



EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE 2023 EJERCICIO DE: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CC.SS. II

TIEMPO DISPONIBLE: 1 hora 30 minutos

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

El estudiante responderá, como máximo, a tres de las seis preguntas propuestas. Si se realizan más de tres ejercicios sólo se corregirán los tres primeros que aparezcan en el tríptico y, para evitar confusiones, se recomienda numerarlo. La nota final será el resultado de sumar las puntuaciones obtenidas en las preguntas realizadas y dividir dicha suma para tres.

1.- (10 puntos) Responda a las siguientes cuestiones:

a) (5 puntos) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ y la ecuación

matricial $XB + A = C$, determine razonadamente el orden (dimensión) de la matriz X para que la ecuación matricial esté bien planteada. Despeje la matriz X y resuelva dicha ecuación matricial.

Resolución

$B_{3 \times 3}$; $A_{2 \times 3}$; $C_{2 \times 3}$. Para que se pueda realizar XB debe ser X una matriz de 3 columnas.

Para que se pueda hacer la suma $(XB)_{2 \times 3}$. Por tanto, X debe ser de orden o dimensión 2×3 .

Trasponiendo términos, $XB = C - A$; $\det B = -1 \neq 0$. Luego, existe B^{-1} .

Multiplicando por B^{-1} , por la derecha, $XBB^{-1} = XI = (C - A)B^{-1}$.

$$X = (C - A) \frac{1}{\det B} (\text{adj } B)^t = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right] \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 2 & -1 & -5 \end{pmatrix}^t =$$

$$= - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & -1 & 2 & -1 & -5 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 5 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) (5 puntos) Calcule, utilizando técnicas matriciales, la solución del sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x - 5y + 3z = 1 \\ x - y + z = 1 \\ 3x + 3y + z = 5 \end{cases}$$

Resolución

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz de coeficientes, $X = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$ la columna de incógnitas y $b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ la columna de términos independientes. Podemos escribir el sistema como $AX = b$

$$\det A = -2 - 15 + 9 + 9 - 6 + 5 = 0.$$

$$A^* = A/b = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad f_1 - 2f_2 \quad f_3 - 3f_2 \quad (0 \quad -3 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 6 \quad -2 \quad 2) -$$

Como el menor de A y A^* $|2 \quad -5 \quad 1 \quad -1| = 3 \neq 0$, $\text{rg } A^* = 2$. Luego, $\text{rg } A^* = \text{rg } A = 2 < n^\circ$ de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

La matriz del sistema es equivalente a $(0 \quad 3 \quad -1 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad 1)$, que corresponde al sistema

$$\{3y - z = 1 \quad x - y + z = 1\}.$$

$$\text{Despejando, } z = 3y - 1; \quad x = 1 + y - z = 1 + y - 3y + 1 = 2 - 2y.$$

Llamando $y = k$, las infinitas soluciones son $\{x = 2 - 2k \quad y = k \quad z = 3k - 1\}$, con $k \in \mathbb{R}$.

2.- (10 puntos) Emilia quiere fertilizar sus campos de cultivo utilizando sacos de fertilizantes de dos marcas comerciales, A y B. Por cuestiones medioambientales debe comprar como máximo 100 sacos. Un saco del fertilizante A cuesta 4 € y uno del B cuesta 6 €. Un saco del fertilizante A contiene 3 unidades de nitrógeno, 5 de fósforo y 1 de potasio, mientras que un saco del B contiene 2 unidades de cada nutriente. Los terrenos estarán bien fertilizados con al menos 180 unidades de nitrógeno, al menos 200 de fósforo y, al menos, 80 de potasio. ¿Cuál es el gasto mínimo que tiene que hacer Emilia y qué debe comprar para satisfacer las necesidades nutricionales de los cultivos?

Resolución

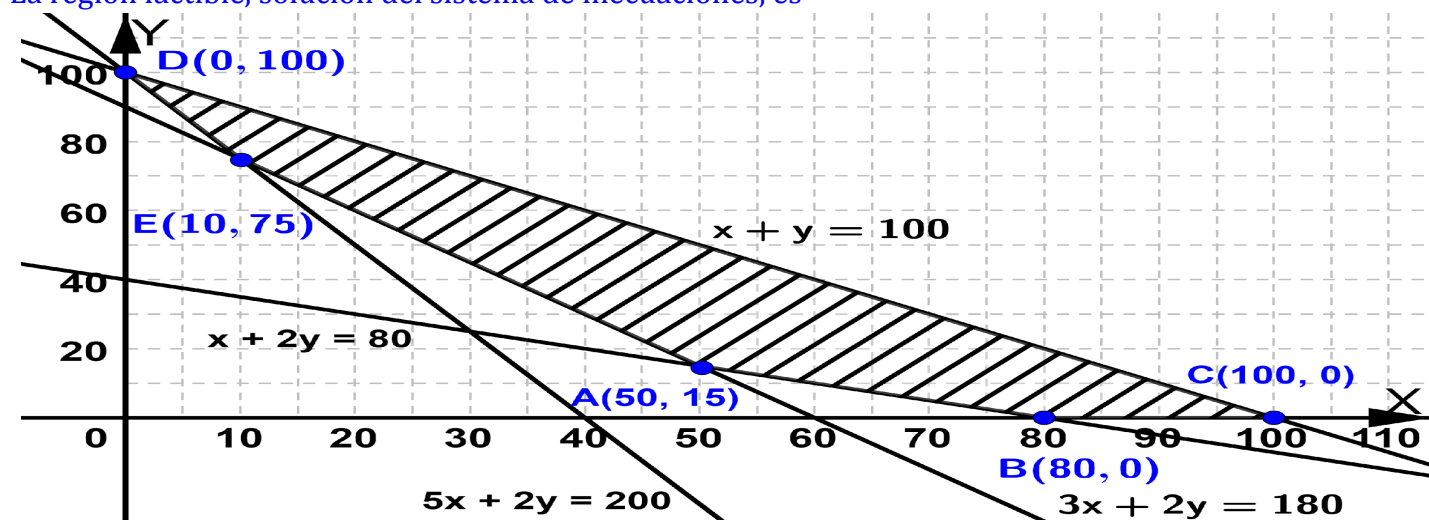
Representamos en una tabla los datos del problema:

	nº de sacos	nº de unidades de N	nº de unidades de P	nº de unidades de K	gasto (en €)
marca A	x	$3x$	$5x$	$1x$	$4x$
marca B	y	$2y$	$2y$	$2y$	$6y$
total	$x + y$	$3x + 2y$	$5x + 2y$	$x + 2y$	$4x + 6y$

La función a optimizar (minimizar) es el gasto $f(x, y) = 4x + 6y$

Las restricciones son $\{x + y \leq 100 \quad 3x + 2y \geq 180 \quad 5x + 2y \geq 200 \quad x + 2y \geq 80 \quad x \geq 0, y \geq 0\}$

La región factible, solución del sistema de inecuaciones, es



Veamos en qué vértices alcanza el valor mínimo el gasto $f(x, y) = 4x + 6y$

$$f(A) = f(50, 15) = 4 \cdot 50 + 6 \cdot 15 = 290 \quad f(B) = f(80, 0) = 4 \cdot 80 + 6 \cdot 0 = 320$$

$$f(C) = f(100, 0) = 4.100 + 6.0 = 400 \quad f(D) = f(0, 100) = 4.0 + 6.100 = 600$$

$$f(E) = f(10, 75) = 4.10 + 6.75 = 490$$

Luego, el gasto mínimo es 290 € y se obtiene comprando 50 sacos del fertilizante A y 15 del B.

3.- (10 puntos) El coste total de fabricación, en euros, de cierto producto viene dado por la función $C(x) = x^2 + 80x + 10000$, donde x representa el número de unidades producidas y vendidas.

a) (5 puntos) Si cada producto se vende a 400 euros, plantee la función beneficio (ingresos menos costes) en función del número de unidades producidas y vendidas. Determine el número de unidades del producto que deben venderse para que el beneficio sea máximo (justificando que lo es). ¿A cuánto asciende dicho beneficio máximo?

Resolución

La función beneficio es $B(x) = 400x - (x^2 + 80x + 10000) = -x^2 + 320x - 10000$

$$B'(x) = -2x + 320 = 0 \Leftrightarrow x = 160, \quad y = -160^2 + 320.160 - 10000 = 15600$$

La gráfica de $B(x)$ es una parábola cóncava, de máximo absoluto, vértice, (160, 15600)

Luego, deben venderse 160 unidades obteniéndose un beneficio máximo de 15600 €

b) (5 puntos) ¿En qué nivel de producción se minimiza el coste medio por unidad $CM(x) = \frac{C(x)}{x}$?

Resolución

La función coste medio por unidad es $f(x) = CM(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{x^2 + 8x + 10000}{x} = x + 8 + \frac{10000}{x}$

$$f'(x) = 1 - \frac{10000}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 10000 \text{ y como } x > 0, \text{ resulta } x = 100; \quad f''(x) = \frac{20000}{x^3}$$

$$f''(100) = \frac{20000}{100^3} > 0 \text{ (mínimo si } x = 100\text{)}.$$

Luego, el coste medio se minimiza para una producción de 100 unidades

4.- (10 puntos) Dada $f(x) = \frac{mx^3 - 1}{x^2}$

a) (6 puntos) Determine el valor del parámetro m para que la función tenga un extremo relativo en $x = -1$. Razone si se trata de un máximo o un mínimo relativo.

Resolución

$$f(x) = mx - \frac{1}{x^2} = mx - x^{-2}; \quad f'(x) = m + \frac{2}{x^3}$$

$$\text{Como } f \text{ debe tener un extremo relativo en } x = -1 \text{ tiene que ser } 0 = f'(-1) = m + \frac{2}{(-1)^3} = m - 2$$

$$\text{Luego, } m = 2 \text{ y } f(x) = 2x - \frac{1}{x^2} = 2x - x^{-2}; \quad f''(x) = \frac{-6}{x^3}; \quad f''(-1) = \frac{-6}{(-1)^3} < 0$$

Por tanto, el extremo es mínimo relativo

b) (4 puntos) Calcule el valor de m para que $\int_1^2 f(x) dx = 4$

Resolución

Una primitiva de f es $F(x) = \frac{mx^2}{2} + \frac{1}{x} = \frac{mx^3 + 2}{2x}$

Por la regla de Barrow, $4 = F(2) - F(1) = \frac{m2^3 + 2}{2 \cdot 2} - \frac{m1^3 + 2}{2 \cdot 1} = \frac{6m - 2}{4}$; $6m - 2 = 16$; $m = 3$

5.- (10 puntos) Responda a las siguientes cuestiones:

a) (6 puntos) La probabilidad de que un autobús escolar llegue con retraso en un día nublado es de 0,08 y en un día despejado 0,004. Durante un periodo de 20 días ha habido 8 días nublados y 12 días despejados. Para un día elegido al azar, ¿cuál será la probabilidad de que el autobús llegue con retraso?

Resolución

Sean los sucesos N = el día es nublado D = el día es despejado R = el autobús llega con retraso

Según el enunciado, $p(R/N) = 0,08$ $p(R/D) = 0,004$ $p(N) = \frac{8}{20} = 0,4$ $p(D) = \frac{12}{20} = 0,6$

Se pide $p(R)$. Por el teorema de probabilidad total,

$$p(R) = p(N)p(R/N) + p(D)p(R/D) = 0,4 \cdot 0,08 + 0,6 \cdot 0,004 = 0,0344 = 3,44\%$$

b) (4 puntos) De los sucesos A y B de un mismo experimento aleatorio se sabe que:

$p(A) = \frac{3}{8}$, $p(B) = \frac{5}{8}$ y $p(A \cup B) = \frac{3}{4}$. Calcule $p(A \cap B)$, $p(A/B)$ y $p(A \cap B^c)$. Justifique si A y B son dos sucesos independientes.

Resolución

Como $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$, entonces

$$p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cup B) = \frac{3}{8} + \frac{5}{8} - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$p\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{1/4}{5/8} = \frac{2}{5} \qquad p(A \cap B^c) = p(A) - p(A \cap B) = \frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

$$p(A) \cdot p(B) = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{8} = \frac{15}{64} \neq p(A \cap B) = \frac{1}{4} \Rightarrow A \text{ y } B \text{ son dependientes.}$$

6.- (10 puntos) Se pretende analizar el consumo anual en alimentación y bebidas en los hogares españoles. Dicha variable sigue una distribución normal con una desviación típica de 3000 euros.

a) (5 puntos) Si deseamos obtener un intervalo de confianza al 96% para la media de dicha variable ¿cuántas familias tenemos que encuestar para que la amplitud del intervalo no sea superior de 2000 euros?

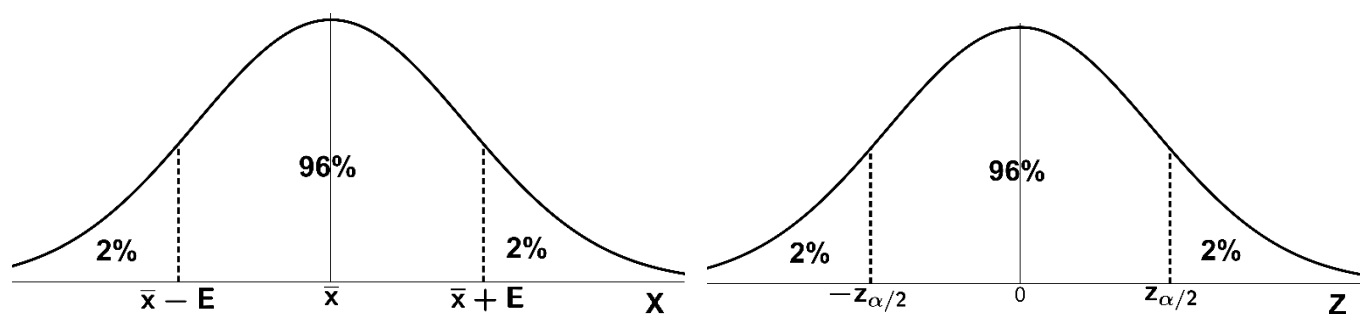
b) (4 puntos) En una muestra de 60 hogares se obtuvo un consumo medio anual en alimentación y bebidas de 17000 euros, halle el intervalo de confianza al 96% para la media de dicha variable.

c) (1 punto) Si desde una asociación de consumidores se afirma «el consumo anual medio en alimentación y bebidas en hogares es de 20000 euros al año». Razone, a la vista del apartado b) si hay motivos para dudar de su afirmación.

Resolución

a) X = “consumo”, $X \rightarrow N(\mu, 3000)$. El intervalo de confianza a nivel de confianza del 96% para estimar μ , es $I_c = (\bar{x} - E, \bar{x} + E)$, siendo $\bar{x}$ la media de una muestra de tamaño n , $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, el máximo error de estimación.

Como el área bajo la campana es 100%, entonces $100\% - 96\% = 4\%$ y $4\% : 2 = 2\%$



$z_{\alpha/2}$ es el valor de la $N(0, 1)$ que cumple $p(Z < z_{\alpha/2}) = 96\% + 2\% = 98\% = 0,98$

Esta probabilidad coincide con $\frac{1+n_c}{2} = \frac{1+0,96}{2} = 0,98$

Como $p(Z < z_{\alpha/2}) = 0,98$ usando la tabla de la $N(0, 1)$, por interpolación $\rightarrow z_{\alpha/2} = 2,055$.

Nos piden hallar n para que $A = 2E = 2z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 2000 \Rightarrow z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 1000$

$z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{1000} \leq \sqrt{n}$ elevando al cuadrado $\rightarrow (z_{\alpha/2})^2 \cdot \frac{\sigma^2}{1000^2} \leq n$

Sustituyendo, $n \geq 2,055^2 \cdot \frac{3000^2}{1000^2} \cong 38,01$. Luego, el tamaño muestral mínimo debe ser 39 entidades.

b) Sabemos que $\bar{x} = 17000$; $n = 60$; $z_{\alpha/2} = 2,055$; $I_c = (\bar{x} - E, \bar{x} + E)$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,055 \cdot \frac{3000}{\sqrt{60}} = 795,9$;

$I_c = (17000 - 795,9 ; 17000 + 795,9) \cong (16204,1 ; 17795,9)$

c) Como 20000 no pertenece al intervalo de confianza hallado con un nivel de confianza del 96% podemos afirmar que es dudosa su afirmación.