

ETUDE DE DISPOSITIFS ELECTROSTATIQUES

1. DOMAINE D'EMPLOI DES ACTIONNEURS ELECTROSTATIQUES

1.1 Energie électromagnétique volumique.

1.1.1 Ecrire les équations de Maxwell dans le cas général, puis dans le cas où il n'y a ni charges ni courants ; on se placera dans ce cas pour les questions suivantes.

1.1.2 Définir le vecteur de Poynting $\mathbf{P}$.

1.1.3 Etablir l'équation locale de conservation de l'énergie électromagnétique en traduisant le fait que le vecteur de Poynting est le vecteur courant volumique d'énergie électromagnétique.

1.1.4 En déduire une expression possible de l'énergie électromagnétique volumique.

On pourra utiliser l'identité :

$$\operatorname{div}(\mathbf{V} \wedge \mathbf{W}) = \mathbf{W} \cdot \operatorname{rot}(\mathbf{V}) - \mathbf{V} \cdot \operatorname{rot}(\mathbf{W})$$

et la relation d'Ostrogradski :

=

où (V) désigne un volume dont la surface fermée (S) est la frontière.

1.1.5 Comparer les énergies volumiques utilisables dans un moteur électromagnétique et dans un moteur électrostatique dans des conditions courantes : B_{maximum} de l'ordre de 1.5 T, E_{maximum} de l'ordre du champ disruptif dans l'air, soit $3 \cdot 10^6 \text{ V.m}^{-1}$.

Pour des dimensions de l'ordre du micromètre, le champ disruptif peut être notablement plus élevé. Quelle valeur de E_{maximum} faut-il atteindre pour obtenir la même énergie volumique que dans le cas électromagnétique ?

On rappelle que $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$ et $\epsilon_0 = 1/36\pi \cdot 10^9 \text{ F.m}^{-1}$

1.2 Champ disruptif

Pour interpréter la différence des valeurs observées pour le champ disruptif dans l'air selon la distance entre les parties chargées, le modèle suivant est proposé : considérons deux plateaux métalliques parallèles de grandes dimensions, placés à la distance d l'un de l'autre dans l'air et soumis à une différence de potentiel réglable V . Un arc électrique s'amorce entre les plateaux si les molécules ionisables sont en concentration suffisante et si le champ électrique est d'intensité suffisante pour qu'une ionisation par chocs suffisamment efficace produise les ions assurant une forte densité de courant. Cette différence de potentiel minimum, appelée potentiel d'explosion V_e , obéit à la loi de Paschen affirmant que le potentiel explosif entre deux plateaux ne dépend que de la masse de gaz contenue par unité de surface entre les plateaux.

1.2.1 Montrer que la loi de Paschen peut se traduire, à température déterminée, par $V_e = f(P \cdot d)$

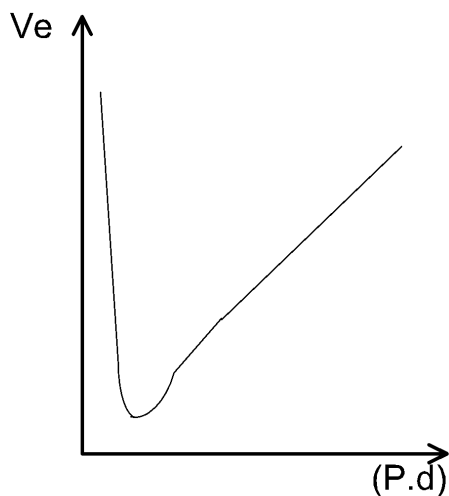
où P désigne la pression du gaz, considéré comme parfait.

1.2.2 Pour décrire un gaz, on adopte un modèle de sphères dures, de rayon r , pour les molécules et pour les ions : les particules sont des sphères impénétrables, les molécules sont immobiles et réparties uniformément avec une densité moléculaire N . Soit un ion se déplaçant dans la direction Ox . Quelle est la section S (dite section efficace de collision) du cylindre d'axe Ox dans lequel se trouve le centre de cet ion s'il y a un choc avec une molécule ? Par définition

du libre parcours moyen λ , sur la longueur λ de ce cylindre, il y a une molécule. En déduire une expression du libre parcours moyen et montrer qu'il est inversement proportionnel à la pression du gaz considéré comme parfait.

1.2.3 Dans le cas où la distance d est largement supérieure au libre parcours moyen λ des ions dans le gaz, on admet que l'ionisation d'une molécule se fait par transfert intégral de l'énergie cinétique d'un ion lors du choc avec cette molécule.

Exprimer l'énergie cinétique acquise par un ion partant sans vitesse initiale et parcourant une distance égale à λ sous l'action d'un champ électrique E uniforme. Soit W_i l'énergie d'ionisation; quelle est l'expression du champ électrique minimum permettant l'ionisation ? Montrer ainsi que, dans ces conditions, le potentiel d'explosion V_e est proportionnel au produit $(P.d)$.



1.2.4 Pour l'air, la courbe expérimentale

$V_e = f(P.d)$ est représentée ci-contre, avec $(P.d)$ en bar.cm et V_e en V. Elle présente un minimum pour

$$(P.d)_{\min} = 7,0 \cdot 10^{-4} \text{ bar.cm et } V_{e\min} = 340 \text{ V}$$

Pour $P.d \gg (P.d)_{\min}$, elle est bien représentée par

$$V_e = 32500 (P.d)$$

Le libre parcours moyen pour le dioxygène dans l'air à 1 bar est de l'ordre de 10^{-7} m.

En utilisant les résultats expérimentaux, calculer numériquement la valeur du champ disruptif dans l'air, à la pression de 1 bar, pour des distances d de l'ordre du centimètre. Pour quelle distance $d_{\min}$ entre électrodes dans l'air à 1 bar, le potentiel d'explosion est-il minimum? Quelle est alors la valeur du champ disruptif ?

Pourquoi le potentiel d'explosion et le champ disruptif augmentent-ils très rapidement lorsque $P.d$ décroît en dessous de $(P.d)_{\min}$?

2. ETUDE D'UN EFFET DE BORD

Un demi-plan métallique d'épaisseur négligeable est placé dans le vide. Il est caractérisé par : $y = 0$, $x \leq 0$ et porté au potentiel V_0 . On veut étudier le potentiel et le champ électrique dans le vide au voisinage du plan.



2.1 Montrer au moyen de considérations de symétrie qu'il suffit de raisonner dans le plan xOy .

On adopte un repérage par les coordonnées polaires d'un point, r et θ dans ce plan et on cherche la fonction potentiel sous la forme :

$$V(r, \theta) = A + f(r) \cdot g(\theta)$$

où $f(r)$ s'annule lorsque $r=0$.

Quelle doit être la valeur de A ?

Montrer que $g(\theta)$ doit être une fonction paire.

2.2 Utiliser l'équation de Laplace pour trouver une relation de la forme

$$H(r) = L(\theta) = K$$

où H s'exprime en fonction de r, f et ses dérivées et L en fonction de g et ses dérivées.

On rappelle que, en coordonnées polaires,

$$\Delta V(r, \theta) = (1/r) \cdot \partial/\partial r (r \partial V/\partial r) + (1/r^2) \cdot \partial^2 V/\partial \theta^2$$

$$\text{grad } V = \partial V/\partial r \mathbf{u}_r + 1/r \partial V/\partial \theta \mathbf{u}_\theta$$

2.3 En déduire la forme générale de $g(\theta)$. Sachant que $V = V_0$ uniquement sur le plan, déterminer $g(\theta)$ à une constante multiplicative près.

2.4 Chercher ensuite $f(r)$ sous la forme

$$f(r) = r^u \quad \text{où } u \text{ est un nombre réel.}$$

Déterminer u .

2.5 On fixe le potentiel du point P ($r = r_0$, $\theta = 0$) à la valeur 0. Donner l'expression de $V(r, \theta)$.

2.6 Tracer l'allure de quelques équipotentielles et de quelques lignes de champ dans le plan xOy .

2.13569216 Énoncer le théorème de Coulomb, exprimant le champ électrique au voisinage de la surface d'un conducteur possédant la charge surfacique σ .

2.13569328 Déduire de l'expression de $E_\theta(r)$ pour $\theta = \pi$ celle de la charge surfacique $\sigma(r)$. Que devient σ si $r \rightarrow 0$? Quel phénomène classique retrouve-t-on ainsi ?

3. GENERATEUR ELECTROSTATIQUE

3.1 Condensateur.

3.1.1 On considère un condensateur plan idéal constitué par deux plans conducteurs infinis parallèles distants de e , dans le vide. Justifier par des considérations de symétrie le caractère uniforme de champ électrique dans l'espace interarmatures. Exprimer la capacité par unité de surface.

3.1.2 Définir la pression électrostatique et donner son expression. En déduire l'expression en fonction de U (tension du condensateur), e et ϵ_0 , de la force par unité de surface subie par l'une des armatures d'un condensateur plan idéal.

3.1.3 Retrouver l'expression de l'énergie d'un condensateur de capacité C chargé sous une tension U à partir de l'expression de l'énergie électrostatique volumique en utilisant le modèle du condensateur plan idéal. En envisageant un déplacement élémentaire quasistatique de l'une des armatures à charge constante, exprimer la force électrostatique subie par cette armature en fonction d'une dérivée partielle de l'énergie du condensateur.

3.1.4 Envisager maintenant un déplacement quasistatique à tension constante et exprimer la force électrostatique subie par une armature. Vérifier que les deux modes de calcul conduisent bien à l'expression de la force surfacique obtenue en 3.1.2.

3.1.5 Un condensateur (C) est formé d'un demi-disque conducteur fixe (I) de rayon a et d'un demi-disque (T) de rayon $b < a$, mobile en rotation autour de l'axe commun aux deux disques. Les demi-disques sont parallèles et distants de e . On admet que le champ électrique n'existe que dans la partie où les disques sont en regard, et qu'il y est uniforme.

Exprimer la capacité $C(\theta)$ de ce condensateur. On distinguera les cas

$$0 < \theta < \pi \quad \text{et} \quad \pi < \theta < 2\pi$$

3.2 Générateur à influence.

Un moteur extérieur entraîne l'armature mobile (T), nommée transporteur, à vitesse constante. L'armature fixe (I), nommée inducteur, est reliée à la borne (-) d'une source de tension continue V_0 dont la borne $\oplus$ est à la terre. Un commutateur lié mécaniquement à (T) permet de

- relier électriquement (T) à la terre (phase 1)
- isoler (T) (phase 2)
- relier électriquement (T) à l'une des armatures du condensateur (S) d'utilisation, dont la seconde armature est à la terre (phase 3).

On étudie le régime permanent, lors duquel la tension d'utilisation V_s est constante. V_T , V_I désignent les potentiels de (T) et (I), $v = V_T - V_I$ leur différence et q la charge du condensateur (C).

3.2.1 Phase 1 : (T) relié à la terre, θ croît de π à 2π .

Exprimer v et q , calculer q_0 , valeur de q pour $\theta = 0$ (à 2π près). Exprimer la variation élémentaire de l'énergie dW de (C) correspondant à une rotation $d\theta$. Quelle est, en fonction de q_0 , V_0 , la variation d'énergie ΔW_1 de (C) dans cette phase ?

3.2.2 Phase 2 : (T) est isolé, θ croît de 0 à θ_c , θ_c désigne la valeur de θ pour laquelle $V_T = V_s$.

Exprimer v , q et V_T . Calculer θ_c en fonction de V_s puis en fonction de k défini par $V_s = kV_0$. Exprimer la variation élémentaire dW de l'énergie correspondant à une rotation $d\theta$. Quelle est, en fonction de k , q_0 , V_0 , la variation d'énergie ΔW_2 de (C) lors de cette phase ?

3.2.3 Phase 3 : (T) est connecté à (S), θ varie de θ_c à π .

Exprimer v . Exprimer la variation élémentaire dW de l'énergie correspondant à une rotation $d\theta$. Quelle est, en fonction de k , q_0 , V_0 , la variation d'énergie ΔW_3 de (C) lors de cette phase ?

3.2.4 Quelle est l'énergie W_{ut} fournie à (S) pendant un cycle ?

3.2.5 Présenter dans un tableau les énergies algébriquement reçues par les différentes parties du système (source de tension alimentant l'inducteur, condensateur, moteur entraînant le transporteur, utilisation) pour chacune des phases et pendant un cycle. Vérifier les bilans pour un cycle. Cette machine est-elle réversible ?

4. ACTIONNEURS ELECTROSTATIQUES

4.1 Actionneur linéaire.

On modélise un actionneur linéaire au moyen de trois plaques métalliques rectangulaires parallèles. Les plaques (A) et (B), de côtés a et b , sont fixes et distantes de $2d$. La plaque (M), de mêmes dimensions, est guidée en translation entre (A) et (B). On désigne par y la distance de (M) à (A) et par $x = OO'$ l'abscisse du bord de (M) par rapport à l'entrée de l'espace interplaques.

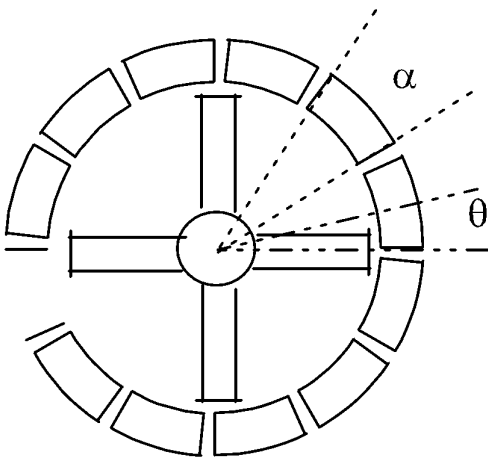
(A) et (B) sont maintenus au potentiel V , (M) est maintenu au potentiel 0. On néglige les effets de bord : le champ électrostatique est uniforme entre les plaques et nul ailleurs. On fait une étude statique du dispositif : à chaque instant, (M) est immobile, maintenue par des efforts extérieurs appropriés.

4.1.1 Exprimer les capacités C_1 et C_2 des condensateurs formés entre (A) et (M) et entre (B) et (M). En déduire l'expression de l'énergie $W(x,y)$ du système. Représenter le graphe de $W(x)$ à y fixé pour x variant de 0 à $2a$.

4.1.2 On envisage des déplacements de (M) à potentiel constant. Quelle est dans ces conditions l'expression générale de la résultante des forces subies par (M) ? Déterminer les composantes F_x et F_y de cette résultante.

4.1.3 Quelle serait la position d'équilibre de (M) sous l'action des seules forces électrostatiques ? Etudier la stabilité de l'équilibre vis à vis des déplacements selon Ox et selon Oy .

4.1.4 On choisit $a = b = 100 \mu\text{m}$, $x = a/2$, $d = 5,0 \mu\text{m}$, $y = 4,0 \mu\text{m}$, $V = 10 \text{ V}$. Calculer numériquement C_1 , C_2 , F_x , F_y , et w , énergie électrique volumique.



4.2 Moteur rotatif à capacités variables.

L'une des géométries utilisées pour fabriquer des micromoteurs électrostatiques rotatifs, à fonctionnement synchrone ou pas à pas, est représentée ci-contre. On désigne par R_1 le rayon d'une armature rotorique, par R_2 le rayon intérieur d'une armature statorique, par h la hauteur

comptée dans la direction de l'axe de rotation; α et θ sont définis sur la figure ; on considère que lorsque l'un des pôles du rotor est aligné sur un pôle du stator, les surfaces en regard ont même aire et

$$R_2 - R_1 \ll R_2, R_1$$

Le rotor est maintenu au potentiel 0. Un dispositif de commutation approprié, non étudié ici, permet de porter séquentiellement les armatures statoriques au potentiel V .

4.2.1 Exprimer la capacité du condensateur formé par une armature statorique et une armature rotorique en fonction de θ . Quelle est l'expression de l'énergie, en fonction de V , θ et des caractéristiques de construction pour le moteur schématisé ci-dessus.

4.2.2 En déduire le moment du couple moteur pour un pôle.

4.2.3 On donne les valeurs numériques suivantes :

$$R_1 = 50 \mu\text{m} \quad R_2 - R_1 = 2,0 \cdot 10^{-7} \text{ m} \quad h = 2,0 \mu\text{m} \quad \alpha = \pi/12$$

On admet que le champ disruptif, aux dimensions utilisés, est de l'ordre de 10^{10} V.m^{-1} . Quelle est la tension maximum utilisable si on néglige les effets de bord ? Pour le dixième de cette valeur, calculer le moment du couple moteur pour la machine à quatre pôles. Les vitesses angulaires maximum réalisées actuellement sont de l'ordre de 500 tr/min. Quelle est la puissance utile correspondante ?