Отношение «равно», «меньше», «меньше на число»

Выясним, на какой теоретической основе происходит сравнение чисел.

Пусть даны два целых неотрицательных числа a и Ь. С теоретико-множественной точки зрения они представляют собой число элементов конечных множеств A и B: a = п(A), b = п(B). Если эти множества равномощны, то им соответствует одно и то же число, т. е. a=b. Приходим к определению:

Числа a и b равны, если они определяются равномощными множествами:

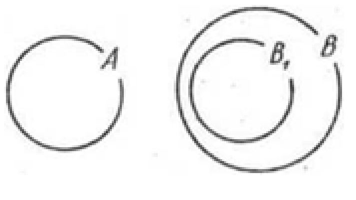
$$a = b \Leftrightarrow A \sim B, \text{ где } n(A) = a,\ n(B) = b$$

Если множества A и B неравномощны, то числа, определяемые ими, различны.

В том случае, **если множество** A **равномощно собственному подмножеству множества B и** п (A) = a, п (B)= **b, говорят; что число a меньше числа b, и пишут:** a< **b**. В этой же ситуации говорят, что b больше a, и пишут: b>a,

$$a < b \Leftrightarrow A \sim B_1, \text{ где } B_1 \subset B \text{ и } B_1 \neq B,\ B_1 \neq 0$$

Из приведенных определений отношений «равно» и «меньше» исходят в начальной школе когда объясняют, что 2 = 2, 3 = 3, 2<3, 3<4 и т. д. Например, при введении записи 3 = 3 рассматривают два равномощных множества квадратов и кругов (рис. 91). **При изучении отношения 3<4 проводятся рассуждения**: возьмем три розовых кружка и 4 синих и каждый розовый **наложим на синий**, видим, что синий кружок остался незакрытым, значит, розовых кружков меньше, чем синих, поэтому можно записать: 3<4.



Отметим еще, что **если числа** a **и** b **определяются соответственно множествами A и B** (кружков, квадратов, палочек и т. д.) **и** a<b, **то выделение в множестве B собственного подмножества, равномощного множеству A, на практике происходит самыми различными способами**: **наложением, приложением, путем образования пар и т. д.** Это возможно, так как отношение a<b (так же как и отношение a = b) не зависит от выбора множеств AиB, таких, что n (A)=a, п (B) = b, **важно только, чтобы A было равномощно собственному подмножеству множества B** (a в случае равенства чисел A равномощно B).

Изложенный подход к определению отношения «меньше» имеет ограниченное применение, он может быть использован для сравнения чисел в пределах 20, поскольку связан с непосредственным сравнением двух групп предметов.

Как же можно еще сравнивать целые неотрицательные числа? Пусть a<b в смысле данного выше определения.

Тогда a = п(A), **b** = п(B) **и $A \sim B_1$, где B_1— собственное подмножество множества B** (рис. 92). Так как $B_1 \subset B$, то B можно представить в виде объединения множества B_1 и его дополнения $B \setminus B_1$. Обозначим это дополнение B_1' (т. е. $B \setminus B_1 = B_1'$. Тогда $B = B_1 \cup B_1'$ и, следовательно, n ($B_1 \cup B_1'$). Поскольку множества B_1 и B_1' не пересекаются, то по определению A~B. суммы $n(B) = n(B_1) + n(B_1')$ (*). Но по условию $B_1 \sim A$, значит, п(B_1) = п(A). **Если число элементов в множестве** B_1 **обозначить через с, то равенство (*)**

можно записать в виде b = **a+c, т. е. из того, что a<b, следует, что b = a+c.** Нетрудно убедиться и в справедливости обратного утверждения.

Пришли к другому определению отношения «меньше»:

<u>Число a меньше числа b тогда и только тогда, когда существует такое натуральное число c, что a + c =b.</u>

Как, пользуясь этим определением, объяснить, что 3<7? 3<7, поскольку существует такое целое неотрицательное число 4, что 3+ 4 = 7.

Этот способ определения отношения «меньше» через сложение также используется в начальном курсе математики. Об этом говорит наличие пар записей 5+1=6, 6>5; 7+1=8, 7<8.

Рассмотрим еще один способ сравнения чисел.

<u>Пусть a <</u> <u>b</u>. **<u>Тогда про любое натуральное число</u>** <u>x</u> **<u>можно сказать, что если</u>** <u>x≤a</u>, **<u>то</u>** <u>x<b</u>. **<u>Это значит, что при</u>** <u>a<b</u> **<u>отрезок натурального ряда</u>** <u>N_a</u> **<u>является собственным подмножеством отрезка</u>** <u>N_b</u>**<u>. Справедливо и обратное утверждение.</u>**

Таким образом, получаем еще одно определение отношения «меньше»:

Число a меньше числа b тогда и только тогда, когда отрезок натурального ряда N_a является собственным подмножеством отрезка этого ряда N_b:

$$a<b \; N_a \; N_b \; \textbf{и} \; N_a \neq N_b \; .$$

Например, справедливость неравенства 3<7 с этих позиций можно объяснить тем, что (1, 2, 3) {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7).

Данная трактовка понятия «меньше» позволяет сравнивать числа, опираясь на знание их места в натуральном ряду.

Этот способ сравнения чисел также используется в начальном обучении математике: **число, которое при счете встречается раньше, всегда меньше числа, которое идет позднее**.

Возьмем множества A и B, пусть a = m(A), b = m(B), где a, b N_0.

Если A ~ B, то эти множества принадлежат одному классу эквивалентности, поэтому им соответствует одно и то же натуральное число, т.е. a = b .

Справедливо и обратное. **Если a = b, то эти натуральные числа определяют один и тот же класс конечных равномощных множеств, значит, множества A и B равномощны. Из сказанного можно получить определение равных натуральных чисел.**

Определение 3. ***Два целых неотрицательных числа a и b равны тогда и только тогда, когда равномощны множества, число элементов которых числа a и b .***

К р а т к а я з а п и с ь : a = b A~B, где a = m(A), b = m(B).

<u>Отношение «равно» на множестве целых неотрицательных чисел – рефлексивно, симметрично и транзитивно</u>.

Если множества A и B не равномощные, тогда одно из множеств будет равномощно подмножеству другого множества, т.е. или $A \sim B_1 \subset B$, или $B \sim A_1 \subset A$.

Пусть $A \sim B_1 \subset B$ (рис. 1). Видим, что в множестве B элементов столько, сколько в множестве A, да еще несколько, так как a = m(A), b = m(B), то говорят, что a < b . Справедливо и обратное.

Если a < b, то A ~ B1 ⊂ B, где a = m(A), b = m(B).

Определение 4. ***Натуральное число а меньше натурального числа b тогда и только тогда, когда множество, число элементов которого равно а, равномощно собственному подмножеству другого множества, число элементов которого равно b.***

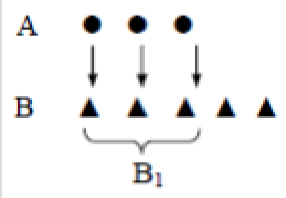


Рис. 1

Краткая запись: a < b A~B₁ ⊂ B, где a = m(A), b= m(B).

Если B~A₁ ⊂ A, тогда получим, что b < a , где b = m(B), a = m(A).

Вывод. **Если два множества неравномощны, то число элементов первого множества меньше числа элементов второго, или число элементов второго множества меньше числа элементов первого.**

$A \sim B_1 \subset B$ можно прочитать еще так: **в множестве В столько элементов, сколько в множестве А, да еще несколько (например, с) . Тогда можно сказать, что число а меньше b на число с .**

Определение 5. ***Число а меньше b на число с, тогда и только тогда, когда в множестве В элементов столько, сколько в множестве А, да еще с элементов, если а = m(A), b = m(B).***

Можно еще отметить, что в этом случае множество В разбито на два подмножества, в одном элементов столько, сколько в множестве А, а в другом с элементов.

Можно дать еще одно такое определение: «меньше на число с».

Определение 6. ***Число а меньше числа b на число с тогда и только тогда, когда множество В можно разбить на два непересекающихся подмножества, где число элементов одного равно числу а, а число элементов другого подмножества равно с.***

Очевидно, если число а меньше b на число с, тогда число b больше а на число с. Справедливо и обратное.

Примечание. **Отношение «меньше» антирефлексивное, антисимметричное и транзитивное**.

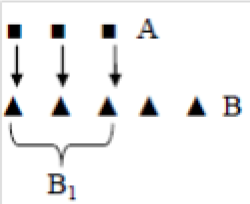


Рис. 2

Задание 1. Доказать: 1) 3 < 5 , 2) 0 < 5 , 3) 6 = 6, 4) 5 меньше 9 на 4 , 5) 6 больше 4 на 2.

1. Пусть 3 = m(A), A – множество квадратов. 5 = m(B), B – множество треугольников. Можно поставить в соответствие каждому квадрату треугольник (рис.2), тогда в множестве В выделяется подмножество B_1, равномощное множеству А, получили $A \sim B_1 \subset B$, тогда, по определению 4, 3 < 5.

2. Пусть 0 = m(Ø), 5 = m(A), где А – множество любых элементов. Из теории множеств известно, что все пустые множества равномощные и пустые множества являются подмножеством любого множества, т.е.

Ø ~ Ø ⊂ A => m(Ø) < m(A) или 0 < 5 .

Рис. 3

3. Пусть 6 = m(A) и A – множество треугольников, 6 = m(B) и B – множество кругов (рис. 3). Можно поставить в соответствие каждому квадрату только один круг и каждому кругу можно поставить в соответствие только один треугольник. Получим A~B, т.е. m(A) = m(B) или 6 = 6 (по определению 3).

4. Пусть 5 = m(A) , где A – множество точек, 9 = m(B) , где B – множество кругов.

Изобразим A и B. Очевидно, что можно в множестве B выделить подмножество B_1 равномощное множеству A, $B_1 \sim A$ (рис. 4).

Множество B содержит столько элементов, сколько множество A, да еще несколько элементов, которые образуют множество C. Используем счет для нахождения числа элементов множества C. $C \sim N4$, значит, $m(C) = 4$. По определению 5 получаем, что 5 меньше 9 на 4.

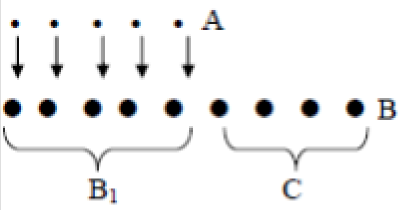


Рис. 4

5. Пусть $6 = m(A)$, $4 = m(B)$. Нужно доказать, что 6 больше 4 на 2 или 4 меньше 6 на 2 (см. решение 4).