

Epreuve de Physique 2

durée 4 heures

Le problème se décompose en trois parties, notées I, II et III. Les deux premières parties sont totalement indépendantes; la troisième s'appuie sur la partie II et éclaire des aspects de la partie I.

Preliminaires

a) Le problème fait appel à l'équation différentielle dite de « Bessel » :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right) y = 0 \quad \text{avec } m \text{ entier}$$

Les solutions de cette équation sont:

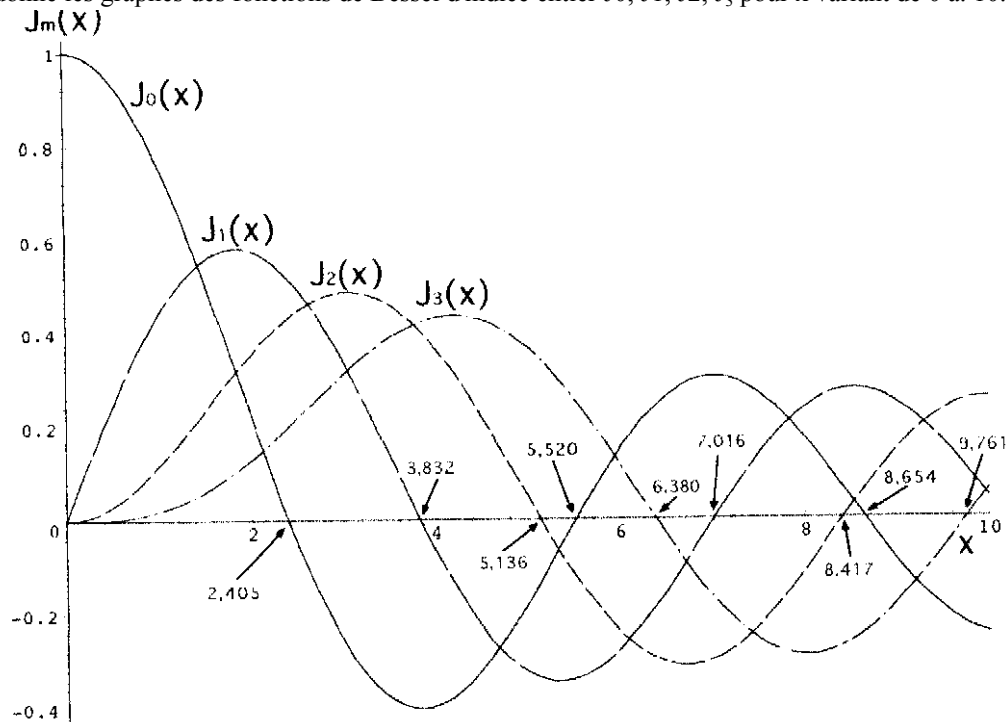
$$y(x) = C_1 J_m(x) + C_2 Y_m(x)$$

où C_1 et C_2 sont des constantes, J_m la fonction de Bessel de première espèce d'indice entier m , Y_m la fonction de Bessel de seconde espèce d'indice entier m .

Les formes asymptotiques de ces fonctions de Bessel sont, pour $x \ll 1$:

$$J_m(x) \rightarrow \frac{1}{m!} \left(\frac{x}{2}\right)^m, \quad Y_0(x) \rightarrow \frac{2}{\pi} \left(\ln \frac{x}{2} + 0,5772\dots\right), \quad Y_m(x) \rightarrow -\frac{(m-1)!}{\pi} \left(\frac{2}{x}\right)^m \quad \text{pour } m=1, 2, 3, \dots$$

La figure ci-dessous donne les graphes des fonctions de Bessel d'indice entier J_0, J_1, J_2, J_3 pour x variant de 0 à 10.



b) Chaque fonction de Bessel possède des zéros, que l'on numérote : 1, 2, 3... sachant que le zéro $x = 0$ est exclu. Ainsi, le premier zéro numéroté de J_1 est pour $x = 3,832$.

c) On donne le résultat suivant:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau e^{ix \sin(\omega t)} dt = J_0(x)$$

d) On donne l'expression du laplacien scalaire dans les systèmes de coordonnées suivants:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Coordonnées cartésiennes (x, y, z) :

Coordonnées cylindriques (r, θ, z) (Cf. figure I.2):

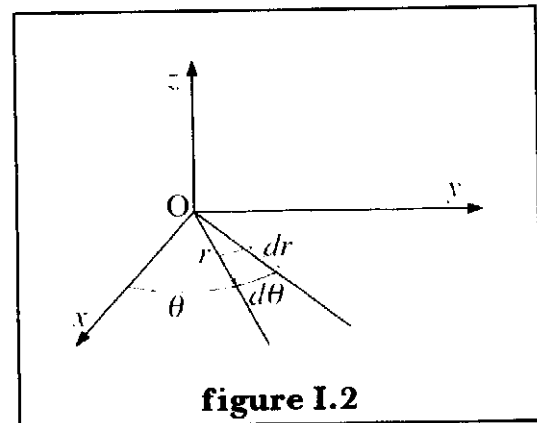
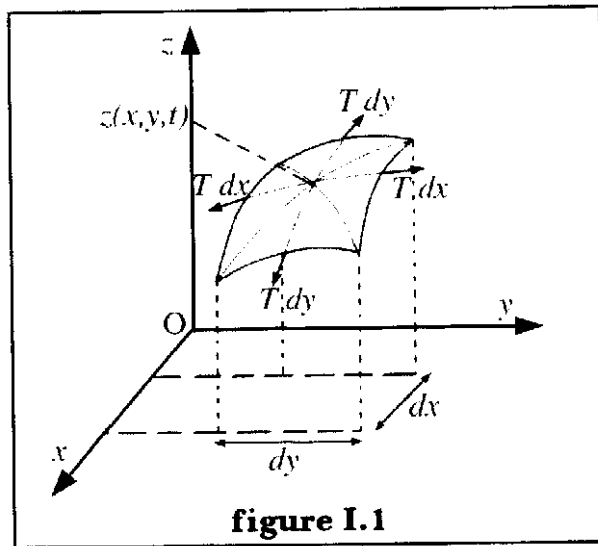
$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

I. Première partie : membranes vibrantes

On s'intéresse dans cette partie aux vibrations de membranes élastiques tendues, sans raideur.

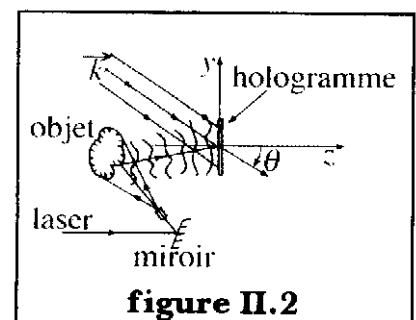
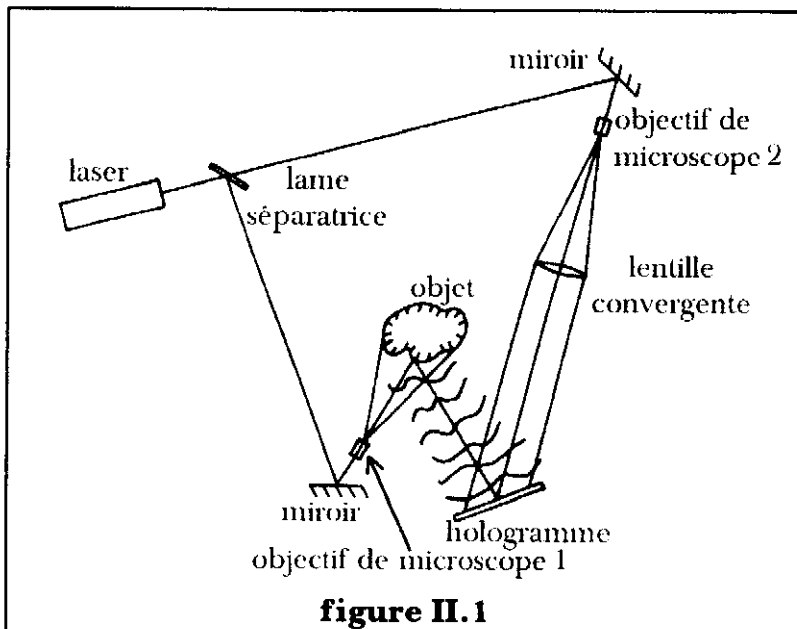
Définition: On définit la tension d'une membrane par analogie avec celle d'une corde. Si on pratique une fente rectiligne de longueur dl dans la membrane tendue, il faut s'exercer sur les deux bords pour les maintenir en place deux forces égales et opposées, contenues dans le plan tangent à la membrane au point d'application, perpendiculaires à la direction de la fente, et de valeur: $dF = T dl$. On montre, comme dans le cas de la corde, que la tension T est, pour une membrane donnée, une constante indépendante du point envisagé et de l'orientation de la fente, sous réserve des mêmes hypothèses de non raideur et de petits mouvements.

I.A. membrane rectangulaire



I.A.1. Soit une membrane rectangulaire tendue de dimensions L_x et L_y de masse par unité de surface σ constante. Cette membrane, au repos est située dans le plan xOy (figure I.1). La membrane est soumise à des conditions aux limites que l'on précisera ultérieurement. On étudie les mouvements de la membrane, chaque point ne pouvant se déplacer que selon la direction Oz (vibrations transversales). Donner la condition qui permet de négliger le poids de la membrane dans l'étude de son mouvement.

I.A.2. On considère un élément infinitésimal de la membrane, de dimensions au repos dx et dy , écarté de sa position d'équilibre d'une quantité $z(x, y, t)$ (figure I.1). Faire le bilan des forces qui s'appliquent sur cet élément.



I.A.3. Ecrire la relation fondamentale de la dynamique et mettre le résultat sous forme d'une équation d'onde en coordonnées cartésiennes. On précisera la valeur de la célérité c de l'onde en fonction des données et on vérifiera l'homogénéité de l'expression obtenue.

I.A.4. Donner la justification d'un choix de solutions à variables séparées:

$$z(x,y,t) = X(x) Y(y) \Psi(t)$$

$$\frac{1}{\Psi} \frac{d^2 \Psi}{dt^2} = K$$

Montrer que ce choix impose: où K est une constante que l'on posera, après justification, égale à $-\omega^2$.

I.A.5. Donner une solution à laquelle satisfera $\Psi(t)$; on utilisera, si cela s'y prête, les fonctions sinus et/ou cosinus.

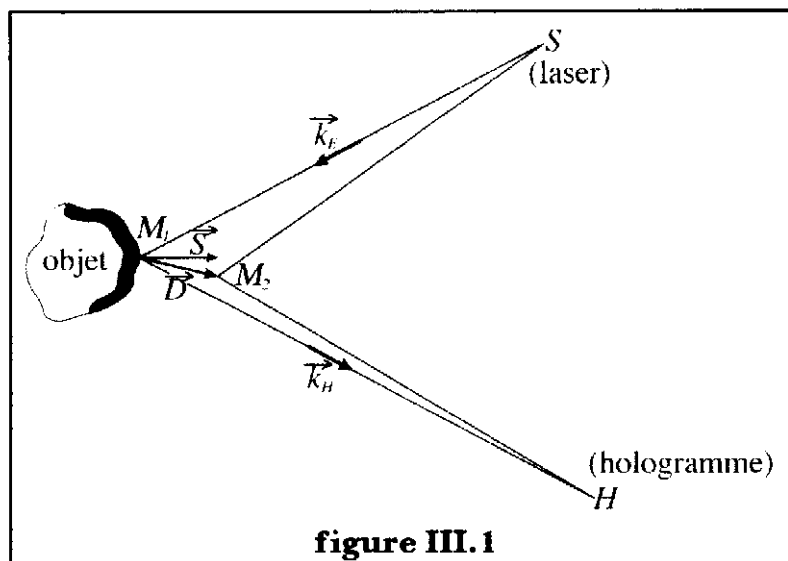
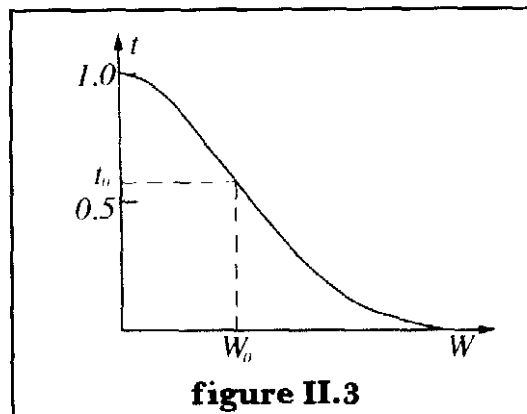
I.A.6. Montrer par une démarche analogue à celle de la question I.A.4 que les fonctions X et Y satisfont à des équations différentielles dont on donnera les solutions générales.

I.A.7. La membrane est fixée rigidement le long de ses quatre bords: $(x = 0)$, $(x = L_x)$, $(y = 0)$, $(y = L_y)$. Donner la solution $z_{m,n}(x, y, t)$ en fonction de : x, y, L_x, L_y, m, n, t et deux constantes M et N , où m et n sont des entiers, le premier relatif à la solution de X et le second à la solution de Y .

I.A.8. Donner les expressions des fréquences $f_{m,n}$ auxquelles la membrane peut vibrer.

I.A.9. Faire successivement les représentations sur une membrane rectangulaire (L_x représentée par 4 cm, L_y par 2 cm) des lignes nodales pour les six cas suivants:

$$\begin{aligned} &(m = 1, n = 1) ; (m = 2, n = 1) \\ &(m = 1, n = 2) ; (m = 2, n = 2) \\ &(m = 3, n = 1) ; (m = 3, n = 2). \end{aligned}$$



I.B. Membrane circulaire

I.B.1. L'étude de l'élément infinitésimal de la membrane de géométrie circulaire se rapporte à des coordonnées polaires dans le plan xOy (figure I.2). Donner, en s'aidant de la question I.A.3 et des formules fournies, l'équation différentielle régissant le mouvement $z(r, \theta, t)$ d'un élément infinitésimal de membrane.

I.B.2/ On cherche une solution à variables séparées sous la forme:

$$z(r, \theta, t) = R(r) F(\theta) \Psi(t)$$

Montrer que ce choix, que l'on justifiera, conduit à l'équation (1) $\frac{1}{F} \frac{d^2 F}{d\theta^2} = K'$, avec K' constante que l'on posera égale à $-m^2$, et à une autre équation différentielle (2) portant sur R que l'on exprimera.

I.B.3. Résoudre (1) ; montrer que m est nécessairement entier.

I.B.4. Montrer par un changement de variable judicieux que l'équation différentielle (2) est une équation différentielle de Bessel. En donner les solutions physiquement acceptables, ayant pour argument une combinaison des variables r , ω et c .

I.B.5. La membrane circulaire, de rayon $r = a$ est fixée sur tout son périmètre. Si on repère par l'indice n le $n^{\text{ième}}$ zéro de la solution de R , représenter pour cette membrane les lignes nodales dans les six cas suivants où le $n^{\text{ième}}$ zéro est situé en $r = a$

$$(m = 0, n = 1); (m = 1, n = 1)$$

$$(m = 2, n = 1); (m = 0, n = 2)$$

$$(m = 3, n = 1); (m = 1, n = 2).$$

Dans chaque cas, on exprimera la valeur de la fréquence $f_{m,n}$ en fonction de 2.405 , πa , T et σ .

II. Deuxième partie: Holographie et interférométrie holographique

On appelle hologramme un support photosensible (généralement un film photographique) sur lequel on a enregistré l'énergie lumineuse correspondant à l'onde issue d'un objet convenablement éclairé par un faisceau laser, ainsi qu'à une onde dite « de référence » provenant par un chemin différent du laser lui-même. La figure II.1 illustre les deux manières qu'a la lumière de parvenir jusqu'à l'hologramme. Le laser émet par hypothèse une radiation considérée comme monochromatique de longueur d'onde λ .

II.A.1. Enregistrement de l'hologramme

II.A.1.a Dans tout le reste du problème, on représentera une onde lumineuse par un U (lettre ronde) Si elle inclut la dépendance temporelle en $e^{-i\omega t}$ et par un U (lettre droite) Si elle ne l'inclut pas. Par exemple, l'onde engendrée par l'objet, évaluée sur le plan de l'hologramme (plan muni d'un référentiel (Oxy)), sera représentée par $U_0(x, y, t) = U_0(x, y) e^{-i\omega t} = A_0(x, y) e^{i(\phi(x, y) - \omega t)}$ avec A_0 complexe hologramme complexe, c'est à dire pouvant éventuellement comprendre un terme de phase constant. On suppose, pour l'onde de référence, que le foyer image de l'objectif de microscope 2, assimilable à une lentille mince convergente, est confondu avec le foyer objet de la lentille convergente (figure II.1), les deux éléments étant centrés. Quelle est dans ces conditions la nature de l'onde de référence qui arrive sur l'hologramme ?

II.A.1.b. Sachant que le vecteur $\mathbf{k}$ correspondant à l'onde de référence incidente appartient au plan yOz et qu'il fait un angle θ avec l'axe Oz (figure II.2), écrire l'expression $U_R(x, y)$ de l'onde de référence dans le plan de l'hologramme (on utilisera la notation A_R (complexe) pour représenter son amplitude).

II.A.1.c. Donner en tout point du plan de l'hologramme l'expression de l'onde résultante $U(x, y)$ ainsi que l'éclairement $E(x, y)$ dont on rappelle qu'il est proportionnel à UU^* . ($E = \alpha UU^*$, avec α constante de proportionnalité que l'on posera pour simplifier égale à 1).

II.A.2. L'étude de la transparence d'un film négatif (obtenu après développement) montre que le facteur de transmission du film pour les amplitudes, noté t , s'exprime en fonction de l'énergie reçue par unité de surface du film durant l'exposition. Ainsi, pendant la durée τ , cette énergie est $W = E\tau$. La figure II.3 donne l'allure de t en fonction de W . Donner l'expression de t au voisinage de t_0 en fonction de t_0 , β , τ , W_0 et E (où β représente la valeur absolue de la pente de la tangente à la courbe au point (t_0, W_0)) On utilisera dans toute la suite du problème le film dans cette zone de la courbe, et plus précisément, on s'arrangera pour avoir $W_0 = |A_R|^2 \tau$.

II. A.3. Le processus de restitution consiste à éclairer l'hologramme obtenu après développement dans une situation similaire à celle de l'enregistrement, mais avec l'onde de référence seule. Donner l'expression de l'onde transmise $U'(x, y, t) = U(x, y)e^{-i\omega t}$ juste après l'hologramme. Montrer que parmi tous les termes obtenus, celui qui est proportionnel à $A_0 e^{i(\phi_0 \omega t)}$ restitue entièrement l'onde initiale que produisait l'objet dans le plan de l'hologramme au moment de l'enregistrement. Quelle est alors la nature de l'image que ce dispositif nous permet d'observer si nous nous plaçons derrière l'hologramme ainsi éclairé ? Peut-on avec ce dispositif observer une autre image ? De quelle nature est-elle ?

II.B. 1. Principe de l'interférométrie holographique

L'interférométrie holographique consiste en l'enregistrement de plusieurs situations holographiques à différents instants sur le même support, correspondant aux éclairissements $E_1, E_2, E_3, \dots E_i$ et aux durées d'exposition $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots \tau_i$. Les différentes situations holographiques sont dues à différentes situations très voisines de l'objet, mais à chaque fois, l'onde de référence reste inchangée. Donner l'énergie reçue au total par le film en fonction des $A_{0i}, \tau_i, \phi_i, A_R$ et ϕ_R .

II.B.2. Montrer qu'avec le processus de restitution développé en II.A.3, on obtient, entre autres, une image virtuelle affectée de franges d'interférences. On discutera les avantages de ce type d'interférométrie.

III. Troisième partie

III.A. Interférométrie holographique par double exposition

On reprend le principe de l'interférométrie holographique développée en II.B, avec deux positions très voisines de l'objet (double exposition). On représente les ondes, sur le plan de l'hologramme, produites successivement par l'objet par U_1 et U_2 .

III.A.1. Ecrire l'énergie totale W reçue par le film (on choisira ici : $W_0 = |A_R|^2(\tau_1 + \tau_2)$).

III.A.2 Donner le facteur de transmission du film une fois développé, s'il est utilisé dans des conditions similaires à celles de la question II.A.2.

III.A.3. Soit $U'(x, y)$ l'expression de l'onde obtenue par restitution dans le plan de l'hologramme. Ne donner parmi tous les termes de $U'(x, y)$ que celui qui correspond à l'observation de l'image virtuelle, que l'on appellera $U'_v(x, y)$.

III.A.4. Posons et $U_1 = A_1 e^{i\phi_1}$ et $U_2 = A_2 e^{i\phi_2}$ avec ici A_1 et A_2 réels, $\phi_2 = \phi_1 + \Delta\phi$. Montrer que U'_v se met alors sous la forme $U'_v = -\beta |A_R|^2 \phi_1 (A_1 e^{i\phi_1}) M$ où M est appelée fonction de modulation, et s'exprime en fonction de A_1, A_2, τ_1, τ_2 et $\Delta\phi$.

III.A.5. Donner l'éclairement correspondant à l'image virtuelle, que l'on mettra sous la forme : $E = E_0(1 + m \cos(\Delta\phi))$, avec E_0 et m s'exprimant en fonction des données. Commenter le résultat obtenu.

III.A.6. Les deux enregistrements étant effectués dans des conditions quasi similaires, pendant des durées égales, on pourra prendre $A_1 = A_2$. Que vaut alors m ? Commentaire.

III.A.7.a. On s'intéresse à un déplacement (ou une déformation) infinitésimal de l'objet (figure III.1). Les distances SM_1 ou SM_2 et M_1H ou M_2H sont très grandes devant la distance M_1M_2 correspondant au déplacement. Soient $\mathbf{k}_E$ et $\mathbf{k}_H$ les vecteurs d'onde des ondes (localement planes) d'éclairage et de réémission par l'objet. Exprimer la différence de phase en fonction de la différence de marche δ et de la longueur d'onde λ du laser. Exprimer ensuite la différence de marche $\delta = (SM_2H) - (SM_1H)$ en fonction du vecteur déplacement $\mathbf{D} = \mathbf{M}_1\mathbf{M}_2$ et du vecteur sensibilité $\vec{S} = \hat{k}_H - \hat{k}_E$ où $\hat{k}_H$ et $\hat{k}_E$ sont des vecteurs unitaires colinéaires à $\mathbf{k}_H$ et $\mathbf{k}_E$.

III.A.7.b. La sensibilité de la méthode (interférométrique) pour la mesure des déplacements dépend donc de quelle(s) quantité(s) ?

III.A.8. La méthode d'holographie à double exposition a été utilisée pour le diagnostic de restauration d'œuvres d'art. La figure III.2 montre l'image holographique obtenue par double exposition d'une peinture sur bois (Sainte Catherine de Pier Francesco Fiorentino, vers 1450). Le support en bois est constitué de deux panneaux en peuplier collés, de dimensions respectives en centimètres (largeur x hauteur x épaisseur): 38 x 49 x 4 et 17 x 49 x 4 (figure III.3). L'œuvre n'est pas peinte directement sur bois, mais sur une sous couche, mélange de colle et de glu, recouvrant l'ensemble des deux panneaux.

Les deux expositions ont été réalisées à cinq minutes d'intervalle alors que le tableau subissait un réchauffement de surface (température maximum 40°C) grâce à un courant d'air chaud. Interpréter qualitativement les franges obtenues, en s'intéressant particulièrement aux zones de détachement de la sous couche d'avec le support (zones à restaurer).



figure III.2

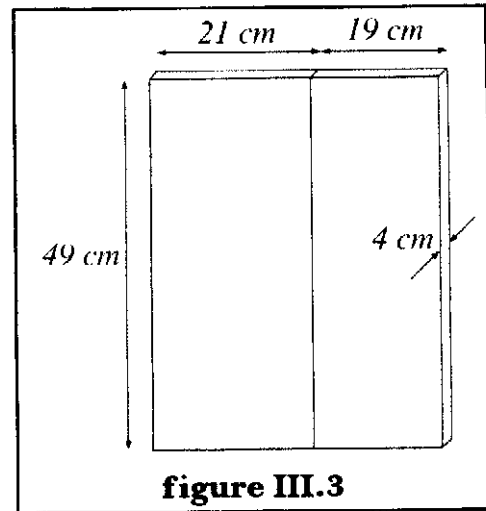


figure III.3

III.B. holographique par intégration temporelle

On considère maintenant un objet se déplaçant pendant la durée de l'exposition de l'hologramme.

III.B.1. Ecrire l'éclairement E (à un instant donné) reçu sur le film au moment de l'enregistrement en fonction de l'onde U_0 engendrée par l'objet sur le plan du film et de l'onde U_R de référence.

III.B.2. La plaque photographique reçoit pendant la durée infinitésimale dt une énergie infinitésimale dW . Exprimer dW puis W pendant la durée d'exposition τ en fonction de U_0 et U_R .

III.B.3. On ne garde, pour la simplicité des calculs, que le terme de W qui correspondra au moment de la restitution à l'image virtuelle. Ecrire l'expression de l'onde restituée U_V en fonction de U_0 , U_R , β et τ .

III.B.4. Posons $U_0 = A_0 e^{i(\phi(t) - \omega t)}$ avec A_0 réel. Si les déplacements sont micrométriques, on admettra que A_0 est constant dans le temps, et que $\phi = \phi_0 + \Delta\phi(t)$ où ϕ_0 représente la phase lorsque l'objet est au repos. Donner U_V en introduisant la fonction de modulation

$$M = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} e^{i\Delta\phi(t)} dt$$

III.B.5. En se reportant à la question II.A.7, on s'intéresse à de faibles mouvements sinusoïdaux de direction fixée. Le vecteur déplacement $\mathbf{D}$ s'écrit alors : $\mathbf{D} = \mathbf{D}_0 \sin(\omega t)$. Donner l'expression de $\Delta\phi(t)$.

III.B.6 En supposant que la durée d'exposition τ est très grande devant la période d'oscillation sinusoïdale de l'objet, exprimer M en utilisant la fonction de Bessel appropriée.

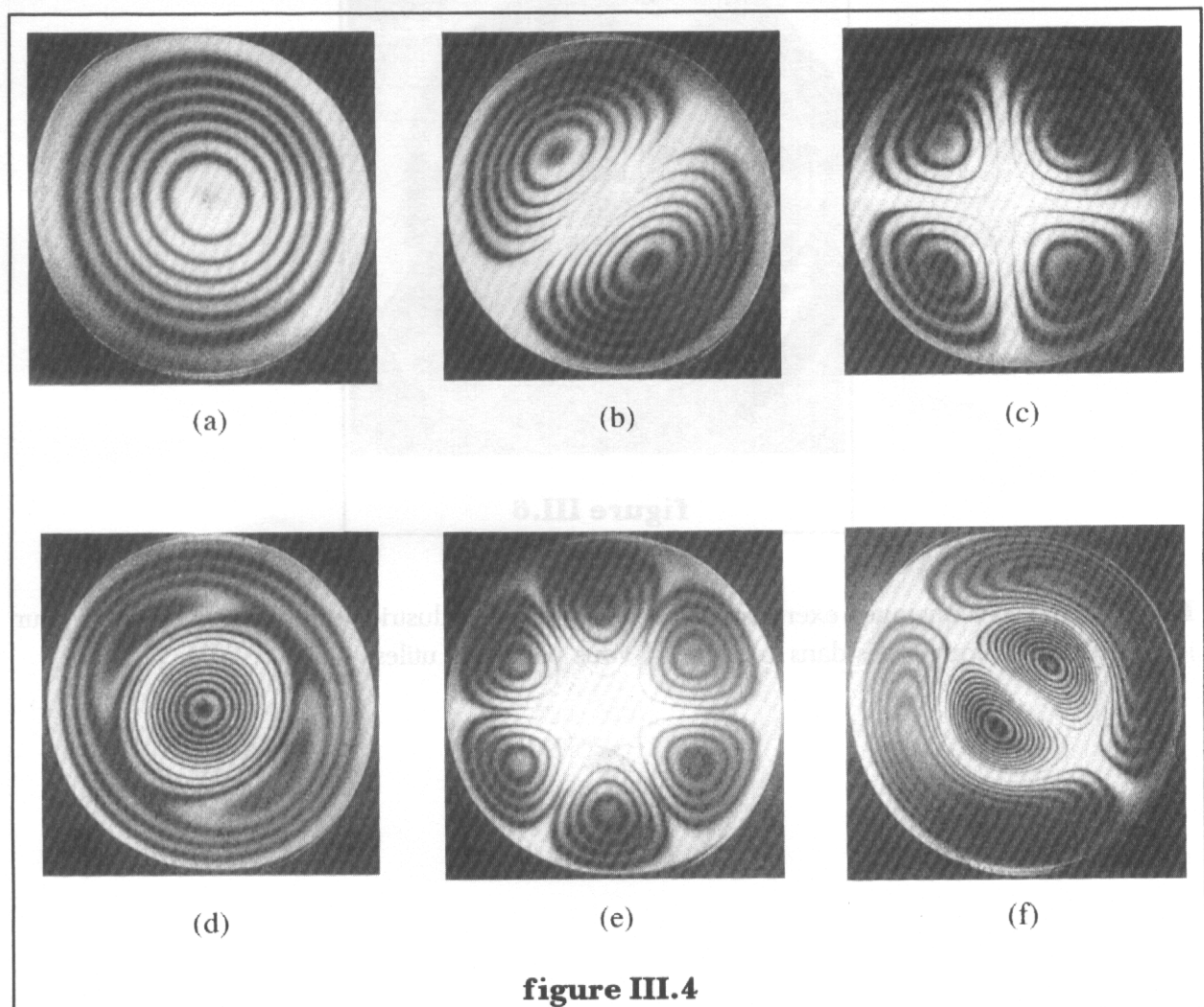
III.B.7. Donner l'éclairement correspondant à l'image virtuelle restituée E_V en fonction de A_0 , A_R , β , τ et de la fonction de Bessel appropriée.

III.B.8. Quelles sont les zones de l'objet qui donnent un éclairement maximum dans l'image, Si le vecteur sensibilité $\mathbf{S}$ est orthogonal à un objet plan ayant servi pour l'enregistrement?

III.B.9. On a représenté en figure III.4 les images holographiques obtenues par intégration temporelle de plaques circulaires vibrantes. quel lien existe-t-il avec les questions I.B ? Pouvez-vous identifier les modes de vibration dans les six cas?

III.B.10. La figure III.5 représente l'image holographique obtenue par intégration temporelle d'une plaque circulaire de faible épaisseur par rapport au diamètre, sur laquelle on a collé une mince couche d'élastomère. Interpréter qualitativement la figure obtenue en supposant qu'il peut exister un défaut de collage.

III.B.11. Donner une interprétation, ici aussi qualitative, de l'image holographique suivante (figure III.6), obtenue par intégration temporelle.



III.B.12. Citez quelques exemples dans le domaine industriel ou de la recherche pour lesquels les techniques vues dans la partie III vous paraissent utiles.

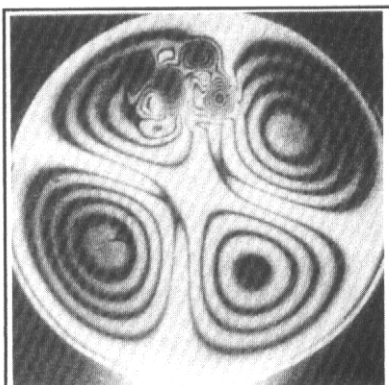


figure III.5

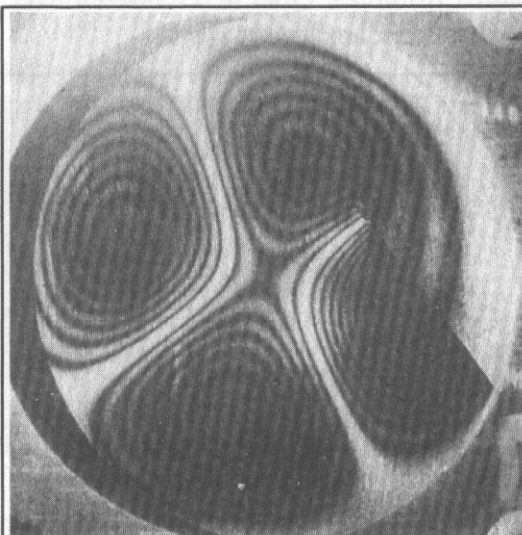


figure III.6