

Конструкції та зважування

Теоретичні відомості

Серед олімпіадних задач певне місце займають задачі на зважування: за допомогою терезів без шальок пропонується за певну кількість зважувань виявити один з предметів, що відрізняється від інших лише вагою. Найпростіші з таких задач ті, в яких відомо, чи важчий шуканий предмет від інших, чи ні. Крім того, цей предмет – один серед інших. Загальний спосіб розв'язування таких задач полягає в тому, що задану множину предметів ділять на три рівні частини. В тому випадку, коли її націло поділити не можна, дві частини роблять рівними, а третю – близькою до кожної з них. При такому поділі за одне зважування виділяється частина, що містить шуканий предмет. Далі процес повторюється, аж поки виділена третина складатиметься з одного предмета. Якщо ми маємо c предметів, то легший (важчий) з них виділяється за n зважувань, де $3n - 1 < c \leq 3n$. Пояснювати учням такі задачі треба починати з найпростішого випадку (три предмети).



Приклади задач на зважування з розв'язанням

Приклад № 1. Серед трьох монет одна фальшива (легша від двох інших однакових за вагою). За допомогою одного зважування на терезах без гир виділити фальшиву монету.

Розв'язання.

Покладемо на кожен шальку терезів по одній монеті, а третю відкладемо в сторону. Якщо шальки перебувають у рівновазі, то відкладена монета і є фальшивою. У протилежному випадку терези покажуть легшу, тобто фальшиву монету.

Приклад № 2. Є 8 монет. Одна з них фальшива і легша за справжню монету. Визначить за 3 зважування яка з монет фальшива.

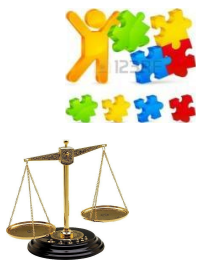
Розв'язання.

Ділимо монети на дві рівні купки – по 4 монети в кожній. Зважуємо. Ту купку, яка легша, знову ділимо на дві однакові купки – тепер по дві монети в кожній. Зважуємо. Визначаємо, яка з них легша. Кладемо на чаші вагів по 1 монеті з цієї купки. Фальшива та, яка легша.

Приклад № 3. У Буратіно є 27 золотих монет. Але відомо, що Кіт Базиліо замінив одну монету на фальшиву, і вона по вазі важча від справжніх. Як за три зважування на чашкових вагах без гир Буратіно знайти фальшиву монету?

Розв'язання.

Розділимо монети на 3 купки по 9 монет. Покладемо на чаші вагів першу і другу купки; в результаті цього зважування ми точно дізнаємось, в якій з купок знаходиться фальшивка (якщо ваги покажуть рівність, то вона - в третій купці). Тепер, аналогічно, розділимо вибрану купку на три частини по три монети, покладемо на ваги дві з цих частин і визначимо, в якій з частин знаходиться фальшива монета. Нарешті, залишається з трьох монет визначити важчу: кладемо



Конструкції та зважування

на чаші вагів по 1 монеті - фальшивою є важча; якщо ж на вагах рівність, то фальшивою є третя монета з частини.

Приклад № 4. Серед 101 однакових за виглядом монет одна фальшива, така, що відрізняється за вагою. Як за допомогою чашкових вагів без гир за два зважування визначити, легшою або важчою є фальшива монета? Знаходити її не потрібно.

Розв'язання.

Зважуємо 50 і 50 монет, можуть бути два випадки.

1 випадок. Монети мають однакову вагу. Беремо монету, що залишилася, і ставимо її в ліву купку замість однієї з тих, що є там:

- а) ліва купка важча $\Rightarrow$ фальшива монета важча;
- б) ліва купка легша $\Rightarrow$ фальшива монета легша.

2 випадок. Монети мають різну вагу. Беремо важчу купку і розбиваємо її на дві купки по 25 монет:

- а) вага купок однакова $\Rightarrow$ фальшива монета легша;
- б) вага купок неоднакова $\Rightarrow$ фальшива монета важча.

Приклад № 5. Є 101 монета. Серед них 50 фальшивих. Кожна фальшива монета відрізняється від справжньої на 1 грам. Обираємо одну монету. За допомогою одного зважування на терезах зі стрілкою (показує різницю мас на чашах) визначити, чи є монета фальшивою чи справжньою.

Розв'язання.

Для визначення справжності обраної монети покладемо решту 100 монет на кожну чашу терезів по 50 монет і знайдемо різницю їх мас. Якщо вибрана монета справжня, то серед 100 монет, які залишились, 50 фальшивих і 50 справжніх. Якщо на одній чаші a фальшивих монет, то на ній $50 - a$ справжніх, а на другій чаші a справжніх і $50 - a$ фальшивих. Тому різниця мас на цих чашах дорівнює $50 - a - a = 50 - 2a$ грамів, тобто є парним числом. Якщо ж вибрана фальшива монета, а на першій чаші k фальшивих монет, то вказана різниця дорівнює $49 - 2k$ грамів, тобто виражається непарним числом. Отже, непарне показання стрілки вказує на фальшивість вибраної монети, а парність – на справжність.

Приклади задач на конструкції з розв'язанням

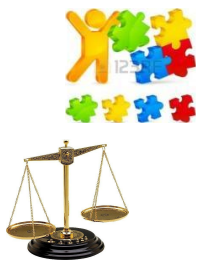
Приклад № 6. За один хід число, записане на дошці, дозволяється або замінити на подвоєне, або стерти в нього останню цифру. Спочатку на дошці було записане число 458. Чи можна за декілька ходів дістати число 14?

Розв'язання.

Так. $458 \rightarrow 45 \rightarrow 90 \rightarrow 9 \rightarrow 18 \rightarrow 36 \rightarrow 72 \rightarrow 7 \rightarrow 14$.

Приклад № 7. Маємо два пісочні годинники: на 7 хвилин і на 11 хвилин, яйце вариться 15 хвилин. Як відміряти цей час за допомогою годинників?

Розв'язання.



Конструкції та зважування

Поставити два годинники одночасно. Через 7 хвилин починати варити яйце. У другому годиннику пісок, ще буде сипатися 4 хвилини. Після цього перевернути другий годинник і виміряти ще 11 хвилин.

Задачі до даної теми

1¹. Вовк запросив до себе в гості трьох поросят і Червону Шапочку дивитися мультики. Після перегляду Вовк перерахував кекси на кухні і заявив, що двох не вистачає. Як Вовку за два зважування визначити, хто з'їв кекси? Всі кекси важать однаково, всі поросята (принаймні, коли вони тільки прийшли в гості) - теж. Також відомо, що Червона Шапочка на діті, тому могла з'їсти не більше 1 кексу.

2¹. Лікар повинен оглянути трьох хворих з різними інфекційними хворобами. Як це зробити, якщо він має тільки дві пари гумових рукавичок?

3¹. Складіть із цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 три тризначних числа так, щоб сума двох чисел дорівнювала третьому і при цьому в одного із цих чисел цифра десятків дорівнювала б 8 (кожну цифру треба використовувати один раз).

4¹. Треба поділити порівну 7 яблук між 12 чоловіками, розрізуючи кожне яблуко не більше ніж на 5 частин. Як це зробити?

5¹. Є 10 монет. Одна з них фальшива і легша за справжню монету. Як, за допомогою чашкових вагів без гир, визначити яка з монет фальшива?

6¹. У кабінет математики прийшли Василько, Петрик, Наталка та Надійка. Для консультації Петрику потрібно 8 хв., Наталці – 10 хв., Василькові – 4 хв., а Надійці – 5 хв. Вчитель може проконсультувати двох учнів одночасно. Як організувати роботу, щоб кабінет був зайнятий якомога менше часу?

7¹. Чи існують два послідовні натуральні числа такі, що сума цифр кожного з них ділиться на 7?

1². У продавця є шалькові терези і необмежена кількість п'яти і семиграмових гир. Чи можна з їх допомогою за один раз точно зважити n грамів товару, де n – довільне натуральне число?

2². Дано мішок цукрового піску, шалькові терези і важок в 1 г. Як найшвидше можна відважити покупцю 1 кг цукру?

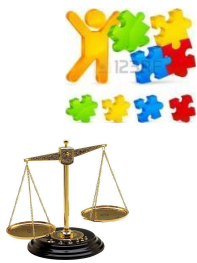
3². Чи можна розрізати квадрат розміром 6×6 на прямокутники розміром 1×4 ?

4². На столі лежить десять пронумерованих капелюхів. У кожному капелюсі лежить по десять золотих монет. В одному з капелюхів фальшиві монети. Справжня монета важить 10 грамів, а підроблена тільки 9. У допомогу надані ваги зі шкалою в грамах. Як визначити в якому з капелюхів знаходяться фальшиві монети, використовуючи ваги тільки для одного зважування? Ваги можуть зважувати не більше 750 грам.

5². Є лінійка довжиною 13 см без поділок. Яку найменшу кількість поділок потрібно нанести на лінійку, щоб за допомогою неї можна було відкласти відрізки довжиною 1 см, 2 см, 3 см, ..., 13 см, приклавши лінійку лише один раз (у кожному випадку)?

6². У клітинки квадрата 3×3 запишіть різні натуральні числа так, щоб шість добутоків (по рядках і стовпчиках) були рівні між собою.

7². Є 9 монет, одна з них фальшива (легша від справжньої). За два зважування на шалькових терезах без гир знайдіть фальшиву монету.



Конструкції та зважування

- 1³. Вантаж масою 13,5 т вкладений в декілька невагомих ящиків. Маса кожного ящика з вантажем не перевищує 350 кг. Довести, що цей вантаж можна перевести на 11 півторатонках.
- 2³. Чи можна розрізати квадрат на 6 менших квадратів? На 10 менших квадратів? На 13? (Квадрати не обов'язково рівні між собою).
- 3³. Маємо прямокутну пластину масою 10 г. Яким чином можна розрізати її на три частини з цілим числом грамів кожна так, щоб з їх допомогою можна було, використавши терези без важків, визначити масу будь-якого предмета в 1, 2, 3, ..., 10 грамів?
- 1⁴. Маємо 81 гирю масами 12, 22, 32, ..., 812 грам. Розкласти їх на три рівні за масою купки.
- 2⁴. Маємо декілька мішків з монетами, в одному з яких всі монети фальшиві, а в решті – справжні. Фальшива монета на 1 г легша справжньої. Яким найменшим числом зважувань на пружинних терезах можна знайти фальшиві монети, якщо в кожному мішку монет достатньо багато?
- 3⁴. Є n предметів з масою від 1 до n г. Також є терези, на ліву шальку яких дозволяється класти будь-який предмет та довільну комбінацію гирьок, а на праву – тільки довільну комбінацію гирьок. В результаті зважування терези знаходяться або у рівновазі, або одна із шальок важча за іншу. Знайти найменшу кількість гирьок, яка потрібна для визначення ваги всіх предметів.

Список рекомендованої літератури до підготовки з даної теми:

1. Рубльов Б.В. Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2009-2010: навч.-метод. посіб. / Анікушин А.В., Арман А.Р., Данилова А.Є. та інш. – Харків: Гімназія, 2011. 320 с.: іл.
2. Готуємось до олімпіади з математики / [упоряди. Веліховська А.Б., Гримайло О.В.]. – Харків: Основа, 2007. – 160 с. – (Б-ка журналу «Математика в школах України»; Вип. 2(50)).
3. Конет І.М. Обласні олімпіади з математики / Конет І.М., Радченко В.М., Теплінський Ю.В. – Кам'янець-Подільський: Абетка, 2010. – 388 с.
4. Ясінський В.А. Практикум з розв'язування задач математичних олімпіад.- Харків: Основа, 2006. – 128 с. – (Б-ка журн. «Математика в школах України»; Вип.3 (39)) .
5. Прокопенко В.І., Прокопенко Ю.В. Конструкції та зважування. – [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://2496730.blogspot.com> .