



Proves d'accés a la universitat

Matemàtiques

Serie 2

Responda a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2,5 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

Puede utilizar las páginas en blanco (páginas 14 y 15) para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página de la cuestión correspondiente.

1. Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ y la matriz identidad de orden dos $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Compruebe que $(A - 2I)^2 = 3I$. [0,5 puntos]

b) Utilizando la igualdad del apartado anterior, encuentre la matriz inversa de la matriz A en función de las matrices A e I, y compruebe que coincide con la matriz B. [1,25 puntos]

c) Calcule la matriz X que satisface la igualdad $AX = B$. [0,75 puntos]

Resolución

$$a) A - 2I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} ;$$

$$(A - 2I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3I$$

$$b) \text{ Observa que } A^2 - 4AI + 4I = 3I \Rightarrow I = -A^2 + 4AI \Rightarrow A(-A + 4I) = I \text{ y } (-A + 4I)A = I$$

Por tanto, A tiene inversa y es

$$A^{-1} = -A + 4I = 4I - A = 4\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} = B$$

$$c) \text{ Multiplicando por } A^{-1} = B, \text{ por la izquierda, } A^{-1}AX = IX = X = A^{-1}B = BB = B^2$$

$$\text{Es decir, } X = B^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -12 & 7 \end{pmatrix}$$

2. Considere la función $f(x) = \frac{1}{x}$.

a) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa $x = 2$
 [0,75 puntos]

Resolución

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2}. \text{ La ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función f en un punto } A(x_0, f(x_0))$$

es $\text{rtg: } y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. En este caso, $x_0 = 2$

$$f'(x_0) = f'(2) = \frac{-1}{2^2} = -\frac{1}{4} \quad f(x_0) = f(2) = \frac{1}{2}; \text{rtg: } y = -\frac{1}{4}(x - 2) + \frac{1}{2} \Rightarrow \text{rtg: } y = \frac{4-x}{4}$$

b) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa $x = k$, donde k es un número real positivo. [0,75 puntos]

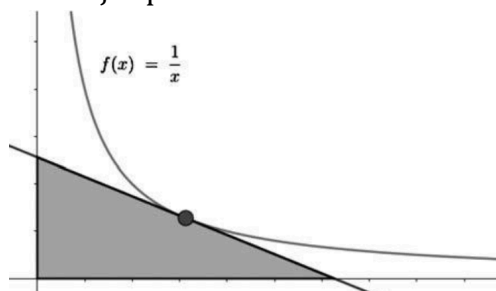
Resolución

$$f(x) = \frac{1}{x}; f'(x) = -\frac{1}{x^2}. \text{ La ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función } f \text{ en un}$$

punto $A(x_0, f(x_0))$ es $\text{rtg: } y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. En este caso, $x_0 = k$

$$f'(x_0) = f'(k) = -\frac{1}{k^2} \quad f(x_0) = f(k) = \frac{1}{k}; \text{rtg: } y = -\frac{1}{k^2}(x - k) + \frac{1}{k} \Rightarrow \text{rtg: } y = \frac{2k-x}{k^2}$$

c) Compruebe que, tal y como puede verse en la figura de abajo, la recta del apartado b) determina un triángulo de área constante con los semiejes positivos de coordenadas. Calcule esta área.



Resolución

Hallemos los puntos de corte de la recta tangente $y = \frac{2k-x}{k^2}$ con los ejes:

$$0 = \frac{2k-x}{k^2} \Rightarrow x = 2k \quad \text{y para } x = 0, y = \frac{2k-0}{k^2} = y = \frac{2}{k}. \text{ Los puntos de corte son } (2k, 0) \text{ y } \left(0, \frac{2}{k}\right)$$

$$\text{El área del triángulo es } A = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{2k \cdot \frac{2}{k}}{2} = 2 \text{ u}^2$$

3. Considere el sistema de ecuaciones lineales $\{2x + y = 1 + z \quad my + z = 2 - x \quad mz + 3 = 3x + y$, donde m es un número real.

a) Discute el sistema según los valores del parámetro m . [1,25 puntos]

Resolución

$$\{2x + y - z = 1 \quad x + my + z = 2 \quad 3x + y - mz = 3; \text{ matrices de coeficientes y ampliada:}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & m & 1 \\ 3 & 1 & -m \end{pmatrix}, A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & m & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -m & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det A = -2m^2 + 3 - 1 + 3m - 2 + m = -2m^2 + 4m = -2m(m - 2) = 0 \Leftrightarrow m = 0, m = 2$$

- Si $m \neq 0, m \neq 2, \det A \neq 0$ y $\text{rg } A = 3 = \text{rg } A^* = n^\circ$ de incógnitas. Luego, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, tiene solución única.

- Si $m = 0, \det A = 0, A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; como el menor $|2 \ 1 \ 1 \ 0| = -1 \neq 0, \text{rg } A = 2$

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad f_2 + f_1 \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad f_3 = f_2 \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Como $|2 \ 1 \ 3 \ 1| = -1 \neq 0, \text{rg } A^* = 2$. Luego, $\text{rg } A = 2 = \text{rg } A^* < n^\circ$ de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

- Si $m = 2,$

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad f_1 + f_2 \quad f_3 - 2f_1 \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad f_2 + 3f_3 \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

La 3ª fila corresponde a la ecuación $0 = 6$, que es incompatible. Luego, el sistema es incompatible

b) Resuelve el sistema, si tiene solución, para el caso $m = 1$. [1,25 puntos]

Resolución

Si $m = 1$, sabemos por el a) que el sistema tiene solución única. La matriz de coeficientes o del sistema es

$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & -1 & 3 \\ f_2 & + & f_1 & f_3 & - & f_1 & (2 & 1 & -1 & 1 & 3 & 2 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 2) \end{pmatrix}$, que corresponde al sistema $\{2x + y - z = 1 \quad 3x + 2y = 3 \quad x = 2$

Luego, $3.2 + 2y = 3, y = \frac{-3}{2}$; $z = 2.2 + \frac{-3}{2} - 1, z = \frac{3}{2}$. La solución es $x = 2, y = \frac{-3}{2}, z = \frac{3}{2}$

4. Considere la función $f(x)$ definida por $f(x) = -3x + e^{2x^3 - 1}$

a) Justifique que $f(x) = 2$ tiene una solución en el intervalo $(-1, 0)$. [1,25 puntos]

Resolución

Vamos a usar el teorema de Bolzano, que dice: Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$, y cambia de signo en los extremos de dicho intervalo entonces existe por lo menos un $c \in [a, b]$, tal que $f(c) = 0$.

La función $g(x) = f(x) - 2 = -3x + e^{2x^3 - 1} - 2$, es continua en \mathbb{R} en particular el intervalo $[-1, 0]$.

$$g(-1) = -3(-1) + e^{2(-1)^3 - 1} - 2 = 1 + e^{-3} > 0 \quad g(0) = -3 \cdot 0 + e^{2 \cdot 0^3 - 1} - 2 = -1 < 0.$$

Por Bolzano, $\exists c \in (-1, 0)$ tal que $0 = g(c) = f(c) - 2 \Rightarrow f(c) = 2 \Rightarrow c$ es solución de la ecuación.

b) Sea la función $h(x) = -3x^2 + e^{2x^3 - 1}$. Calcule el área de la región comprendida entre las gráficas de las funciones $f(x)$ y $h(x)$. [1,25 puntos]

Resolución

Hallemos las abscisas de los puntos de corte de las gráficas: $\{y = -3x + e^{2x^3 - 1} \quad y = -3x^2 + e^{2x^3 - 1}$

$$-3x + e^{2x^3 - 1} = -3x^2 + e^{2x^3 - 1} \Rightarrow 0 = 3x^2 - 3x = 3x(x - 1); x = 0, x = 1$$

$$\text{Área que piden: } A = \left| \int_0^1 [f(x) - h(x)] dx \right| = \left| \int_0^1 (3x^2 - 3x) dx \right|.$$

$$\text{Una primitiva de la función del integrando es } p(x) = x^3 - \frac{3x^2}{2} = \frac{2x^3 - 3x^2}{2}.$$

$$\text{Por la regla de Barrow, } A = |p(1) - p(0)| = \left| \frac{2 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2}{2} - \frac{2 \cdot 0^3 - 3 \cdot 0^2}{2} \right| = \frac{1}{2} u^2 = 0,5 u^2$$

5. Sean r_1 y r_2 las rectas definidas por $r_1: x - 1 = y = -z$ y por $r_2: x = y = z$, respectivamente.

a) Calcule la ecuación paramétrica de la recta que corta perpendicularmente las rectas r_1 y r_2 .

[1,75 puntos]

Resolución

$$r_1: x - 1 = y = \frac{z}{-1}, A(1, 0, 0) \in r_1 \text{ y un vector director de } r_1 \text{ es } \vec{d}_1 = (1, 1, -1)$$

$$B(0, 0, 0) \in r_2 \text{ y un vector director de } r_2 \text{ es } \vec{d}_2 = (1, 1, 1)$$

Como $\det(\vec{d}_1, \vec{d}_2, \vec{BA}) = |1 \ 1 \ -1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0| = 2 \neq 0$, los vectores \vec{d}_1 , \vec{d}_2 y \vec{BA} son l.i. y r y se cruzan.

Si r es la recta que pide, un vector director es

$$\vec{d} = \vec{d}_1 \times \vec{d}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (2, -2, 0) // (1, -1, 0)$$

Un punto genérico de r_1 es $P(1+a, a, -a)$ y de r_2 es $Q(b, b, b)$, $\vec{QP} = (1+a-b, a-b, -a-b)$

Si P y Q son los puntos de r entonces, $\vec{d} // \vec{QP} \Rightarrow \frac{1}{1+a-b} = \frac{-1}{a-b} = \frac{0}{-a-b}$

Resolvemos, $\begin{cases} -a-b=0 \\ a-b=-1-a+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ -2a+2b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a+2b=0 \\ -2a+2b=1 \end{cases} \Rightarrow 4b=1, b=\frac{1}{4}, a=-\frac{1}{4}$,

$$P\left(1 + \frac{-1}{4}, \frac{-1}{4}, \frac{1}{4}\right) = P\left(\frac{3}{4}, \frac{-1}{4}, \frac{1}{4}\right), Q\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right),$$

$$\vec{QP} = \left(1 + \frac{-1}{4} - \frac{1}{4}, \frac{-1}{4} - \frac{1}{4}, -\frac{-1}{4} - \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, 0\right)$$

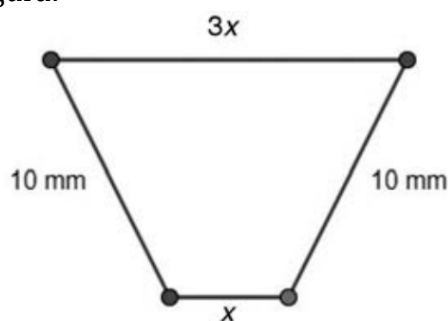
Como $Q\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) \in r$ y $\vec{d} = (1, -1, 0)$ es un vector director de r entonces

$$r: \begin{cases} x = \frac{1}{4} + k \\ y = \frac{1}{4} - k \\ z = \frac{1}{4} \end{cases}$$

b) Calcule la distancia entre r_1 y r_2 . [0,75 puntos]

Resolución $dist(r_1, r_2) = |\vec{QP}| = \left| \left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, 0\right) \right| = \frac{1}{2} |(1, -1, 0)| = \frac{1}{2} \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,71$ u

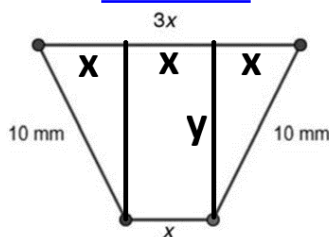
6. Queremos construir una pieza metálica que tenga por sección un trapecio isósceles con la base superior tres veces más larga que la base inferior. Los otros lados del trapecio miden 10 mm, tal y como se puede observar en la siguiente figura:



a) Exprese la altura del trapecio en función de la longitud x de la base inferior. [0,5 puntos]

b) Calcule la longitud de la base inferior del trapecio de forma que el área de la pieza sea máxima y encuentre el valor de esa área máxima. [2 puntos]

Resolución



a) Por el teorema de Pitágoras, la altura del trapecio es $y = \sqrt{10^2 - x^2} = \sqrt{100 - x^2}$, con $0 < x < 10$

b) El área de la pieza es el área del trapecio $A(x) = \frac{(3x+x)\sqrt{100-x^2}}{2} = 2x\sqrt{100-x^2}$

$$A'(x) = 2\sqrt{100-x^2} + 2x \frac{-2x}{2\sqrt{100-x^2}} = 2\sqrt{100-x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{100-x^2}} = \frac{200-4x^2}{\sqrt{100-x^2}} = 0 \Leftrightarrow$$

Si $x < \sqrt{50}$, $A'(x) > 0$, $A(x)$ creciente y si $x > \sqrt{50}$, $A'(x) < 0$, $A(x)$ decreciente

Por tanto, el área es máxima cuando la base inferior de la pieza mide $x = \sqrt{50} \cong 7,07 \text{ mm}$