

Pour être validées, les applications numériques devront être suivies de leurs unités.

Si l'étudiant repère ce qui lui semble être une erreur, il le précise sur sa copie, apporte sa correction et poursuit la résolution.

Objectifs Rédaction soignée, calcul rigoureux, justifications précises.

Calculatrice obligatoire

Marge d'environ 4 cm à droite + entête de taille suffisante.

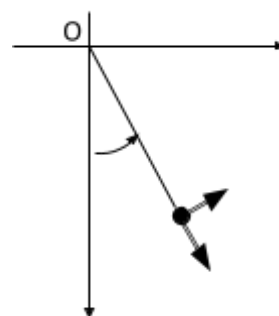
Exercice Pendule pesant simple

Considérons le pendule pesant sans frottement ci-contre.

Une masse ponctuelle (M, m) est accrochée à l'extrémité d'un fil de longueur $OM = L$, sans masse et indéformable.

Déterminer l'équation différentielle qui régit l'évolution dans le temps de la masse ponctuelle (M, m) par :

1. La loi de la quantité de mouvement.
2. La loi de l'énergie cinétique.
3. La loi du moment cinétique.



Problème 1 : Autour de la silice

*Le silicium est, après l'oxygène, l'élément le plus abondant de la planète. Il représente, en masse, 27% de la lithosphère. La **silice** est de l'oxyde de silicium SiO_2 . Le **quartz** dont les propriétés sont très intéressantes pour réaliser des horloges électroniques est une forme cristalline de silice. C'est à partir du sable que l'on fabrique le **verre**, forme amorphe de la silice. À travers ces problèmes, nous allons passer en revue quelques propriétés physiques de la silice sous ses différentes formes.*

N.B. Aucune connaissance sur les quartz et la piézo-électricité n'est requise pour traiter ce problème dans lequel les candidats sont guidés par de nombreuses questions indépendantes et progressives.

Le quartz est une forme particulière de cristal de silice. Il présente des propriétés physiques très intéressantes : la piézo-électricité. Quand on comprime un morceau de quartz dans une direction particulière, une tension apparaît aux bornes du cristal (c'est l'effet piézo-électrique). Réciproquement, quand on applique une tension aux bornes d'un quartz, ce dernier se déforme proportionnellement à la tension appliquée (c'est l'effet piézo-électrique inverse). Ainsi, le quartz est très intéressant pour l'électronique car on parvient à réaliser des circuits oscillants, à base de résonateur à quartz, très stables dans le temps. Actuellement, le quartz est remplacé par certaines céramiques piézo-électriques.

A) MODÉLISATION D'UN RÉSONATEUR À QUARTZ

A-1) MODÈLES MÉCANIQUE ET ÉLECTRIQUE DU RÉSONATEUR À QUARTZ

Un cristal de quartz est taillé sous forme de pastille cylindrique mince. La base circulaire présente un diamètre ($D = 1\text{ cm}$) et l'épaisseur de la pastille est ($e = 0,2\text{ mm}$). Des électrodes métalliques (en or généralement) sont déposées sur chacune des faces circulaires du quartz (on suppose que ces faces sont totalement métallisées) (figure 1). On parle d'électrodes de connexion. On a ainsi réalisé un condensateur plan.

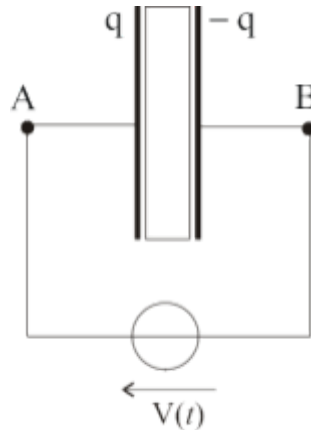


Figure 1 : schéma d'un quartz alimenté par une tension $V(t)$

D'un point de vue mécanique, lorsque l'on soumet le disque piézo-électrique à une tension sinusoïdale $V(t) = V \cdot \cos(\omega t)$, il va être, dans le cadre d'une approximation linéaire, le siège d'une vibration mécanique sinusoïdale sous l'effet d'une force extérieure proportionnelle à cette tension.

Modélisation proposée :

un élément de masse m du corps piézo-électrique, placé à une distance (x) de son point de repos, est soumis aux forces suivantes, toutes orientées selon un axe (Ox) que l'on ne précise pas ici:

- une force de rappel type élastique ($-k \cdot x$) avec ($k > 0$) qui a pour origine la rigidité du matériau,
- des frottements supposés proportionnels à la vitesse et de la forme $\left(-h \frac{dx}{dt}\right)$ avec ($h > 0$)
- une force due à l'effet piézo-électrique ($+\beta \cdot V(t)$) avec ($\beta > 0$), $V(t)$ étant la tension !
- le poids est négligé.

A-1-a) En appliquant le principe fondamental de la dynamique au petit élément de masse m dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen, établir l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$ en supposant que le mouvement se fasse selon l'axe (Ox).

D'un point de vue électrique, la charge totale (q) apparaissant sur les électrodes planes a deux origines :

- les deux faces planes du disque forment un condensateur de capacité C_p , d'où une charge $q_1(t)$,
- l'effet piézo-électrique provoque l'apparition d'une charge q_2 proportionnelle à $x(t)$:

$$q_2(t) = \gamma \cdot x(t)$$

A-1-b) On montre que la capacité d'un condensateur plan vaut $C_p = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{e}$ où S est la surface d'une électrode, (e) l'épaisseur du condensateur, (ϵ_0) la permittivité du vide ($\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} SI$) et ϵ_r une constante valant pour le quartz ($\epsilon_r = 2,3 SI$).

- Estimer alors la capacité C_p appelée capacité de connexion.
- Quelle est la relation entre la charge q_1 , la capacité C_p et la tension $V(t)$?

A-1-c) En reprenant l'équation différentielle obtenue pour $x(t)$, écrire l'équation différentielle vérifiée par la charge $q_2(t)$.

A-1-d) Considérons le circuit représenté sur la figure 2 ci-dessous.

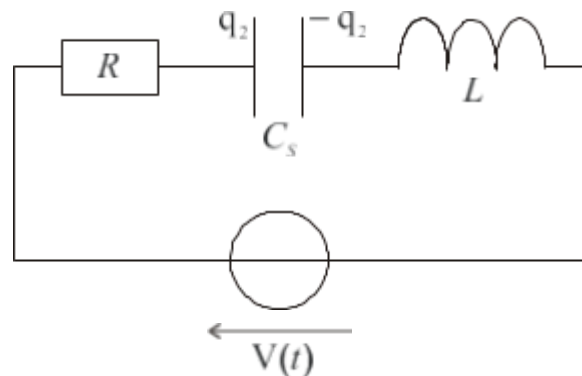


Figure 2 : circuit R, L, C_s série

Montrer que la charge $q_2(t)$ est équivalente à la charge d'un condensateur de capacité C_s dans le circuit série R, L, C_s dont la tension aux bornes est $V(t)$. On donnera alors les expressions de R, L et C_s en fonction de m, h, β, γ et k .

A-2) ETUDE DE L'IMPÉDANCE ÉQUIVALENTE DU QUARTZ

Dans cette partie, **on néglige la résistance R** du quartz. Le schéma électrique simplifié est alors donné sur la figure 3.

Pour les applications numériques, on prendra $L = 500 \text{ mH}$, $C_s = 0,08 \text{ pF}$ et $C_p = 8 \text{ pF}$.

On rappelle que $1 \text{ pF} = 10^{-12} \text{ F}$.

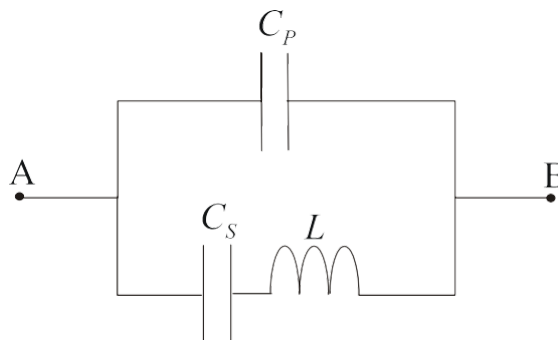


Figure 3 : modèle électrique d'un quartz

On se placera toujours en régime sinusoïdal forcé (les grandeurs dépendront de la pulsation ω).

A-2-a) Calculer alors l'impédance complexe du quartz, vue entre les bornes A et B. On l'écrira sous la forme

$$\underline{Z}_{AB} = \left(-\frac{j}{\alpha \omega} \right) \frac{1 - \frac{\omega_r^2}{\omega^2}}{1 - \frac{\omega_a^2}{\omega^2}}$$

où j est le nombre imaginaire pur tel que $j^2 = -1$

On donnera, en fonction de L , C_p et C_s les expressions de α , ω_r^2 , et ω_a^2 .

Montrer aussi que $\omega_a^2 > \omega_r^2$.

On pourra admettre les résultats de cette question pour poursuivre la résolution du problème.

A-2-b) Donner les valeurs numériques des fréquences f_a et f_r correspondant respectivement aux pulsations ω_a et ω_r .

A-2-c) Étudier le comportement inductif ou capacitif du quartz en fonction de la fréquence.

On rappelle qu'un dipôle a un comportement inductif (respectivement capacitif) si la partie imaginaire de son impédance est positive (respectivement négative).

A-2-d) Tracer l'allure de $Z_{AB} = \|\underline{Z}_{AB}\|$ en fonction de la fréquence.

A-3) ÉTUDE EXPÉRIMENTALE DE LA RÉSONANCE D'UN QUARTZ

On veut tracer expérimentalement la courbe donnant l'impédance du quartz en fonction de la fréquence d'excitation. On dispose d'un générateur basses fréquences pouvant délivrer une tension sinusoïdale d'amplitude réglable. Le GBF possède une résistance interne R_g . On dispose d'une résistance R_v variable, d'un quartz et d'un oscilloscope.

Dans cette question, on néglige toujours la résistance du quartz sauf dans la question A-3-c.

On réalise alors le montage de la figure 4 suivante.

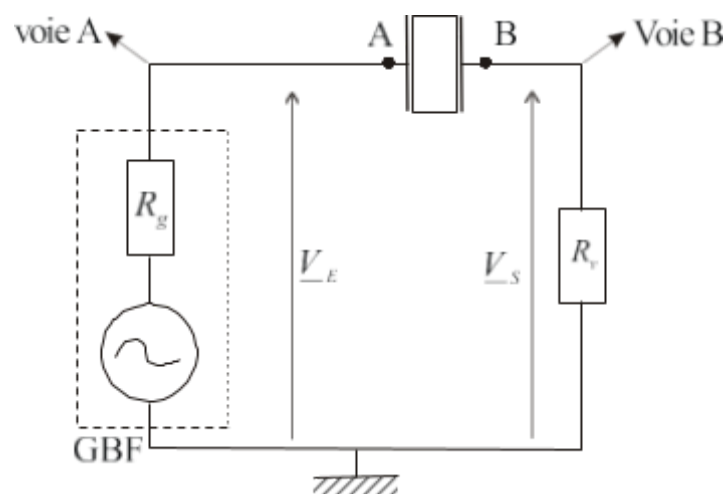


Figure 4 : montage expérimental pour l'étude de la résonance du quartz

A-3-a) Calculer le rapport de la tension de sortie $\underline{V}_S$ à celle d'entrée $\underline{V}_E$ en fonction de R_v et de $\underline{Z}_{AB}$.

$$\underline{H} = \frac{\underline{V}_S}{\underline{V}_E}$$

A-3-b) On choisit, pour chaque fréquence, la résistance R_v de telle façon que $\|H\| = \frac{1}{2}$

Que vaut alors le module de l'impédance du quartz en fonction de R_v ?

A-3-c) Autour du pic de résonance d'intensité situé vers $f_0 = 796 \text{ kHz}$, on mesure une bande passante Δf de 50 Hz . Quelle est la valeur numérique du facteur de qualité Q du quartz défini comme le rapport de la largeur de la bande passante à la fréquence de résonance ? Commenter cette valeur. En supposant que le facteur de qualité soit donné par la relation

$$Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{f_0}{\Delta f}$$

ω_0 étant la pulsation de résonance, estimer la valeur de la résistance R du quartz.

B) PRINCIPE D'UNE MONTRE À QUARTZ

Une horloge est composée d'un oscillateur plus ou moins stable dans le temps et d'un système de comptage des oscillations. Le quartz utilisé présente une fréquence de résonance de 32768 Hz . Cela signifie que 32768 fois par seconde une impulsion électrique est émise par le circuit oscillant. Un dispositif électrique doit compter les impulsions. Ces compteurs fonctionnent dans la technologie binaire (suite de 0 et de 1). Une impulsion électrique correspond à la valeur 1. La valeur 0 correspond à aucun signal électrique.

B-1) Compteur modulo 2

Un tel compteur délivre une impulsion de sortie dès qu'il a compté 2 impulsions à son entrée. Si en entrée d'un tel compteur on envoie le signal à 32768 Hz délivré par le circuit à quartz, quelle est la fréquence du signal de sortie du compteur modulo 2 ?

B-2) Succession de compteurs modulo 2

Écrire le nombre 32768 sous la forme 2^k où k est un entier naturel.

Combien de compteurs modulo 2 faut-il alors mettre en cascade pour commander le chiffre des secondes ?

Fin problème 1

Correction Autour de la silice**28 pts****A-1-a)**Par application de la loi de la quantité de mouvement à la masse m dans un référentiel galiléen **2 pts**

$$m \ddot{x} = -kx - h \frac{d}{dt}x + \beta \cdot V(t)$$

D'où l'équation différentielle cherchée

$$m \ddot{x} + kx + h \frac{d}{dt}x = \beta \cdot V(t)$$

A-1-b)

Avec la formule proposée $C_p = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{e}$ en prenant $S = \pi \frac{D^2}{4} = \pi \frac{(10^{-2})^2}{4} \approx 7,8 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$
 et $e = 0,2 \text{ mm}$

on obtient $C_p = \frac{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 2,3 \cdot 7,8 \cdot 10^{-5}}{2 \cdot 10^{-4}} \quad C_p \approx 8 \cdot 10^{-12} \text{ F} = 8 \text{ pF}$ **1 pt**

On en déduit $q_1(t) = C_p \cdot V(t)$ **1 pt**

A-1-c)à partir de l'équation différentielle obtenue en A1A et en utilisant $x(t) = \frac{q_2(t)}{\gamma}$ il vient **2 pts**

$$\frac{m}{\gamma} \frac{d^2}{dx^2} q_2 + \frac{k}{\gamma} q_2 + \frac{h}{\gamma} \frac{d}{dt} q_2 = \beta \cdot V(t)$$

ou

$$\frac{d^2}{dx^2} q_2 + \frac{h}{m} \frac{d}{dt} q_2 + \frac{k}{m} q_2 = \frac{\beta \gamma}{m} \cdot V(t)$$

A-1-d)établissons l'équation différentielle du circuit en $q_2(t)$ grâce aux lois de Kirchhoff

$$V(t) = R C_s \frac{d}{dt} q_2 + \frac{1}{C_s} q_2 + L C_s \frac{d^2}{dt^2} q_2$$

Par identification avec l'équation obtenue à la question A1c

$$L \frac{d^2}{dt^2} q_2 + R \frac{d}{dt} q_2 + \frac{1}{C_s} q_2 = V(t) \frac{d^2}{dt^2} q_2 + \frac{R}{L} \frac{d}{dt} q_2 + \frac{1}{L C_s} q_2 = \frac{1}{L} V(t)$$

D'où

$$L = \frac{m}{\beta \gamma} \quad R = \frac{h}{\beta \gamma} \quad C_s = \frac{\beta \gamma}{k}$$

3 pts**A-2-a)**

Comme les 2 branches sont en parallèles

$$\frac{1}{Z_{AB}} = \frac{1}{Z_{Cp}} + \frac{1}{Z_{LCs}} = jC_p \omega + \frac{1}{jL\omega + \frac{1}{jC_s \omega}}$$

$$\frac{1}{Z_{AB}} = jC_p \omega + \frac{1}{jL\omega + \frac{1}{jC_s \omega}} = jC_p \omega + \frac{jC_s \omega}{1 - LC_s \omega^2} \frac{1}{Z_{AB}} = \frac{jC_p \omega (1 - LC_s \omega^2) + jC_s \omega}{1 - LC_s \omega^2} \frac{1}{Z_{AB}} = \frac{j(C_p + C_s) \omega + jC_p \omega (-LC_s \omega^2)}{1 - LC_s \omega^2} \frac{1}{Z_{AB}} = j(C_p +$$



grâce à $Z_{AB} = \left(-\frac{j}{\alpha \omega}\right) \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_r^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_a^2}}$ on obtient

$$\frac{1}{Z_{AB}} = (j\alpha \omega) \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_a^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_r^2}}$$

Par identification on obtient donc

$$\alpha = (C_p + C_s)$$

$$\omega_r^2 = \frac{1}{LC_s}$$

$$\omega_a^2 = \frac{C_p + C_s}{LC_s C_p}$$

3

pts

Puisque

$$\omega_a^2 = \frac{C_p + C_s}{LC_s C_p} = \frac{1}{L} \left(\frac{1}{C_s} + \frac{1}{C_p} \right) > \frac{1}{LC_s} = \omega_r^2$$

on en déduit que

$$\omega_a^2 > \omega_r^2$$

1 pt

A-2-b)

Puisque $\omega = 2\pi f$ on en déduit donc les fréquences

$$f_a = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{C_p + C_s}{LC_s C_p}} \approx 799\,744\text{ Hz} \quad \text{et} \quad f_r = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC_s}} \approx 795\,775\text{ Hz}$$

2

pts

Les 2 fréquences sont proches à moins de 5% d'écart !

A-2-c)

Le comportement capacitif ou inductif dépend donc du signe de la partie imaginaire de Z_{AB} et donc du

signe de $\left(-\frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_a^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_r^2}} \right)$

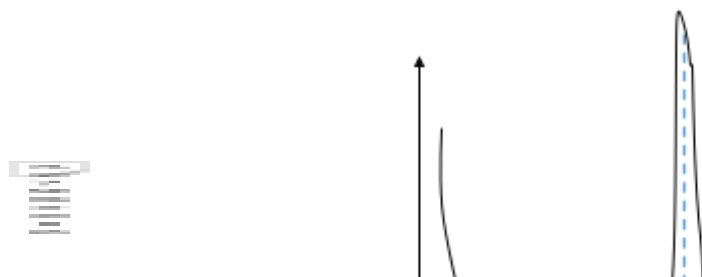
3 pts

ω	0	ω_r	ω_r	ω_a	ω_a	$+\infty$
$1 - \frac{\omega^2}{\omega_a^2}$		+		+		—
$1 - \frac{\omega^2}{\omega_r^2}$		+		—		—
$Im\left(Z_{AB}\right)$		—		+		—
comportement		capacitif		Inductif		capacitif

A-2-d)

à partir du tableau de signe ci-dessus, on en déduit

2 pts



A-3-a)

2

pts

$$\underline{H} = \frac{V_S}{V_E} = \frac{R_v}{R_v + Z_{AB}} = \frac{1}{1 + \frac{Z_{AB}}{R_v}}$$

A-3-b)

Pour avoir $\|\underline{H}\| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\|Z_{AB}\|}{R_v}\right)^2}} = \frac{1}{2}$ il faut avoir $1 + \left(\frac{\|Z_{AB}\|}{R_v}\right)^2 = 4$

soit $\|Z_{AB}\| = R_v \cdot \sqrt{3}$

2

pts

A-3-c)

Compte tenu de la définition du facteur de qualité, on obtient $Q = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{796 \cdot 10^3}{50} = 15920$

Avec des circuits classiques, on n'atteindrait pas un tel facteur de qualité !

Puisque $Q = \frac{L\omega_0}{R}$ on e déduit

2

pts

$$R = \frac{L\omega_0}{Q} = \frac{0,5 \cdot 2\pi \cdot 796 \cdot 10^3}{15920} = 157 \, \Omega$$

B-1)

il suffit de diviser par 2 la fréquence d'entrée. La fréquence du signal de sortie vaudra donc

1 pt

$$f_s = 16384 \, \text{Hz}$$

B-2)

$$32728 = 2^{15}$$

Il faudra donc 15 *compteur modulo 2* pour commander la fréquence de 1 Hz.

1 pt

