Районная олимпиада 2005 год.

8 класс

1. В результате измерения четырех сторон и одной из диагоналей некоторого четырехугольника получились числа 1; 2; 2,8; 5; 7,5. Чему равна длина измерения диагонали?
2. Найти сумму: $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{2004}+\sqrt{2005}}$.
3. На день рождения Фрекен Бок испекла торт. Малыш и торт весили столько же, сколько Карлсон и Фрекен Бок. Когда торт съели, Карлсон весил столько, сколько Фрекен Бок и Малыш. Доказать, что Карлсон съел кусок торта, весивший столько же, сколько Фрекен Бок до дня рождения.
4. Построить квадрат, три вершины которого лежат на трех данных параллельных прямых.
5. Докажите, что если $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}=1$, то $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{a+b}=0$.

Указания к решению задач.
8 класс

1. Воспользуемся неравенством треугольника: каждая сторона треугольника меньше суммы двух других, но больше их разности. Если длина диагонали 7,5, то из оставшихся чисел (длин сторон) можно было бы составить две пары, дающие в сумме больше, чем 7,5. Однако это не так. Поэтому 7,5 не подходит. Аналогично не подходит 5. Если длина диагонали равна 1, то из оставшихся чисел можно было бы составить две пары, разность которых меньше 1. Однако это не так. Поэтому 1 не подходит. Аналогично не подходит 2. Единственный возможный ответ – 2,8, который подходит.

Ответ: 2,8.

2. Указание: освободиться от иррациональности в знаменателе каждой дроби.

Ответ: $\sqrt{2005}-1$.

3. Из первого условия следует, что торт, Малыш и Фрекен Бок (до дня рождения) вместе весили столько же, сколько Карлсон и две Фрекен Бок. Из второго условия следует, что торт, Малыш и Фрекен Бок весят столько же, сколько бы весил Карлсон, если бы съел ещё такую же порцию торта. Поэтому Карлсон с двойной порцией торта весил бы столько же, сколько с двумя Фрекен Бок. Следовательно его порция и Фрекен Бок весят одинаково.
4. Предложим один из возможных способов построения. Возьмем произвольную точку A_2 на средней прямой l_2, проведем через неё прямую l_0, $l_0 \perp l_2$ и обозначим через B и C точки её пересечения с прямыми l_1 и l_3. Отложив по одну сторону от l_0 на прямой l_1 отрезок $BA_1=AC$, а на прямой l_3 отрезок $CA_3=AB$, получим A_1, A_2, A_3 – три вершины квадрата.
5. Решение: $$\begin{cases} \dfrac{a}{b+c}=1-\dfrac{b}{a+c}-\dfrac{c}{a+b}, \\ \dfrac{b}{a+c}=1-\dfrac{c}{a+b}-\dfrac{a}{b+c}, \\ \dfrac{c}{a+b}=1-\dfrac{a}{b+c}-\dfrac{b}{a+c}. \end{cases}$$

$$\frac{a^2}{b+c}=a\cdot\frac{a}{b+c},\qquad \frac{b^2}{a+c}=b\cdot\frac{b}{a+c},\qquad \frac{c^2}{a+b}=c\cdot\frac{c}{a+b}.$$

Сложим и заменим дробями из системы:

$$a\cdot\left(1-\frac{b}{a+c}-\frac{c}{a+b}\right)+b\cdot\left(1-\frac{c}{a+b}-\frac{a}{b+c}\right)+c\cdot\left(1-\frac{a}{b+c}-\frac{b}{a+c}\right)=$$

$$=a-\frac{ab}{a+c}-\frac{ac}{a+b}+b-\frac{bc}{a+b}-\frac{ab}{b+c}+c-\frac{ac}{b+c}-\frac{bc}{a+c}=$$

$$=a+b+c-\frac{ab+bc}{a+c}-\frac{ac+bc}{a+b}-\frac{ab+ac}{b+c}=a+b+c-a-b-c=0.$$