface $P = -s(x,t)v(x,t)$.

$$P = \frac{Yv^2}{V} = \frac{YA^2\omega^2}{V}\sin^2\left(\omega\left(t - \frac{x}{V}\right)\right)$$

Comme $\left\langle \sin^2\left(\omega\left(t - \frac{x}{V}\right)\right)\right\rangle = \frac{1}{2}$, $\langle P\rangle = \frac{YA^2\omega^2}{2V}$.

L'énergie emmagasinée par unité de longueur est $\frac{dE}{dx} = \rho SA^2\omega^2\sin^2\left(\omega\left(t - \frac{x}{V}\right)\right)$, soit en valeur moyenne :

$$\left\langle\frac{dE}{dx}\right\rangle = \frac{\rho SA^2\omega^2}{2} = \frac{7800 \times 5 \times 10^{-4} \times \left(10^{-8}\right)^2 \times \left(2\pi \times 10^6\right)^2}{2} = 0,00770\,\mathrm{J.m^{-1}}$$.

La puissance est $\langle P\rangle = \frac{YA^2\omega^2 S}{2V} = \frac{2,1 \times 10^{11} \times \left(10^{-8}\right)^2 \times \left(2\pi \times 10^6\right)^2 \times 5 \times 10^{-4}}{2 \times 5190} = 40\,\mathrm{watts}$.

On vérifie que $\langle P\rangle = V\left\langle\frac{dE}{dx}\right\rangle$.

B.6. Pour le passage air-acier ou acier-air :

$$R = \left(\frac{7800 \times 5190 - 1,2 \times 330}{7800 \times 5190 + 1,2 \times 330}\right)^2 = 1 - 3,91 \times 10^{-5}$$ et $T = 3,91 \times 10^{-5}$.

Nous en concluons que le son ne passe pratiquement pas d'un matériau à l'autre. Pour le faire passer dans un instrument de musique, il faut utiliser une caisse de résonance.

C / FRÉQUENCES PROPRES D'UNE BARRE

C.1. On peut appeler $u_i = f_i(x,t)g_i(x,t)$ une composante de Fourier de $u(x,t)$ ou une onde stationnaire.

A la question « quelle est la définition de » $u_i = f_i(x,t)g_i(x,t)$, la réponse juste me paraît $u_i = f_i(x,t)g_i(x,t)$. Ce n'est pas ce qu'escomptait l'auteur de l'énoncé. Admettons qu'il espérait qu'on lui donne la définition d'une onde stationnaire. On définit habituellement une onde stationnaire comme la superposition de deux ondes progressives sinusoïdales de même fréquence, même amplitude et de vecteurs d'onde opposés.

L'équation des ondes étant linéaire, sa solution générale est une combinaison linéaire de solutions particulières que nous choisirons comme ses composantes de Fourier. Portons $u_i = f_i(x)g_i(t)$ dans l'équation de d'Alembert : on en déduit $V = \frac{\omega_i}{k_i}$.

C.2. Les conditions aux limites sont $u(0,t) = 0$ et $s(L,t) = 0$.

Considérons la condition $u(0,t) = 0$, soit $\sum_i f_i(0) g_i(t) = 0$; comme les w_i sont tous différents, les g_i sont linéairement indépendants, ce qui impose $f_i(0) = 0$, soit $A_i = 0$.

De même, la condition $s(L,t) = 0$, compte tenu de $s = Y \frac{\partial u}{\partial x}$, impose $\frac{df_i}{dx}(L) = 0$, soit $\cos(k_i L) = 0$.

Les solutions sont $k_0 = \frac{p}{2L}$, $k_1 = \frac{3p}{2L}$, $k_2 = \frac{5p}{2L}$, …

$$u_0 = U_0 \sin\frac{w_0 x}{V}\cos(w_0 t + j_0)$$

$$u_1 = U_1 \sin\frac{3w_0 x}{V}\cos(3w_0 t + j_1)$$

$$u_2 = U_2 \sin\frac{5w_0 x}{V}\cos(5w_0 t + j_2)$$

La contrainte est maximale à un instant que nous ne préciserons pas ; l'endroit où elle présente ce maximum est :

$x = 0$ pour u_0 ;

$x = 0$ et $x = \frac{2L}{3}$ pour u_1 ;

$x = 0$, $x = \frac{2L}{5}$ et $x = \frac{4L}{5}$ pour u_2.

D / RÉGÎME FORCÉ SINUSOÏDAL

D.1. en portant $u = f(x)\cos(wt)$ dans $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$, on obtient $f''(x) + \frac{w^2}{V^2} f(x) = 0$.

Posons $k = \frac{w}{V}$. La solution générale de l'équation différentielle est $f(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx)$.

La condition aux limites $u(0,t) = A_0\cos(wt)$ impose $A = A_0$.

La condition aux limites $0 = s(L,t) = Y\frac{\partial u}{\partial x}(x = L)$ impose $-A\sin(kL) + B\cos(kL) = 0 \Rightarrow B = A_0\tan(kL)$.

En résumé, le régime permanent est $u = A_0\left(\cos\frac{wx}{V} + \tan\frac{wL}{V}\sin\frac{wx}{V}\right)\cos(wt)$

D.2. Cette expression est infinie si, n étant un entier positif ou nul, $\frac{wL}{V} = (2n+1)\frac{p}{2}$, soit $w = (2n+1)\frac{pV}{2L}$; il y a alors résonance.

L'énoncé parle de résonance d'amplitude, mais, faute d'amortissement, il n'y a pas de distinction entre résonance d'amplitude et résonance de vitesse.

La résonance a lieu quand $L = (2n+1)\frac{l}{4}$, l étant la longueur d'onde du son dans la barre.

Fixons un vibreur à une extrémité de la barre et un accéléromètre à l'autre extrémité. Faisons varier la fréquence du signal actionnant le vibreur. Cherchons les fréquences pour lesquelles l'amplitude du signal produit par l'accéléromètre est maximum. Ces fréquences sont $\frac{(2n+1)V}{4L}$. On en déduit V et donc Y.

D.3. Pour $n = 0$, $\sqrt{\frac{Y}{r}} = V = 4fL \Rightarrow Y = 16\rho f^2 L^2 = 16 \times 7800 \times 2655^2 \times 0{,}5^2 = 2{,}2 \times 10^{11}$ Pa.

Si on tient compte des trois mesures de fréquence, on remarque que, malgré l'incertitude de 1Hz, ces trois mesures sont exactement dans les rapports théoriques 1, 3 et 5 ; l'incertitude réelle sur la mesure de la fréquence pourrait être plus faible que celle annoncée et il aurait été souhaitable de définir les mesures au dixième de hertz près.

Un calcul simple de l'incertitude ne tient compte que d'une mesure de fréquence :

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{\Delta r}{r} + 2\frac{\Delta f}{f} + 2\frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{7800} + 2\frac{1}{13275} + 2\frac{10^{-5}}{0,5} = 3\times 10^{-4}$$

mais son résultat dépend de la fréquence choisie.

E / CONTRÔLE NON DESTRUCTIF PAR ULTRASONS

E.1. Lors de la diffraction par une pupille circulaire de rayon R, le rayon angulaire du premier anneau noir est $\frac{1,22\lambda}{2R}$. De même, le demi angle au sommet du cône de divergence des ondes ultrasonores dans l'acier est

$\frac{1,22\times 5190}{0,01\times 5\times 10^{6}} = 0,13\,\text{rad}$, expression valable puisque petite devant 1.

E.2. Sur la face B, $R \gg 1$, ce qui est favorable. S'il y a une lame d'air entre le palpeur et la pièce à tester, $T \gg \left(4\times 10^{-5}\right)^2$, ce qui est très défavorable ; il faut mettre un liquide entre le palpeur et la pièce à tester pour améliorer T.

E.3. $OO_1 = 5,3\,\text{mm}$ représente T_0 ; $OO_2 = 53\,\text{mm}$ représente l'aller et retour de l'onde, soit $\frac{2AB}{V_L} = \frac{0,2}{5190}\,\text{s}$. D'où $T_0 = \frac{5,3}{53}\times\frac{0,2}{5190} = 3,85\times 10^{-6}\,\text{s}$.

E.4. Si la soupape ne comporte pas de défaut, l'écran ne présente qu'une série de pics de hauteurs décroissantes (peut-être faiblement décroissantes, comme sur la figure 9) et équidistants de $\frac{15}{10}\times 53 = 80\,\text{mm}$.

E.5. Si la soupape contient un défaut à $CD = 11\,\text{cm}$, l'écran montre aussi des pics secondaires dont le premier est à $\frac{11}{10}\times 53 = 58\,\text{mm}$ de l'émission. On peut confirmer ce diagnostic en plaçant le palpeur à l'autre extrémité de la soupape.

Annexe : calcul des lignes de champ de I.B.2.

Utilisons le programme maple :

```
> restart:with(plots):
> gr:=(h,c,g,couleur,style)->implicitplot(log(x^2+z^2)+h*x=c,x=-10..10,z=-5..5,
grid=[g,g],color=couleur,linestyle=style);
> display([seq(gr(0.5,i/4,50,black,1),i=-1..25),gr(0.5,-2+2*log(4),200,black,7)],
scaling=constrained);
> display([seq(gr(-0.5,i/4,50,black,1),i=-1..25),gr(-0.5,-2+2*log(4),200,black,7)],
scaling=constrained);
```