

Epreuve de Physique 1

durée 4 heures

Ce sujet ne nécessite l'utilisation d'aucun document ou matériel particulier. L'usage d'une simple calculatrice de poche est autorisé conformément à la législation en vigueur. Tout ouvrage de référence et tout document sont interdits. On trouvera dans les annexes des rappels de résultats utiles à la résolution du problème.

I. PARTIE I
PROPRIÉTÉS DE SYMÉTRIE DES CHAMPS ÉLECTRIQUE
ET MAGNÉTIQUE. APPLICATIONS

I.A Le champ électrique.

- I.A.1 Soit une distribution D_q de charges électriques qui crée en un point M un champ électrique .
Soit P un plan quelconque et soit D'_q la distribution de charges symétrique de D_q par rapport à P. Soit M' le point symétrique du point M par rapport à P. Comment obtenir le champ électrique créé par la distribution D'_q ?
- I.A.2
- I.A.2.a P_s est un plan de symétrie pour une distribution de charges si l'opération de symétrie par rapport à ce plan la laisse invariante.
Soit M un point de P_s . Caractériser, par rapport au plan P_s le champ créé par une telle distribution de charges symétrique.
- I.A.2.b P_A est un plan d'antisymétrie pour une distribution de charges si l'opération de symétrie par rapport à ce plan change la distribution de charges en son opposée.
Soit M un point de P_A . Caractériser, par rapport au plan P_A , le champ créé par une telle distribution de charges antisymétrique.
- I.A.2.c Application:
Soit deux plans infinis parallèles chargés, l'un avec la densité surfacique de charge uniforme $+\sigma$ et l'autre avec la densité $-\sigma$. On considère un point M entre ces deux plans.
Donner la configuration du champ électrique .
Montrer qu'il est nécessairement uniforme.

I.B Le champ magnétique.

- I.B.1 Soit une distribution D_l de courants qui crée en un point M un champ magnétique .
Soit P un plan quelconque et soit D'_l , la distribution de courants symétrique de D_l par rapport à P.
Comment obtenir le champ magnétique créé par la distribution D'_l , en un point M' symétrique de M par rapport à P ?
- I.B.2
- I.B.2.a P_s est un plan de symétrie pour une distribution de courants si l'opération de symétrie par rapport à ce plan la laisse invariante.
Soit M un point de P_s . Caractériser, par rapport au plan P_s le champ créé par une telle distribution de courants symétrique.
- I.B.2.b P_A est un plan d'antisymétrie pour une distribution de courants si l'opération de symétrie par rapport à ce plan change la distribution de courants en son opposée.
Soit M un point de P_A . Caractériser, par rapport au plan P_A , le champ créé par une telle distribution de courants antisymétrique.
- I.B.2.c Application :
Soit un solénoïde infini d'axe Δ parcouru par un courant I constant.
Donner la configuration du champ magnétique créé par ce solénoïde en tout point de l'espace.
En considérant sa circulation sur un contour judicieusement choisi, montrer qu'il est constant à l'extérieur. En se plaçant en dehors de toute source de champ, en déduire que cette constante est nulle. Montrer qu'il est aussi constant à l'intérieur.

I.C Le champ électromagnétique.

- I.C.1 Soit une région de l'espace où règne un champ électrique qui possède la symétrie du cylindre infini : est invariant par translation et rotation par rapport à un axe Δ donné. On suppose en outre que est parallèle à l'axe Δ .
- I.C.1.a On utilise les coordonnées cylindriques avec $\Delta = z'z$. Montrer que :
- I.C.1.b On se place en régime variable de telle sorte que .
Soit le champ magnétique généré par .
Montrer que est orthoradial et ne dépend que de ρ :
- I.C.2 Soit une région de l'espace où règne un champ magnétique uniforme créé par des sources variables dans le temps. On place dans ce champ un conducteur cylindrique de longueur quasi-infinie d'axe $\Delta = z'z$, et de conductivité γ .
- I.C.2.a Déterminer la configuration des courants de densité volumique induits qui apparaissent dans le conducteur en supposant que le champ magnétique reste partout identique au champ extérieur.
Quel nom leur donne-t-on ?
- I.C.2.b Donner l'expression dans les coordonnées cylindriques du champ électrique induit en fonction de ρ et
En déduire que le courant induit dans le conducteur est plus important à sa périphérie. Justifier le signe obtenu.

II. PARTIE II CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE DANS UN CONDENSATEUR PLAN CYLINDRIQUE.

Un condensateur plan est constitué par des armatures métalliques circulaires de rayon R et de même axe $\Delta = z'z$, séparées d'une hauteur h (Figure II-1). Ce condensateur est soumis à une tension alternative donnée, de fréquence , qui produit à l'instant t dans l'espace vide entre les armatures un champ uniforme, sinusoïdal dans le temps et axial (c'est à dire parallèle à l'axe Δ), qu'on écrit en notation complexe : où est l'amplitude du champ .

Figure II-1

Le champ électrique crée un champ magnétique , lequel engendre un champ électrique , qui crée à son tour un champ magnétique , qui engendre , etc.
Dans tout le problème, on négligera les effets de bord.

II.A Calcul des champs B_1 et E_2 .

- II.A.1 Les variations dans le temps du champ électrique créent un champ magnétique . On veut calculer .
- II.A.1.a En un point M entre les plaques, donner l'équation de Maxwell à laquelle satisfait en fonction de ω , c (la vitesse de la lumière dans le vide) et .
- II.A.1.b On se place dans les coordonnées cylindriques. Montrer que est orthoradial (c'est à dire dirigé selon).
Quel est son sens au temps t ?
- II.A.1.c Soit le cercle C_1 parallèle au plan xOy , centré sur Δ et passant par M .
Calculer la circulation de sur le contour C_1 qu'on orientera comme .
En déduire l'expression de en fonction de c , X = et E_0
Quelle est la dimension de X ?
- II.A.2 Les variations dans le temps du champ magnétique , créent un champ électrique . On veut calculer .
- II.A.2.a Quelle relation lie à ? En déduire l'équation de Maxwell satisfaite par en fonction de c , X , ω et E_0
- II.A.2.b Sans faire de calculs, montrer que l'on peut supposer axial.
- II.A.2.c Soit le contour orienté rectangulaire C_2 (Figure II-2) dans un plan méridien :

Figure II-2

Calculer la circulation de sur C_2 .
En déduire l'expression de en fonction de X et en prenant . Justifier ce choix.

II.B Comportement à basse fréquence .

A basse fréquence ($X \ll 1$) on néglige les termes en X de degré supérieur à 2.

- II.B.1 Exprimer, dans ces conditions, le champ magnétique total et le champ électrique total qui règnent en M à l'instant t à l'intérieur du condensateur, en fonction de c , X et E_0 .
- II.B.2 Étude énergétique.
- II.B.2.a Calculer la densité volumique instantanée $\epsilon_e(t)$ d'énergie électrique et la densité volumique instantanée $\epsilon_m(t)$ d'énergie magnétique dans le condensateur en fonction de ϵ_0 (la permittivité du vide), X , ωt et .
- II.B.2.b On note $\langle \epsilon_{e,m}(t) \rangle_t$ les moyennes temporelles correspondantes.
Exprimer, en fonction de X , le rapport . Que concluez-vous ?
- II.B.3 Puissance rayonnée.
- II.B.3.a Soit le vecteur de Poynting associé à ce champ électromagnétique. Calculer à l'ordre le plus bas en X , en fonction de ϵ_0 , c , X , e_0 et ωt .
- II.B.3.b En déduire que les échanges par rayonnement se limitent à la surface latérale du condensateur. Calculer la puissance rayonnée instantanée $\mathcal{P}(t)$ et en déduire $\langle \mathcal{P}(t) \rangle_t$.
Comment interprétez-vous ce résultat ?

II.C Comportement à haute fréquence .

A haute fréquence, on ne peut plus négliger les termes en X de degré supérieur à 2. On va donc calculer dont est la source, dont est la source, etc ...

- II.C.1 Donner l'orientation de .
Quelle est l'équation satisfaite par ?
Calculer et en déduire l'expression de en fonction de c , X et E_0 .
- II.C.2 Calculer .
- II.C.3 Expression des champs et .
- II.C.3.a On veut calculer par récurrence l'expression de . On suppose que :
En déduire .
- II.C.3.b Calculer alors . Que concluez-vous ?
- II.C.4 Étude du champ électrique.
- II.C.4.a Montrer que le champ électrique total qui règne à l'intérieur du condensateur s'exprime simplement en fonction de et de la fonction de Bessel $J_0(x)$ (donnée en annexe), à condition d'attribuer à x une expression littérale qu'on donnera.
- II.C.4.b Décrire la configuration du champ et examiner ses variations en fonction de ω . Montrer qu'à la périphérie du condensateur, certaines valeurs de ω annulent le champ électrique.
- II.C.5 Réalisation d'une cavité : on ferme le condensateur au niveau de sa surface latérale $\rho = R$ par une feuille d'aluminium assimilé à un conducteur parfait. On cherche les fréquences propres de la cavité ainsi constituée, c'est-à-dire les fréquences particulières permettant l'existence d'une onde décrite par avec les notations du paragraphe précédent.
- II.C.5.a Quelles sont les conditions aux limites imposées aux champ et par la présence de la feuille d'aluminium ?
- II.C.5.b Quelles sont les pulsations possibles pour le champ électromagnétique dans cette cavité cylindrique ?
- II.C.5.c On excite la cavité à l'aide d'un générateur électrique délivrant une tension sinusoïdale de fréquence f aux bornes du condensateur. On constate expérimentalement que l'amplitude du champ dans la cavité prend des valeurs très importantes pour certaines fréquences f_i . Comment appelle-t-on ce phénomène ?
- II.C.5.d Calculer la fréquence f_1 la plus basse du champ dans la cavité pour $R = 4 \cdot 10^{-2}$ m. On donne $c = 3 \cdot 10^8$ m.s⁻¹.
- II.C.6 Étude du champ magnétique.
- II.C.6.a Dans une étude simplifiée du champ magnétique total qui règne dans la cavité, on ne retient que les deux premiers termes du développement en série.
Donner dans ces conditions l'expression de sachant que l'on se place à .
On considère la fonction :
Quelle est la dimension de y ? Montrer que est de la forme
où α et β sont des coefficients numériques qu'on donnera. Montrer que cette fonction passe par un maximum pour une valeur $\rho_{\max}$ de ρ . En déduire son graphe.
- II.C.6.b Caractériser la densité de courant dans la paroi latérale de la cavité.
Donner son expression en fonction de μ_0 (la perméabilité du vide) et $B(\rho = R)$.
Application Numérique : Calculer sa valeur sachant que $E_0 = 10^6$ V.m⁻¹.
On rappelle que $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H.m⁻¹.
- II.C.7 Comment seraient modifiés qualitativement les résultats précédents si on tient compte de la valeur finie de la conductivité de l'aluminium ?

II.D Calcul direct du champ électrique total E.

Au lieu de calculer le champ total sous forme d'une série, on souhaite calculer directement le champ électrique qui règne entre les armatures.

II.D.1 Obtenir l'équation générale de propagation qui relie les dérivées partielles d'un champ électrique.

II.D.2 On cherche à cette équation une solution axiale, ayant la symétrie du cylindre (invariance par rotation et par translation selon l'axe de révolution), qu'on écrit en notation complexe :

Donner l'équation différentielle du second ordre satisfaite par la fonction scalaire $E(\rho)$ pour une fréquence donnée.

II.D.3 Montrer, par un changement de variable judicieux, que cette équation différentielle peut s'écrire:

II.D.4 Montrer qu'on obtient la même solution que précédemment.

II.E Introduction d'un diélectrique .

Au lieu du vide, le condensateur précédent contient un diélectrique parfait, homogène, non chargé, de permittivité ϵ et de perméabilité $\mu = \mu_0$ (celle du vide).

II.E.1 Quelles sont, sans faire de calculs, les modifications à apporter aux notations précédentes pour décrire ce cas ?

En déduire l'expression du champ électrique total dans le diélectrique.

II.E.2 L'introduction d'un diélectrique a-t-elle de l'influence :

- sur le module de la partie spatiale du champ électrique en un point donné ?
- sur la valeur de la fréquence de résonance ?

ANNEXES

, ... sont des vecteurs quelconques

f, g ... sont des fonctions scalaires quelconques

Le produit vectoriel est noté $\times$.

Annexe I : Relations géométriques entre les opérateurs différentiels gradient (∇), divergence (div), rotationnel ($\nabla \times$) et Laplacien (Δ).

(1)

(2)

(3)

(4)

(5)

(6)

(7)

(8)

(9)

(10)

Soit un contour orienté C et S une surface qui s'appuie sur C :

(11) Théorème de Stokes

(12) Théorème de Kelvin

Soit une surface fermée S qui limite le volume V :

(13) Théorème de Green

(14) Théorème du gradient

Annexe II : Les coordonnées cylindriques et expression des opérateurs différentiels dans ces coordonnées.

Dans les coordonnées cylindriques, un point M est repéré par le jeu de coordonnées ρ, θ, z et la base locale est

où $A_i = A_i(\rho, \theta, z)$ $i = \rho, \theta, z$.

A condition que $\rho \neq 0$, on a :

(15)

(16)

(13895916)

Les formules (1) et (4) permettent d'obtenir les expressions du laplacien scalaire et du laplacien vectoriel. Dans le cas particulier d'un champ scalaire à symétrie cylindrique, le laplacien se réduit à :

(18)

Annexe III : Les fonctions de Bessel

Les fonctions de Bessel $B_\nu(z)$ sont des solutions de l'équation différentielle :

(19)

Les fonctions de Bessel de première espèce $J_\nu(z)$ sont définies par la série :

(20)

où Γ est la fonction qui généralise la fonction factorielle.

Dans le cas particulier $\nu=0$, nous avons :

(21)

Pour x réel, le graphe de la fonction $J_0(x)$ est, pour sa partie $x>0$, le suivant :