Partie A –

1 –

a - $\vec{OM} = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z$. $\vec{v} = \dot{\rho}.\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{2\rho\dot{\rho}}{a}\vec{e}_z$ car $z = \frac{\rho^2}{a}$ donc $\dot{z} = \frac{2\rho\dot{\rho}}{a}$.

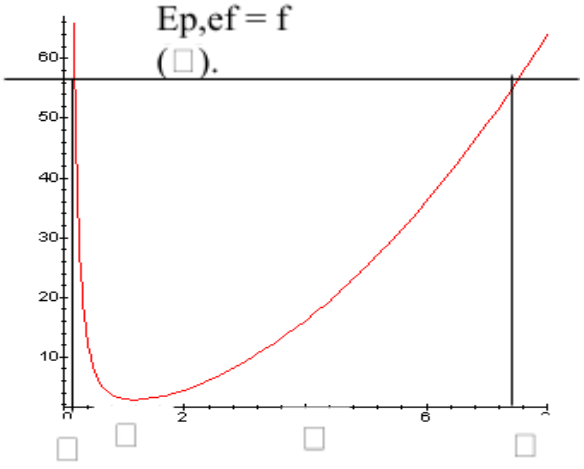
b -

$$\vec{L}_O = \vec{OM} \wedge m.\vec{v} = \begin{vmatrix} \rho \\ 0 \\ \frac{\rho^2}{a} \end{vmatrix} \wedge m. \begin{vmatrix} \dot{\rho} \\ \rho\dot{\varphi} \\ \frac{2\rho\dot{\rho}}{a} \end{vmatrix} = m. \begin{vmatrix} -\frac{\rho^3\dot{\varphi}}{a} \\ -\frac{\rho^2\dot{\rho}}{a} \\ \rho^2\dot{\varphi} \end{vmatrix}$$

. INCORPORER Equation

$$\vec{L}_O = \vec{OM} \wedge m.\vec{v} = \begin{vmatrix} \rho \\ 0 \\ \frac{\rho^2}{a} \end{vmatrix} \wedge m. \begin{vmatrix} \dot{\rho} \\ \rho\dot{\varphi} \\ \frac{2\rho\dot{\rho}}{a} \end{vmatrix} = m. \begin{vmatrix} -\frac{\rho^3\dot{\varphi}}{a} \\ -\frac{\rho^2\dot{\rho}}{a} \\ \rho^2\dot{\varphi} \end{vmatrix}$$

.c – La liaison est parfaite car le glissement est sans frottement. La réaction est donc normale à la paroi. De plus, le guide est invariant par rotation, tous les plans de symétrie contiennent l'axe Oz. Comme la réaction appartient à un de ces plans, le support de la réaction coupe l'axe Oz.



INCORPORER Equation . Les deux forces qui agissent sur la masse sont la réaction et le poids. Toutes les deux appartiennent à un plan de symétrie du guide. Leur moment par rapport à O est nécessairement orthogonal à l'axe Oz. En conclusion, le moment des forces en O suivant Oz est nul, le moment cinétique suivant Oz se conserve, soit : INCORPORER Equation .

$$E_k = \frac{1}{2}m\left\|\frac{d\vec{OM}}{dt}\right\|^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2.\dot{\varphi}^2 + \frac{4\rho^2\dot{\rho}^2}{a^2}\right)$$

2 – a INCORPORER Equation .b – La réaction ne travaille pas. La seule contribution à l'énergie potentielle est le poids : INCORPORER Equation

$$E_k = \frac{1}{2}m\left\|\frac{d\vec{OM}}{dt}\right\|^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2.\dot{\varphi}^2 + \frac{4\rho^2\dot{\rho}^2}{a^2}\right)$$

c - INCORPORER Equation

$$E_k = \frac{1}{2}m\left\|\frac{d\vec{OM}}{dt}\right\|^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2.\dot{\varphi}^2 + \frac{4\rho^2\dot{\rho}^2}{a^2}\right)$$

car aucune force non conservative ne travaille.3 – a

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2\left(1 + \frac{\rho^2.\dot{\varphi}^2}{\dot{\rho}^2} + \frac{4\rho^2}{a^2}\right) + mg\frac{\rho^2}{a}$$

INCORPORER Equation soit INCORPORER Equation

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 \left(1 + \frac{4\rho^2}{a^2}\right) + \underbrace{\frac{1}{2} m \rho^2 . \dot{\varphi}^2 + mg \frac{\rho^2}{a}}_{E_{p,ef}}$$

. Comme INCORPORER Equation

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 \left(1 + \frac{4\rho^2}{a^2}\right) + \underbrace{\frac{1}{2} m \rho^2 . \dot{\varphi}^2 + mg \frac{\rho^2}{a}}_{E_{p,ef}}$$

on obtient pour l'énergie potentielle effective :

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 \left(1 + \frac{4\rho^2}{a^2}\right) + \underbrace{\frac{1}{2} m \rho^2 . \dot{\varphi}^2 + mg \frac{\rho^2}{a}}_{E_{p,ef}}$$

INCORPORER Equation .b - Pour une quantité d'énergie mécanique Em, correspondant aux conditions initiales, on voit que la bille est dans un état lié et que les seuls mouvements possibles sont compris entre ×1 et ×2. INCORPORER Equation

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 \left(1 + \frac{4\rho^2}{a^2}\right) + \underbrace{\frac{1}{2} m \rho^2 . \dot{\varphi}^2 + mg \frac{\rho^2}{a}}_{E_{p,ef}}$$

INCORPORER Equation

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 \left(1 + \frac{4\rho^2}{a^2}\right) + \underbrace{\frac{1}{2} m \rho^2 . \dot{\varphi}^2 + mg \frac{\rho^2}{a}}_{E_{p,ef}}$$

INCORPORER Equation

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 \left(1 + \frac{4\rho^2}{a^2}\right) + \underbrace{\frac{1}{2} m \rho^2 . \dot{\varphi}^2 + mg \frac{\rho^2}{a}}_{E_{p,ef}}$$

INCORPORER Equation

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 \left(1 + \frac{4\rho^2}{a^2}\right) + \underbrace{\frac{1}{2} m \rho^2 . \dot{\varphi}^2 + mg \frac{\rho^2}{a}}_{E_{p,ef}}$$

INCORPORER Equation

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 \left(1 + \frac{4\rho^2}{a^2}\right) + \underbrace{\frac{1}{2} m \rho^2 . \dot{\varphi}^2 + mg \frac{\rho^2}{a}}_{E_{p,ef}}$$

Remarque : On pourrait s'attendre à × = 0 comme position d'équilibre. Il faut naturellement considérer le mouvement général de la bille, en particulier INCORPORER

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 \left(1 + \frac{4\rho^2}{a^2}\right) + \underbrace{\frac{1}{2} m \rho^2 . \dot{\varphi}^2 + mg \frac{\rho^2}{a}}_{E_{p,ef}}$$

Equation donc INCORPORER Equation

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 \left(1 + \frac{4\rho^2}{a^2}\right) + \underbrace{\frac{1}{2} m \rho^2 . \dot{\varphi}^2 + mg \frac{\rho^2}{a}}_{E_{p,ef}}$$

par conséquent INCORPORER Equation

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 \left(1 + \frac{4\rho^2}{a^2}\right) + \frac{1}{2} m \rho^2 . \dot{\varphi}^2 + mg \frac{\rho^2}{a}$$

$E_{p,ef}$

. On trouve ×1 et ×2 en résolvant l'intégrale première du

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 \left(1 + \frac{4\rho^2}{a^2}\right) + \frac{1}{2} m \rho^2 . \dot{\varphi}^2 + mg \frac{\rho^2}{a}$$

$E_{p,ef}$

mouvement avec INCORPORER Equation , soit

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 \left(1 + \frac{4\rho^2}{a^2}\right) + \frac{1}{2} m \rho^2 . \dot{\varphi}^2 + mg \frac{\rho^2}{a}$$

$E_{p,ef}$

INCORPORER Equation .4 – a Si INCORPORER

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 \left(1 + \frac{4\rho^2}{a^2}\right) + \frac{1}{2} m \rho^2 . \dot{\varphi}^2 + mg \frac{\rho^2}{a}$$

$E_{p,ef}$

Equation , soit INCORPORER Equation

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 \left(1 + \frac{4\rho^2}{a^2}\right) + \frac{1}{2} m \rho^2 . \dot{\varphi}^2 + mg \frac{\rho^2}{a}$$

$E_{p,ef}$

. On lâche la bille sans vitesse suivant INCORPORER

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 \left(1 + \frac{4\rho^2}{a^2}\right) + \frac{1}{2} m \rho^2 . \dot{\varphi}^2 + mg \frac{\rho^2}{a}$$

$E_{p,ef}$

Equation .b – Il faut INCORPORER Equation

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 \left(1 + \frac{4\rho^2}{a^2}\right) + \frac{1}{2} m \rho^2 . \dot{\varphi}^2 + mg \frac{\rho^2}{a}$$

$E_{p,ef}$

, INCORPORER Equation

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 \left(1 + \frac{4\rho^2}{a^2}\right) + \frac{1}{2} m \rho^2 . \dot{\varphi}^2 + mg \frac{\rho^2}{a}$$

$E_{p,ef}$

et INCORPORER Equation

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 \left(1 + \frac{4\rho^2}{a^2}\right) + \frac{1}{2} m \rho^2 . \dot{\varphi}^2 + mg \frac{\rho^2}{a}$$

$E_{p,ef}$

or comme INCORPORER Equation

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 \left(1 + \frac{4\rho^2}{a^2}\right) + \frac{1}{2} m \rho^2 . \dot{\varphi}^2 + mg \frac{\rho^2}{a}$$

$E_{p,ef}$

alors INCORPORER Equation

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2\left(1+\frac{4\rho^2}{a^2}\right) + \underbrace{\frac{1}{2}m\rho^2.\dot{\varphi}^2 + mg\frac{\rho^2}{a}}_{E_{p,ef}}$$

.c – Période d'oscillation.On dérive par rapport à ×

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2\left(1+\frac{4\rho^2}{a^2}\right) + \underbrace{\frac{1}{2}m\rho^2.\dot{\varphi}^2 + mg\frac{\rho^2}{a}}_{E_{p,ef}}$$

l'intégrale première. Comme INCORPORER Equation , on

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2\left(1+\frac{4\rho^2}{a^2}\right) + \underbrace{\frac{1}{2}m\rho^2.\dot{\varphi}^2 + mg\frac{\rho^2}{a}}_{E_{p,ef}}$$

obtient, INCORPORER Equation . On se place en

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2\left(1+\frac{4\rho^2}{a^2}\right) + \underbrace{\frac{1}{2}m\rho^2.\dot{\varphi}^2 + mg\frac{\rho^2}{a}}_{E_{p,ef}}$$

INCORPORER Equation donc INCORPORER Equation

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2\left(1+\frac{4\rho^2}{a^2}\right) + \underbrace{\frac{1}{2}m\rho^2.\dot{\varphi}^2 + mg\frac{\rho^2}{a}}_{E_{p,ef}}$$

et INCORPORER Equation

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2\left(1+\frac{4\rho^2}{a^2}\right) + \underbrace{\frac{1}{2}m\rho^2.\dot{\varphi}^2 + mg\frac{\rho^2}{a}}_{E_{p,ef}}$$

est un IP2, INCORPORER Equation

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2\left(1+\frac{4\rho^2}{a^2}\right) + \underbrace{\frac{1}{2}m\rho^2.\dot{\varphi}^2 + mg\frac{\rho^2}{a}}_{E_{p,ef}}$$

. Finalement, l'équation du mouvement est :

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2\left(1+\frac{4\rho^2}{a^2}\right) + \underbrace{\frac{1}{2}m\rho^2.\dot{\varphi}^2 + mg\frac{\rho^2}{a}}_{E_{p,ef}}$$

INCORPORER Equation soit INCORPORER Equation

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2\left(1+\frac{4\rho^2}{a^2}\right) + \underbrace{\frac{1}{2}m\rho^2.\dot{\varphi}^2 + mg\frac{\rho^2}{a}}_{E_{p,ef}}$$

. On pose alors INCORPORER Equation

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2\left(1+\frac{4\rho^2}{a^2}\right) + \underbrace{\frac{1}{2}m\rho^2.\dot{\varphi}^2 + mg\frac{\rho^2}{a}}_{E_{p,ef}}$$

. Comme INCORPORER Equation

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 \left(1 + \frac{4\rho^2}{a^2}\right) + \underbrace{\frac{1}{2} m \rho^2 . \dot{\varphi}^2 + mg \frac{\rho^2}{a}}_{E_{p,ef}}$$

et INCORPORER Equation

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 \left(1 + \frac{4\rho^2}{a^2}\right) + \underbrace{\frac{1}{2} m \rho^2 . \dot{\varphi}^2 + mg \frac{\rho^2}{a}}_{E_{p,ef}}$$

, avec INCORPORER Equation

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 \left(1 + \frac{4\rho^2}{a^2}\right) + \underbrace{\frac{1}{2} m \rho^2 . \dot{\varphi}^2 + mg \frac{\rho^2}{a}}_{E_{p,ef}}$$

on obtient pour INCORPORER Equation

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 \left(1 + \frac{4\rho^2}{a^2}\right) + \underbrace{\frac{1}{2} m \rho^2 . \dot{\varphi}^2 + mg \frac{\rho^2}{a}}_{E_{p,ef}}$$

, INCORPORER Equation

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 \left(1 + \frac{4\rho^2}{a^2}\right) + \underbrace{\frac{1}{2} m \rho^2 . \dot{\varphi}^2 + mg \frac{\rho^2}{a}}_{E_{p,ef}}$$

. A.N. : INCORPORER Equation

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 \left(1 + \frac{4\rho^2}{a^2}\right) + \underbrace{\frac{1}{2} m \rho^2 . \dot{\varphi}^2 + mg \frac{\rho^2}{a}}_{E_{p,ef}}$$

.5 – INCORPORER Equation

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 \left(1 + \frac{4\rho^2}{a^2}\right) + \underbrace{\frac{1}{2} m \rho^2 . \dot{\varphi}^2 + mg \frac{\rho^2}{a}}_{E_{p,ef}}$$

. En projection sur la base de Frenet suivant

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 \left(1 + \frac{4\rho^2}{a^2}\right) + \underbrace{\frac{1}{2} m \rho^2 . \dot{\varphi}^2 + mg \frac{\rho^2}{a}}_{E_{p,ef}}$$

INCORPORER Equation , on obtient INCORPORER Equation $m \frac{v^2}{R_c} = R + mg\cos\theta$, avec INCORPORER Equation $\theta = \left(\vec{e_r}, \hat{\vec{MP}}\right)$. Il n'y a pas rupture de contact si la réaction reste positive. INCORPORER Equation $R = m \frac{v^2}{R_c} - mg\cos\theta > 0$. Tous les termes sont positifs, car θ est supérieur à π/2. Le contact n'est jamais rompu.

6 – Les frottements font diminuer la quantité d'énergie mécanique donc INCORPORER Equation et INCORPORER Equation . Quand INCORPORER Equation , INCORPORER Equation donc INCORPORER Equation , on retrouve la bille on fond du paraboloïde.

Partie B.
1 – a - INCORPORER Equation INCORPORER Equation.2 , INCORPORER Equation INCORPORER Equation.2 .
b – La variation d'énergie interne INCORPORER Equation est due soit à un échange d'énergie d'interne avec l'extérieur INCORPORER Equation , soit à une production d'énergie interne INCORPORER Equation : INCORPORER Equation
INCORPORER Equation , INCORPORER Equation (le système est isolé), INCORPORER Equation (pas de production).
Finalement : INCORPORER Equation . T'1 varie entre T1 et Tf, et T'2 entre T2 et Tf. INCORPORER Equation , INCORPORER Equation
c - La variation d'entropie INCORPORER Equation est due soit à un échange d'entropie avec l'extérieur INCORPORER Equation , soit à une production d'entropie INCORPORER Equation : INCORPORER Equation . Le système est isolé, il n'y a pas d'échange : INCORPORER Equation , INCORPORER Equation .
Finalement : INCORPORER Equation . A.N. : INCORPORER Equation INCORPORER Equation.2 > 0.
2 – a – Etat stationnaire : La température n'est pas uniforme mais, en un point donné, conserve la même valeur au cours du temps : les grandeurs sont indépendantes du temps.
Etat d'équilibre : la température est uniforme.
INCORPORER Equation pour la résistance électrique, INCORPORER Equation INCORPORER Equation .
b – Comme la barre est en régime stationnaire : INCORPORER Equation . Par conséquent, INCORPORER Equation . On fait un bilan d'entropie pour un élément de longueur de barre compris entre x et x + dx : INCORPORER Equation . De plus, INCORPORER Equation . Finalement, INCORPORER Equation .
Comme le régime est stationnaire INCORPORER Equation INCORPORER Equation , alors INCORPORER Equation (1).
De plus INCORPORER Equation . Finalement, INCORPORER Equation .
c - INCORPORER Equation
Pour un système à l'équilibre INCORPORER Equation car la température est uniforme.
INCORPORER Equation . INCORPORER Equation .
INCORPORER Equation . On déduit INCORPORER Equation INCORPORER Equation.2 et INCORPORER Equation INCORPORER Equation.2 .
d – En reprenant l'expression (1), INCORPORER Equation , on voit que ? s peut s'écrire sous la forme désirée, avec ✔ = 1. En effet, INCORPORER Equation .
INCORPORER Equation .
INCORPORER Equation et INCORPORER Equation .
3 – a - INCORPORER Equation
✕ : Masse volumique de la barre : kg.m-3.
cv : capacité thermique massique à volume constant : INCORPORER Equation.2 .
✢ : conductivité thermique : W.m-1.K-1.
hs : INCORPORER Equation où h est le coefficient conducto-convectif en W.m-2.K-1 et D le diamètre de la barre. L'unité de hs est W.m-3.K-1.
b – En régime stationnaire : INCORPORER Equation .
La solution de l'équation est de la forme : INCORPORER Equation , avec INCORPORER Equation .
A l'aide des conditions aux limites : INCORPORER Equation ; INCORPORER Equation
Finalement, INCORPORER Equation .
c - INCORPORER Equation . INCORPORER Equation INCORPORER Equation W.m-3.K-1.
d - INCORPORER Equation

INCORPORER Equation , INCORPORER Equation .
INCORPORER Equation K-1.m-1, INCORPORER Equation K-1.m-1.

4 – a – On pose INCORPORER Equation .
Pour la résistance R1 : INCORPORER Equation . Il n'y a pas de variation de l'énergie interne de la résistance en régime stationnaire.
L'énergie échangée vient du travail électrique fournit à la résistance, la production d'énergie interne vient de l'effet Joule. La résistance augmente son énergie interne du fait de l'apport d'énergie sous forme de travail électrique, cette quantité étant simultanément perdue son forme de chaleur : c'est l'effet Joule. INCORPORER Equation avec INCORPORER Equation . Finalement, INCORPORER Equation .
De même pour la résistance 2 : INCORPORER Equation .
b – Chaque résistance est au contact d'une source de chaleur de température Ta . Pour R1 : INCORPORER

Equation . INCORPORER Equation .
De même pour R2 : INCORPORER Equation
c - INCORPORER Equation . (2)
Finalement INCORPORER Equation . sp passe par un minimum pour INCORPORER Equation . Cette relation exprime la loi des mailles : INCORPORER Equation
d – Il suffit de reprendre l'expression (2). R = Req. Naturellement, ce résultat était prévisible. Le circuit est équivalent à une résistance de valeur R traversée par un courant I.
A.N. : sp = 2,67.10-3 INCORPORER Equation.2