

## Annexe -2-

### Gaz de particules élémentaires : hautes températures

Voir Landau et Lifchitz : physique statistique (première partie)

Dans ce qui suit, sera menée une étude comparative entre les trois distributions statistiques à savoir Bose-Einstein (BE), Fermi-Dirac (FD) et Maxwell-Boltzmann (MB). Le domaine physique dans lequel ces trois lois sont valables étant les hautes températures, on cherche à évaluer l'erreur que l'on commet lorsqu'on remplace une statistique quantique par une loi de (MB). Pour cela, on suppose avoir un gaz de particules élémentaires de Bose ou de Fermi et on calcule ces grandeurs physiques que l'on peut comparer à celles de (MB), en particulier l'énergie libre totale et l'équation d'état du gaz.

**Densité des états :** pour chaque particule, nous avons  $\left[ g \frac{dp dr}{(2\pi\hbar)^3} \right]$  états quantiques contenus dans la cellule  $dp dr$ , ce qui définit une fonction densité des

états. Le nombre de particules (B ou F) correspondant est  $dN = n \left[ g \frac{dp dr}{(2\pi\hbar)^3} \right]$  où  $n$  est le nombre de particules ayant une énergie et une température données.

**Nombre de particules :**

Selon les résultats du cours,  $n = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} \pm 1}$ . C'est une écriture unifiée pour les deux cas. Le signe supérieur sera toujours associé aux Fermions, l'autre étant celui des Bosons. Le nombre de particules ayant leurs états dans la cellule  $\Delta\Gamma$  est :

$$dN = n \Delta\Gamma \quad \text{et} \quad \Delta\Gamma = g \frac{dp dr}{(2\pi\hbar)^3}$$

Chaque particule admet une énergie  $\epsilon$ , on cherche alors le nombre de particules dont l'énergie est dans l'intervalle :  $[\epsilon, \epsilon + d\epsilon]$  soit

$$dN_{\epsilon} = \frac{g V m^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2} \pi^2 \hbar^3} \frac{\epsilon^{\frac{1}{2}}}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} \pm 1} d\epsilon$$

Pour y arriver, on intègre la première expression par rapport au volume, ensuite, on passe aux coordonnées sphériques. Dans ce cas, on doit éliminer les angles de façon à obtenir la distribution suivant les modules des impulsions. Enfin, sachant le lien entre ce module et l'énergie d'une particule, on arrive au résultat ci haut.

Le grand potentiel du gaz électronique est :

$$\Omega = - K_B T \sum_i \log(1 \pm e^{\beta(\mu - \epsilon_i)})$$

Le passage à une forme continue s'effectue en faisant appel à la densité des états comme auparavant. Soit :

$$\Omega = - K_B T \int \log(1 \pm e^{\beta(\mu - \epsilon)}) \phi(\epsilon) d\epsilon$$

Avec  $\phi(\epsilon) = \frac{g V m^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2} \pi^2 \hbar^3} \sqrt{\epsilon}$ . La pression  $P$  du gaz s'obtient en divisant le grand potentiel par  $(-V)$  et en changeant de variable d'intégration ( $z = \beta\epsilon$ ) :

$$P = \frac{g V m^{\frac{3}{2}} T^{\frac{5}{2}}}{3 \pi^2 \hbar^3} \int_0^{\infty} \frac{z^{\frac{3}{2}} dz}{e^{z - \frac{\mu}{K_B T}} \pm 1}$$

C'est une équation d'état paramétrique (de paramètre  $\frac{\mu}{K_B T}$ )