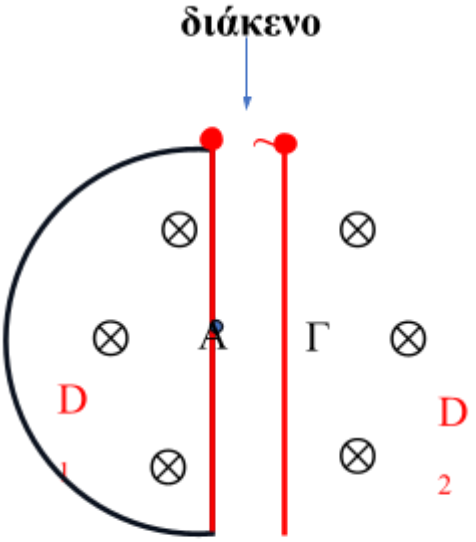
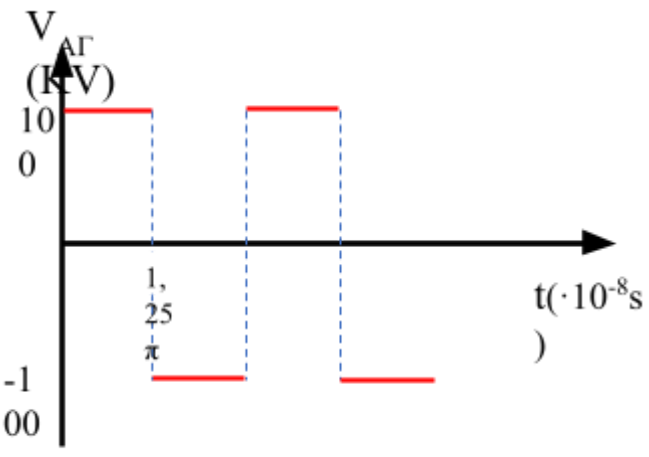
Κύκλοτρο



Σχήμα 1

Το κύκλοτρο είναι ένας κυκλικός επιταχυντής σωματιδίων που εφηύρε το 1930, ο Ernest Lawrence. Αποτελείται από δύο κοίλα ημικυλινδρικά τμήματα σχήματος D (ηλεκτρόδια Dees) που συνδέονται με τους πόλους μιας πηγής εναλλασσόμενης τάσης. Μεταξύ των δύο ηλεκτροδίων υπάρχει διάκενο και στο κέντρο του βρίσκεται η πηγή παραγωγής των σωματιδίων που θέλουμε να επιταχυνθούν, σχήμα 1. Η διάταξη των δυο ηλεκτροδίων βρίσκεται μέσα σε ένα ισχυρό ομογενές μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$, που παράγεται από έναν ηλεκτρομαγνήτη, έτσι ώστε το επίπεδό τους να είναι κάθετο στις δυναμικές γραμμές. Ο ηλεκτρομαγνήτης αναγκάζει τα σωματίδια να κινηθούν σε κυκλικές τροχιές. Στο διάκενο ανάμεσα στα δύο ηλεκτρόδια D, η πηγή της εναλλασσόμενης τάσης παράγει ένα εναλλασσόμενο ηλεκτρικό πεδίο, έτσι ώστε κάθε φορά που τα σωματίδια περνάνε από το ένα ηλεκτρόδιο στο άλλο να επιταχύνονται. Οι διαδοχικές επιταχύνσεις του σωματιδίου κάθε φορά που περνάει από το διάκενο, επιτυγχάνονται μόνο αν η πολικότητα της εναλλασσόμενης τάσης αντιστρέφεται κατάλληλη στιγμή, ώστε το φορτίο κάθε φορά που βρίσκεται στο διάκενο να επιταχύνεται. Για να συμβαίνει αυτό, θα πρέπει η περίοδος της εναλλασσόμενης τάσης να είναι ίση με την περίοδο της περιστροφής του σωματιδίου. Επειδή κάθε φορά επιταχύνονται όταν αλλάζουν D, κινούνται σε κυκλική τροχιά με μεγαλύτερη ακτίνα από την προηγούμενη, γι' αυτό η κίνηση τους είναι σπειροειδής και όχι κυκλική. Μετά από αρκετές περιστροφές τα σωματίδια φτάνουν στην περίμετρο του κύκλοτρου και στη συνέχεια βγαίνουν από αυτό, κινούμενα με μεγάλη ταχύτητα προς το στόχο.



Σχήμα 2

Επιταχύνουμε πρωτόνια μέσω ενός κύκλοτρου με την τάση μεταξύ των σημείων Α και Γ να μεταβάλλεται σε συνάρτηση με το χρόνο όπως φαίνεται στο σχήμα 2 και την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο διάκενο να έχει τιμή μέτρου $E=2\cdot10^7 V/m$. Θεωρήστε ότι τα πρωτόνια εξέρχονται από το σημείο Α με μηδενική ταχύτητα.

Να βρείτε:

i) Την ένταση του μαγνητικού πεδίου.

ii) Την ακτίνα της κυκλικής τροχιάς την πρώτη φορά που το φορτίο θα εισέλθει στο μαγνητικό πεδίο.

iii) Το μήκος διαδρομής της πρώτης σπείρας που θα εκτελέσει το φορτίο μεταξύ των δύο πρώτων διαδοχικών διελεύσεων από το διάκενο.

iv) Τη μεταβολή της στροφορμής του πρωτονίου, μεταξύ της στιγμής που εξέρχεται από το ηλεκτρόδιο D_2 και εισέρχεται στο ηλεκτρικό πεδίο και τη στιγμή που

εισέρχεται στο ηλεκτρικό πεδίο εξερχόμενο από το ηλεκτρόδιο D_1 για πρώτη φορά, περί άξονα που διέρχεται από το σημείο Α έναρξης της κίνησής του,

v) Να βρείτε την ταχύτητα του φορτίου ύστερα από δέκα διελεύσεις από το διάκενο. Κατόπιν να βρείτε την τιμή της τάσης ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου που θα επιτάχυνε το πρωτόνιο σε γραμμικό επιταχυντή σωματιδίων, δηλαδή πάνω σε μια ευθύγραμμη τροχιά και θα αποκτούσε το ίδιο μέτρο ταχύτητας.

Μπορείτε να βρείτε ένα πλεονέκτημα του κύκλοτρου σε σχέση με αυτό του γραμμικού επιταχυντή;

Δίνεται το στοιχειώδες ηλεκτρικό φορτίο του πρωτονίου $q=1,6\cdot10^{-19}C$ και η μάζα του $m=1,6\cdot10^{-27}Kg$.

Απάντηση

i)

Επειδή η συχνότητα της εναλλασσόμενης τάσης είναι ίση με την συχνότητα της περιστροφής του σωματιδίου από το διάγραμμα του σχήματος 2 θα ισχύει:

$$\frac{T}{2} = 1,25\pi\cdot10^{-8}s \rightarrow T = 2,5\pi\cdot10^{-8}s$$

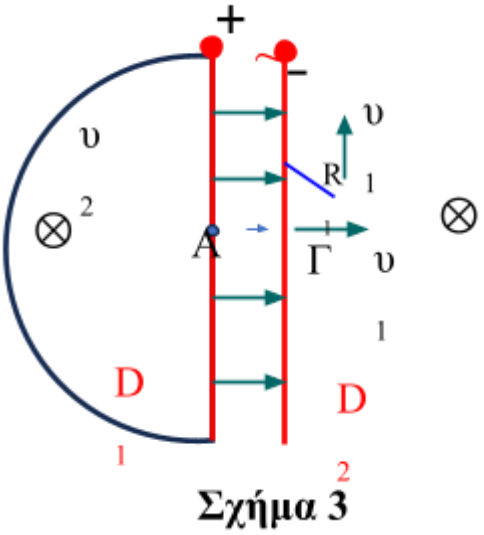
$$T = \frac{2\pi\cdot m}{q\cdot B} \rightarrow B = \frac{2\pi\cdot m}{q\cdot T} \rightarrow B = \frac{2\pi\cdot1,6\cdot10^{-27}}{1,6\cdot10^{-19}\cdot2,5\pi\cdot10^{-8}} \rightarrow B = 0,8T$$

ii)

Αρχικά το πρωτόνιο θα κινηθεί προς το ηλεκτρόδιο D_2 καθώς σύμφωνα με το σχήμα 2 η πολικότητα μεταξύ των Α και Γ θα είναι όπως φαίνεται στο σχήμα 3.

Στην πρώτη διέλευση από ΘΜΚΕ

$K_1 - 0 = WF_{ηλ} \rightarrow K_1 = qV \rightarrow$



Σχήμα 3

$$\frac{1}{2}m\cdot\upsilon_1^2 = q\cdot V \rightarrow \upsilon_1 = \sqrt{\frac{2\cdot q\cdot V}{m}} = \sqrt{\frac{2\cdot1,6\cdot10^{-19}\cdot10^5}{1,6\cdot10^{-27}}} \rightarrow$$

$$\upsilon_1 = \sqrt{2\cdot10^{13}} = 2\sqrt{5}\cdot10^6 m/s$$

$$R_1 = \frac{m\cdot\upsilon_1}{q\cdot B} = \frac{1{,}6\cdot10^{-27}\cdot2\sqrt{5}\cdot10^{6}}{1{,}6\cdot10^{-19}\cdot0.8}\, m\rightarrow$$

$$R_1 = 2,5\sqrt{5}\cdot10^{-2}\, m$$

iii)

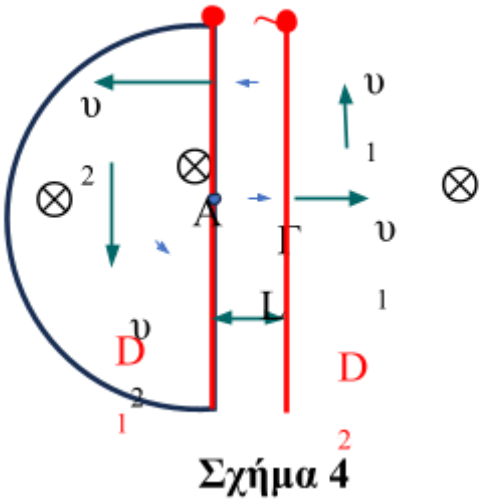
Η απόσταση των ηλεκτροδίων D θα ισούται με $L=V/E = 10^5/2\cdot10^7 = 5\cdot10^{-3}$m.

Το μήκος της διαδρομής θα ισούται με $S=2L+\pi R_1+\pi R_2$

Στη δεύτερη διέλευση από ΘΜΚΕ

$$K_2 - K_1 = WF_{\eta\lambda} \rightarrow K_2 = 2qV$$

$$\frac{1}{2}m\cdot\upsilon_2^2 = 2\cdot q\cdot V \rightarrow \upsilon_2 = \sqrt{\frac{2\cdot2\cdot q\cdot V}{m}} \rightarrow$$



Σχήμα 4

$$\upsilon_2 = \sqrt{\frac{4\cdot1{,}6\cdot10^{-19}\cdot10^{5}}{1{,}6\cdot10^{-27}}} \rightarrow \upsilon_2 = 2\sqrt{10^{13}} = 2\sqrt{10}\cdot10^{6} m/s$$

Η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς

$$R_2 = \frac{m\cdot\upsilon_2}{q\cdot B} = \frac{1{,}6\cdot10^{-27}\cdot2\sqrt{10}\cdot10^{6}}{1{,}6\cdot10^{-19}\cdot0.8}\, m = 2,5\sqrt{10}\cdot10^{-2}\, m$$

Έτσι $S=2L+\pi R_1+\pi R_2 = 2\cdot5\cdot10^{-3}+\pi\cdot2,5\sqrt{5}\cdot10^{-2}+\pi\cdot2,5\sqrt{10}\cdot10^{-2}$

$S=10^{-2}(1+2,5\pi\sqrt{5}+2,5\pi\sqrt{10})$m

iv) Η μεταβολή της στροφορμής περί το σημείο Α με θετική φορά από τη σελίδα προς τον αναγνώστη, Θ είναι

$$\Delta\vec{L} = \vec{L}_2 - \vec{L}_1 \rightarrow \Delta L = m\upsilon_2\left(2R_2 - 2R_1\right) - m\upsilon_1 2R_1$$

$\Delta L = 1{,}6\cdot10^{-27}\cdot2\sqrt{10}\cdot10^{6}(2\cdot2,5\sqrt{10}\cdot10^{-2} - 2\cdot2,5\sqrt{5}\cdot10^{-2})$ -

$1{,}6\cdot10^{-27}\cdot2\sqrt{5}\cdot10^{6}\cdot2\cdot2,5\sqrt{5}\cdot10^{-2} = 16\cdot\sqrt{10}\cdot10^{-23}(\sqrt{10}-\sqrt{5}) - 80\cdot10^{-23}$

$= 160\cdot10^{-23} - 16\cdot\sqrt{50}\cdot10^{-23} + 80\cdot10^{-23} = 80\cdot10^{-23} - 80\sqrt{2}\cdot10^{-23} \rightarrow$

$\Delta L = -80\cdot10^{-23}(\sqrt{2} - 1)$ kg·m²/s

Και φορά από τον αναγνώστη προς τη σελίδα.

ν)

Μέσα στο ηλεκτρικό πεδίο το φορτίο κερδίζει από κάθε διέλευση ενέργεια ίση με $\Delta E=q\cdot V$.

Στην πρώτη διέλευση από ΘΜΚΕ

$$K_1 - 0=WF_{\eta\lambda}\rightarrow K_1= qV$$

Στη δεύτερη διέλευση από ΘΜΚΕ

$$K_2 - K_1=WF_{\eta\lambda}\rightarrow K_2= 2qV$$

Γενικεύοντας μετά από Ν διελεύσεις

$$K_N= N\cdot qV \quad (1)$$

$$\frac{1}{2}m\cdot\upsilon_N^2 = N\cdot q\cdot V \rightarrow \upsilon_N = \sqrt{\frac{2\cdot N\cdot q\cdot V}{m}} \quad (2)$$

$$\upsilon_N = \sqrt{\frac{2\cdot N\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 10^5}{1{,}6\cdot 10^{-27}}} \rightarrow \upsilon_N = \sqrt{2\cdot N\cdot 10^{13}} \quad (3)$$

Για Ν=10

$$\upsilon_{10} = \sqrt{2}\cdot 10^7 m/s$$

Αν επιταχυνόταν σε γραμμικό επιταχυντή από ΘΜΚΕ προκύπτει

$$K - 0=WF_{\eta\lambda}\rightarrow K= qV'$$

$$\frac{1}{2}m\cdot\upsilon_{10}^2 = q\cdot V'\rightarrow \frac{1}{2}1{,}6\cdot 10^{-27}\cdot\left(\sqrt{2}\cdot 10^7\right)^2 = 1{,}6\cdot 10^{-19}V' \rightarrow$$

$$10^{-13} = 10^{-19}V' \rightarrow V' = 10^6 V=1\text{MV}$$

Η διάταξη του κύκλοτρου είναι σε θέση να επαναχρησιμοποιεί το ίδιο ηλεκτρικό πεδίο ξανά και ξανά, αντί να δημιουργεί ένα ενιαίο πολύ ισχυρό ηλεκτρικό πεδίο μειώνοντας έτσι την απαιτούμενη ηλεκτρική τάση στον επιταχυντή.
Στο παραπάνω παράδειγμα, το σωματίδιο μπορεί να περάσει από το ηλεκτρικό πεδίο των 100kV 10 φορές και αυτό ισοδυναμεί με **μία** διέλευση από ομογενές ηλεκτρικό πεδίο έντασης 1 MV.