

Розв'язування нерівностей, що містять модуль.

1 Нерівності виду $|f(x)| \leq a$, $|f(x)| \geq a$, $|f(x)| < a$, $|f(x)| > a$, де $a \in \mathbb{R}$.

$ f(x) \leq a$ 1. $a < 0$, то $x \in \emptyset$ 2. $a = 0$, то $f(x) = 0$ 3. $a > 0$, то $-a \leq f(x) \leq a$ або $\{f(x) \leq a \quad f(x) \geq -a\}$
$ f(x) < a$ 1. $a \leq 0$, то $x \in \emptyset$ 2. $a > 0$, то $-a < f(x) < a$ або $\{f(x) < a \quad f(x) > -a\}$

$ f(x) \geq a$ 1. $a \leq 0$, то $x \in D(f)$ 2. $a > 0$, то $[f(x) \geq a \quad f(x) \leq -a]$
$ f(x) > a$ 1. $a < 0$, то $x \in D(f)$ 2. $a = 0$, то $f(x) \neq 0$ 3. $a > 0$, то $[f(x) > a \quad f(x) < -a]$

Приклад №1. Розв'яжіть нерівність: $|4x + 5| < 3$

Так як $3 > 0$, то ця нерівність рівносильна подвійній нерівності

$$-3 < 4x + 5 < 3 \quad | -5$$

$$-8 < 4x < -2 \quad | \cdot \frac{1}{4}$$

$$-2 < x < -\frac{1}{2}$$

Відповідь: $x \in \left(-2; -\frac{1}{2}\right)$

Приклад №2. Розв'яжіть нерівність $|x^2 + 5x| < 6$.

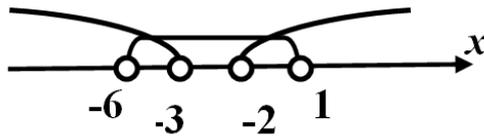
ця нерівність рівносильна системі

$$\{x^2 + 5x < 6 \quad x^2 + 5x > -6\}$$

$$\{x^2 + 5x - 6 < 0 \quad x^2 + 5x + 6 > 0\}$$

{

Знаходимо переріз розв'язків системи нерівностей.



$$x \in (-6; -3) \cup (-2; 1).$$

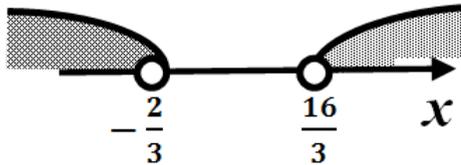
Приклад №3. Розв'яжіть нерівність $|7 - 3x| > 9$.

Перш ніж розв'язувати нерівність, скористаємось властивістю $|-x| = |x|$, тоді маємо $|3x - 7| > 9$.

Ця нерівність рівносильна сукупності

$$\begin{aligned} [3x - 7 > 9 \quad 3x - 7 < -9] & \quad [3x > 16 \quad 3x < -2] \\ [x > \frac{16}{3} \quad x < -\frac{2}{3}] & \end{aligned}$$

Розв'язком нерівності є об'єднання даних проміжків



$$x \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{16}{3}; +\infty\right)$$

Завдання для самостійної роботи:

Розв'язати нерівність:

1. $|5x + 2| \leq 3$

4. $\left|\frac{x+1}{2x-1}\right| < 1$

2. $|x^2 - 2x| < 3$

5. $\left|\frac{2x-1}{x^2-3}\right| \geq 3$

3. $|x^2 - 4x + 3| \geq 1$

2 Нерівність виду $|f(x)| < g(x)$.

При розв'язанні нерівностей такого виду користуємось теоремою:

Теорема 1.1. Нерівність виду $|f(x)| < g(x)$ рівносильна системі

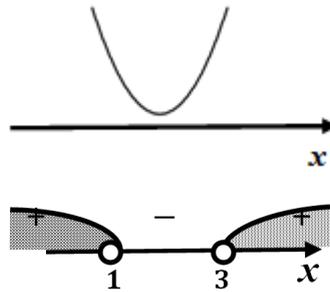
$$\{f(x) < g(x) \quad f(x) > -g(x)\}$$

Приклад №4. Розв'яжіть нерівність $|x - 6| < x^2 - 5x + 9$.

За теоремою 1.1 маємо:

$$\{x - 6 < x^2 - 5x + 9 \quad x - 6 > -x^2 + 5x - 9\}$$

$$\{x^2 - 6x + 15 > 0 \quad x^2 - 4x + 3 > 0\}$$



Відповідь: $x \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$

Завдання для самостійної роботи:

Розв'язати нерівність:

- | | |
|--------------------------------------|---------------------------------|
| 1. $ x^2 - 7x + 6 \leq x^2 + x - 2$ | 4. $ x^2 - 4 < 3x$ |
| 2. $ x^2 + 3x < x + 4$ | 5. $ 4x^2 - 1 < x + 2$ |
| 3. $ 2x - 5 \leq x$ | 6. $ x^2 - 6x + 8 \leq 2x + 1$ |

3 Нерівність виду $|f(x)| > g(x)$.

При розв'язанні нерівностей такого виду користуємось теоремою:

Теорема 1.2. Нерівність виду $|f(x)| > g(x)$ рівносильна системі

$$[f(x) > g(x) \quad f(x) < -g(x)]$$

Приклад №5. Розв'яжіть нерівність $|5x - 3| > x^2 - x - 2$.

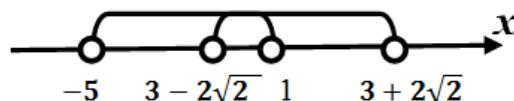
За теоремою 1.2 маємо:

$$[5x - 3 > x^2 - x - 2 \quad 5x - 3 < -x^2 + x + 2]$$

$$[x^2 - 6x + 1 < 0 \quad x^2 + 4x - 5 < 0]$$

[

знаходимо об'єднання даних розв'язків



Відповідь: $x \in (-5; 3 + 2\sqrt{2})$

Завдання для самостійної роботи:

Розв'язати нерівність:

1. $|x^2 + 3x| \geq 2 - x^2$
2. $|x^2 - 3x| \geq x + 5$
3. $|x^2 - 2x - 25| > x^2 + 1$

4. $|x| > x + 2$
5. $|3x - 2| > 2x + 1$
6. $2|x + 1| \geq x - 1$

4 Нерівність виду $|f(x)| > |g(x)|$.

При розв'язанні нерівностей такого виду користуємось теоремою: Теорема 1.3. Нерівність виду $|f(x)| > |g(x)|$ рівносильна нерівності $f^2(x) > g^2(x)$.

Приклад №6. Розв'яжіть нерівність

$$|x^2 - 5x + 4| > |x + 4 - x^2|.$$

За теоремою 1.3 маємо:

$$(x^2 - 5x + 4)^2 \geq (x + 4 - x^2)^2$$

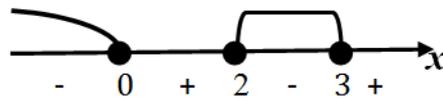
$$(x^2 - 5x + 4)^2 - (x + 4 - x^2)^2 \geq 0$$

$$(x^2 - 5x + 4 - x - 4 - x^2)(x^2 - 5x + 4 + x + 4 - x^2) \geq 0$$

$$(2x^2 - 6x)(-4x + 8) \geq 0$$

$$2x(x - 3) \cdot (-4)(x - 2) \geq 0 \quad | \div (-8)$$

$$x(x - 3)(x - 2) \leq 0$$



Відповідь: $x \in (-\infty; 0] \cup [2; 3]$

Завдання для самостійної роботи:

Розв'язати нерівність:

1. $|3x - 2| > |2x + 1|$
2. $|x^2 + x - 2| > |x + 2|$
3. $|x + 2| < |x - 2|$
4. $|3 + x| \geq |x|$
5. $|4x - 1| \geq |2x + 3|$
6. $|2x^2 + x - 1| > |x + 1|$

5 Нерівності, в яких використовується відкриття модуля.

Приклад №7. Розв'яжіть нерівність $x|2x - 3| < 2$.

Використовуючи правило відкриття модуля, маємо:

$$\{2x - 3 < 0 \mid x(3 - 2x) < 2 \quad \text{або}$$

$$\{2x - 3 \geq 0 \mid x(3 - 2x) < 2$$

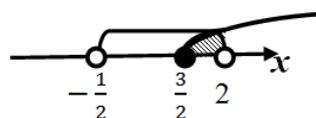
$$\{x < \frac{3}{2} \mid -2x^2 + 3x - 2 < 0 \mid \cdot (-1)$$

$$\{x \geq \frac{3}{2} \mid 2x^2 - 3x - 2 < 0$$

$$\{x < \frac{3}{2} \mid 2x^2 - 3x + 2 > 0$$

$$\{x < \frac{3}{2}$$

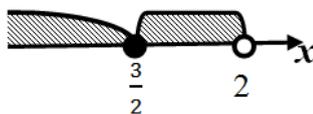
$$\{x \geq \frac{3}{2}$$



$$x < \frac{3}{2}$$

$$x \in [\frac{3}{2}; 2)$$

Знаходимо об'єднання цих розв'язків



Відповідь: $x \in (-\infty; 2)$

Завдання для самостійної роботи:

Розв'язати нерівність:

1. $|3x - 2|x| < 1$

4. $\frac{|x+3|}{x^2+5x+6} > 2$

2. $|x - 4|(x + 2) \geq 4x$

5. $\frac{|x-1|}{x+2} + x - 3 > \frac{1}{x+2}$

3. $\frac{x^2 - |x| - 12}{x-3} \geq 2x$

6 Нерівності, які містять суму або різницю модулів

Приклад №8. Розв'яжіть нерівність $2|x - 3| + |x + 1| \leq 3x + 1$.

Щоб розв'язати дану нерівність, необхідно відкрити модулі, використовуючи означення модуля.

Найпростіше це можна зробити наступним чином:

- 1) Знаходимо значення x , при яких кожний доданок, що містить модуль, дорівнює нулю. (в нашому випадку $x = 3$ і $x = -1$)

2) Малюємо таблицю:

	$(-\infty; -1)$	$[-1; 3)$	$[3; +\infty)$
$ x - 3 $	-	-	+
$ x + 1 $	-	+	+

а) В лівому крайньому стовпці записуємо модулі в тому порядку, в якому вони записані в нерівності.

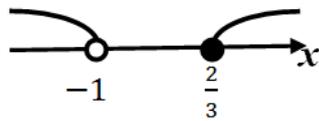
б) Значення x , які знайшли в п.1, розбивають координатну пряму на три проміжки, які ми вносимо в таблицю.

в) Визначаємо знак виразу, який стоїть під знаком модуля на кожному з проміжків.

Розв'язуємо нерівність на кожному з проміжків.

I. $x \in (-\infty; -1)$

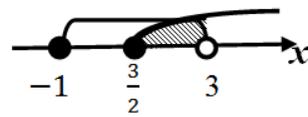
$$\begin{aligned} -2(x - 3) - (x + 1) &\leq 3x + 1 \\ -2x + 6 - x - 1 &\leq 3x + 1 \\ -3x + 5 &\leq 3x + 1 \\ -6x &\leq -4 \\ x &\geq \frac{2}{3} \end{aligned}$$



\emptyset

II. $x \in [-1; 3)$

$$\begin{aligned} -2(x - 3) + (x + 1) &\leq 3x + 1 \\ -2x + 6 + x + 1 &\leq 3x + 1 \\ -4x &\leq -6 \quad | \div (-4) \\ x &\geq \frac{3}{2} \end{aligned}$$



$x \in [\frac{3}{2}; 3)$

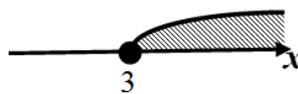
III. $x \in [3; +\infty)$

$$2(x - 3) + x + 1 \leq 3x + 1$$

$$2x - 6 + x + 1 \leq 3x + 1$$

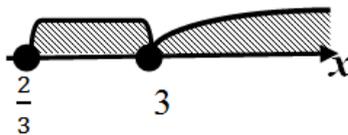
$$0x \leq 6$$

$$x \in R$$



$x \in [3; +\infty)$

Знаходимо об'єднання всіх отриманих розв'язків



Відповідь: $x \in [\frac{3}{2}; + \infty)$

Завдання для самостійної роботи:

Розв'язати нерівність:

1. $|x + 1| + |x - 2| < 5$

2. $|x + 3| - |x - 4| \leq 1$

3. $|x + 2| + |x - 3| > 7$

4. $|x + 2| - |x - 3| \geq 2x - 1$

5. $x^2 + 2|x - 1| + 7 \leq 4|x - 2|$

6. $\frac{|2-x|-x}{|x-3|-1} \leq 2$