



**MODELO QUE PODRÁ SER MODIFICADO A
RESULTAS DE LAS DISTINTAS REUNIONES**

Prueba de acceso a la Universidad (PAU)
CURSO 2024-25

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

- Responda en el pliego en blanco a una opción (A o B) de cuatro de las cinco preguntas cualesquiera que se proponen. Todas las preguntas se calificarán con un máximo de 2,5 puntos.
- Agrupaciones de preguntas que sumen más de 10 puntos o no coincidan con las indicadas conllevarán la anulación de la(s) última(s) pregunta(s) seleccionada(s) y/o respondida(s)

Pregunta 1. Opción A Tras ingerir cierta cantidad de alcohol en ayunas, el nivel de etanol en sangre (medido en mg/dl) de una persona se ajusta aproximadamente, durante las 5 horas siguientes a la ingesta, a la función: $f(x) = \begin{cases} -60x^2 + 160x, & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{10}{3}(x^2 - 14x + 48), & 2 < x \leq 5 \end{cases}$ donde x representa el tiempo (en horas) transcurrido desde la ingesta.

a) Entre las 0 y las 5 horas ¿el nivel de etanol en sangre se comporta de manera continua? ¿En algún momento el nivel de etanol es nulo? ¿El nivel de etanol aumenta siempre en ese intervalo? ¿En qué momento se alcanza el nivel máximo de etanol? ¿Y el nivel mínimo? (1,75 puntos)

Resolución

a1) para $x \neq 2$, f es continua por serlo las funciones polinómicas.

$$f(x) = f(2) = -60 \cdot 2^2 + 160 \cdot 2 = 80 = f(x) = \frac{10}{3}(2^2 - 14 \cdot 2 + 48) = 80 \Rightarrow \text{continua en } 2$$

entre las 0 y las 5 horas el nivel de etanol en sangre se comporta de manera continua.

a2) veamos ahora si $f(x) = 0$. O sea,

$$\begin{cases} -60x^2 + 160x = 0, & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{10}{3}(x^2 - 14x + 48) = 0, & 2 < x \leq 5 \end{cases}$$

$$\text{Queda } 0 \leq x \leq 2, \quad 20x(-3x + 8) = 0, \quad x = 0 \quad x = \frac{8}{3}h = 2h \quad 40 \text{ min}$$

ó

$$2 < x \leq 5, \quad x^2 - 14x + 48 = 0, \quad x = \frac{14 \pm 2}{2}, \quad x = 6; \quad x = 8 \text{ (soluciones no válidas por ser } x \leq 5)$$

el nivel de etanol es nulo a las 0 h, a las 2 h 40 min siguientes a la ingesta.

a3) y a4) Para el resto de preguntas:

Si $x \neq 2$, f es derivable por serlo las funciones polinómicas,

$$f'(x) = \begin{cases} -120x + 160, & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ \frac{10}{3}(2x - 14), & 2 < x \leq 5 \end{cases}$$

$$f'(x) = -120 \cdot 2 + 160 = -80 \neq f'(x) = \frac{10}{3}(2 \cdot 2 - 14) = \frac{-100}{3} \Rightarrow \text{NO derivable en } x = 2$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 0 \leq x < 2, \quad -120x + 160 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{3} = 1h \quad 20 \text{ min}$$

ó

$2 < x \leq 5$, $2x - 14 = 0 \Rightarrow x = 7$ (imposible, por ser $x \leq 5$)

Hagamos una tabla de signos de $f'(x)$

	$\left(0, \frac{4}{3}\right)$	$\frac{4}{3}$	$\left(\frac{4}{3}, 2\right)$	2	$(2, 5)$
$f'(x)$	+	0	-	≠	-
$f(x)$	creciente	máximo	decreciente	decreciente	decreciente

f sólo es creciente en el intervalo $\left(0, \frac{4}{3}\right)$

$$\text{Máximo: } x = \frac{4}{3}, f\left(\frac{4}{3}\right) = -60\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 160\frac{4}{3} = \frac{320}{3} \cong 106,67$$

El nivel de etanol sólo crece hasta 1h 20 min después de haber ingerido, alcanzando en ese momento el máximo, que es aproximadamente 106,67 mg/dl.

b) Si la persona es un conductor novel y el límite de alcohol en sangre permitido a un conductor novel es de 30 mg/dl, ¿podría esta persona conducir 1 hora después de la ingesta? ¿Y a las 5 horas? Razona tu respuesta. (0,75 puntos)

Resolución

$$\text{A las 1 h el etanol en sangre es } f(1) = \frac{10}{3}(1^2 - 14 \cdot 1 + 48) = \frac{1000}{3} = 100 \text{ mg/l} > 30 \text{ mg/l}.$$

Luego, a las 1 h no puede conducir

$$\text{A las 5 h el etanol en sangre es } f(5) = \frac{10}{3}(5^2 - 14 \cdot 5 + 48) = 10 \frac{\text{mg}}{\text{l}} < 30 \text{ mg/l}, \text{ que también se puede}$$

ver en la gráfica. Luego, a las 5 h Sí puede conducir

Pregunta 1. Opción B. Dada la función $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$:

a) Encuentra la primitiva F de f para la que se cumple que pasa por el punto $(2, 0)$. (0,5 puntos)

Resolución

$$\text{Las primitivas de } f \text{ son de la forma } F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + k = \frac{3x^4 - 8x^3 - 18x^2}{12} + k$$

$$\text{Como pasa por } (2, 0), \text{ entonces } 0 = F(2) = \frac{3 \cdot 2^4 - 8 \cdot 2^3 - 18 \cdot 2^2}{12} + k = \frac{-88}{12} + k; k = \frac{22}{3}$$

$$\text{La primitiva es } F(x) = \frac{3x^4 - 8x^3 - 18x^2}{12} + \frac{22}{3} = \frac{3x^4 - 8x^3 - 18x^2 + 88}{12}$$

b) Entre los puntos $x = 0$ y $x = 1$ la función f ¿toma siempre valores positivos, siempre negativos o valores tanto positivos como negativos? Si la función toma siempre valores del mismo signo entre $x = 0$ y $x = 1$, calcula el área delimitada por la función f y el eje X en ese intervalo. (2 puntos)

Resolución

$$\text{Observa que } f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x = x(x^2 - 2x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ó } x = \frac{2 \pm 4}{2}, x = -1, x = 3$$

Hagamos una tabla de signos de $f(x)$

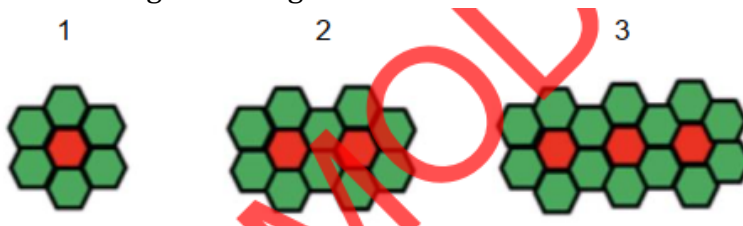
	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$f(x)$	-	0	+	0	-	0	+

Como en el intervalo $(0, 3)$, $f(x) < 0$, entonces entre $x = 0$, $x = 1$ f siempre toma valores negativos.

$$\text{Como } F(x) = \frac{3x^4 - 8x^3 - 18x^2 + 88}{12} \text{ es una primitiva de } f, \text{ por la regla de Barrow, el área que se pide es}$$

$$A = - \int_0^1 f(x) dx = - [F(1) - F(0)] = - \frac{3.1^4 - 8.1^3 - 18.1^2 + 88}{12} + \frac{3.0^4 - 8.0^3 - 18.0^2 + 88}{12} = \frac{23}{12} \cong 1,92 \text{ u}^2$$

Pregunta 2. Opción A. Observa las siguientes figuras:



a) ¿Cuántos hexágonos rojos y cuántos verdes habrá en la figura número 10? Encuentra una fórmula que permita determinar el número de hexágonos de cada color a partir del número de la figura. (2 puntos)

Resolución

La secuencia de hexágonos rojos es 1, 2, 3, ... Es una p.a. de diferencia 1. El término general es $r_n = n$

En la figura 10 habrá $r_{10} = 10$ hexágonos rojos

La secuencia de hexágonos verdes es 6, 10, 14, ... Es una p.a. de diferencia 4. El término general es

$v_n = 6 + 4(n - 1) = 4n + 2$. En la figura 10 habrá $v_{10} = 4 \cdot 10 + 2 = 42$ hexágonos verdes

b) ¿Puede existir una figura con 152 hexágonos verdes? En caso afirmativo, ¿qué número de figura sería? Si no es posible, explica por qué. (0,5 puntos)

Resolución Si fuese así, $4n + 2 = 152 \Rightarrow n = \frac{150}{4} = 37,5$, imposible porque n es un número natural

Pregunta 2. Opción B. Un artesano teje gorros y bufandas. Cada gorro lleva 50 metros de lana de color blanco y 40 m de color negro. Cada bufanda lleva 100 m de color blanco y 100 m de color negro. Dispone de 2200 m de lana de color blanco y 2000 m de color negro y el número de gorros debe ser, a lo sumo, el doble que el de bufandas.

a) Explica cuál de las dos siguientes figuras sirve para representar el conjunto de posibles soluciones de a la pregunta ¿Cuántos gorros y bufandas puede tejer? ¿Es válido como solución al problema cualquier punto dentro de la región factible? ¿Por qué? (1 punto)

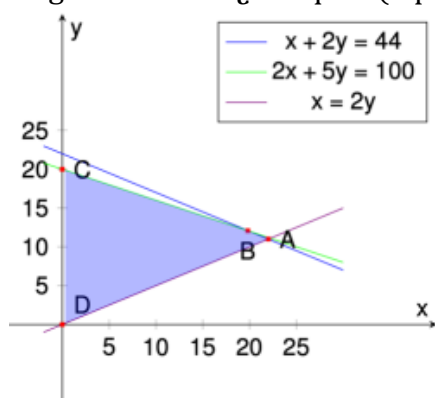


Figura 1: Región factible.

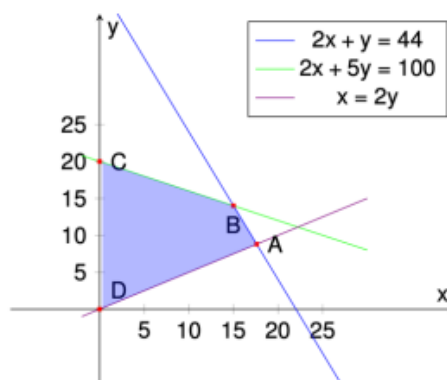


Figura 2: Región factible.

b) ¿Puede tejer 12 gorros y 8 bufandas? Si vende cada gorro a 12 euros y cada bufanda a 18 euros, ¿cuántos gorros y bufandas debe tejer para maximizar los ingresos? (1,5 puntos)

Resolución

Representamos los datos del problema:

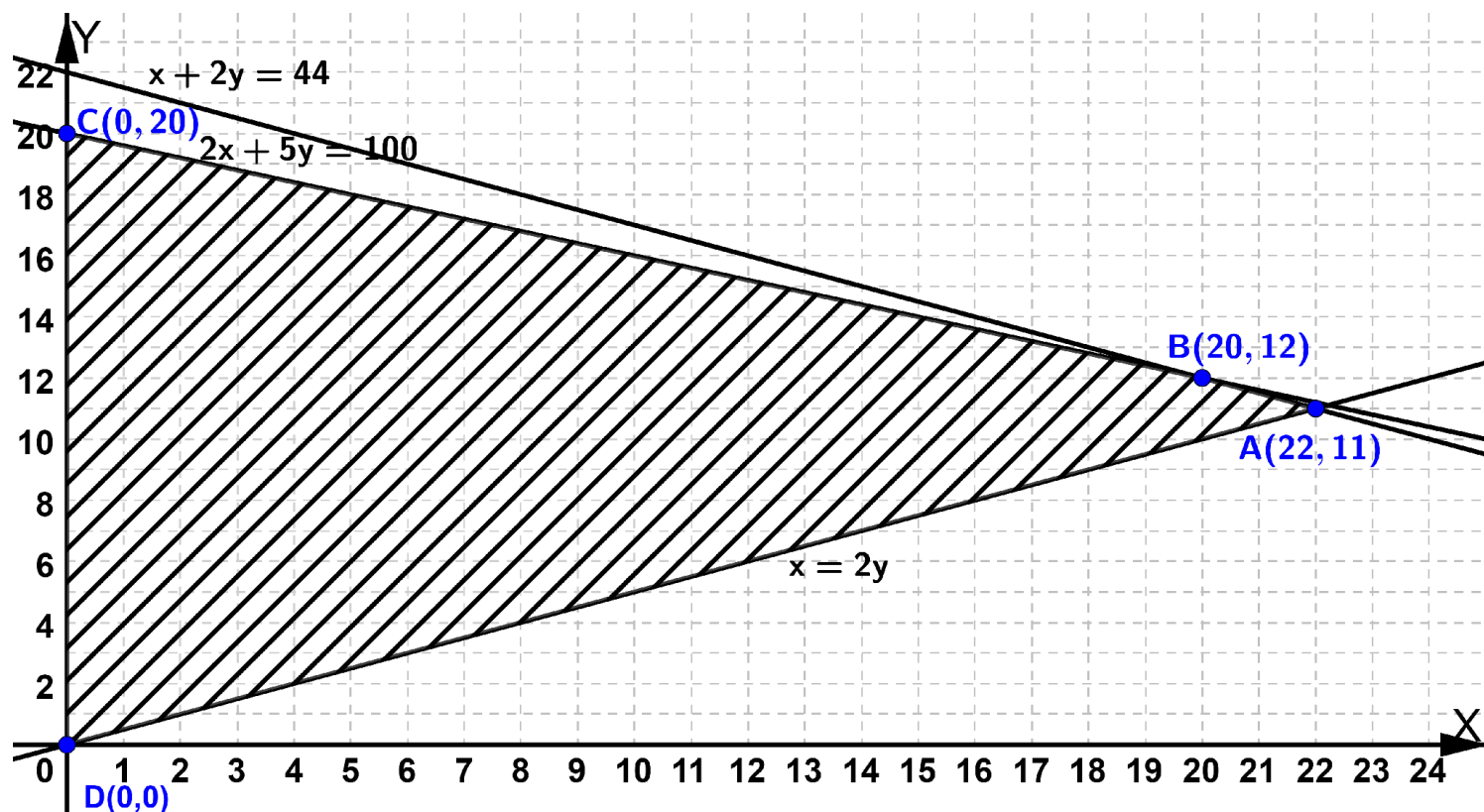
	nº de unidades	metros de lana blanca	metros de lana negra	ingresos (en €)
gorros	x	$50x$	$40x$	$12x$

bufandas	y	100y	100y	18y
total	x + y	50x + 100y	40x + 100y	12x + 18y

Restricciones:

$$\{50x + 100y \leq 2200 \quad 40x + 100y \leq 2000 \quad x \leq 2y \quad x, y \geq 0\} \Rightarrow \{x + 2y \leq 44 \quad 2x + 5y \leq 100 \quad x \leq 2y \quad x, y \geq 0\}$$

Obtengamos la región factible: dibujamos los ejes de coordenadas y hacemos la escala adecuada



a) El conjunto de posibles soluciones se representa en la figura 1.

Con respecto a la pregunta ¿cuántos gorros y bufandas puede tejer? existen muchas combinaciones posibles. Cualquier par de valores naturales que pertenezcan a la región factible dibujada.

Y con respecto a las preguntas ¿es válido como solución al problema cualquier punto dentro de la región factible?, ¿por qué? solo son válidos los puntos que tengan coordenadas enteras porque el número de gorros y bufandas no puede ser decimal. Si se desea optimizar una función la solución al problema estará situado en los bordes de la región factible.

b) Con respecto a la 1ª pregunta, si se puede tejer 12 gorros y 8 bufandas porque el punto (12, 8) pertenece a la región factible.

Con respecto a la 2ª pregunta, veamos en qué vértice alcanza el valor máximo los ingresos $f(x, y) = 12x + 18y$

$$f(A) = f(22, 11) = 12 \cdot 22 + 18 \cdot 11 = 462 \quad f(B) = f(20, 12) = 12 \cdot 20 + 18 \cdot 12 = 456$$

$$f(C) = f(0, 20) = 12.0 + 18.20 = 360 \quad f(D) = f(0, 0) = 12.0 + 18.0 = 0$$

Los ingresos máximos son 462 € y se obtienen haciendo 22 gorros y 11 bufandas.

Pregunta 3. Opción A. Dado el sistema: $\{(m-1)x + (m-4)y = 6 \quad 2x - y = 2m\}$

a) Selecciona un valor de m para el que el sistema tenga solución única y encuentra la solución en ese caso. (1,5 puntos)

Resolución

Las matrices de coeficientes y ampliada son $A = \begin{pmatrix} m-1 & m-4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y

$$A^* = \begin{pmatrix} m-1 & m-4 & 6 \\ 2 & -1 & 2m \end{pmatrix}$$

$$\det A = -m + 1 - 2m + 8 = -3m + 9 = 0 \Leftrightarrow m = 3$$

– Si $m \neq 3$, $\det A \neq 0$, $\text{rg } A = 2 = \text{rg } A^* = n^\circ$ de incógnitas. Luego, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, tiene solución única.

Tomemos, por ejemplo, $m = 1$. La matriz del sistema es

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 6 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad f1: (-3) \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y corresponde al sistema } \begin{cases} -2x - y = 2 \\ 2x - (-2) = 2, x = 0 \end{cases} \text{ solución: } x = 0, y = -2$$

b) Para $m = 3$, ¿pueden ser $(x, y) = (3, 0)$ y $(x, y) = (2, -2)$ soluciones de ese sistema? ¿Podría tener otras soluciones para $m = 3$? ¿Cuántas? Explica tu respuesta. (1 punto)

Resolución

Si $m = 3$, $\det A = 0$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Como $f2 = f1$, $\text{rg } A = 1$

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix} \quad f2 = f1 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \text{rg } A^* = 1.$$

Luego, $\text{rg } A^* = \text{rg } A = 1 < n^\circ$ de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

Como el sistema se reduce a la ecuación $2x - y = 6$, despejando $y = 2x - 6$.

Llamando $x = k$, las infinitas soluciones son $\{x = k \quad y = 2k - 6, \text{ con } k \in \mathbb{R}\}$

Veamos si $(x, y) = (3, 0)$ es solución: $\{3 = k \quad 0 = 2k - 6 \rightarrow k = 3 \quad 3 = 3 \text{ cierto. Luego sí que es solución}\}$

Veamos si $(x, y) = (2, -2)$ es solución: $\{2 = k \quad -2 = 2k - 6 \rightarrow k = 2 \quad 2 = 2 \text{ cierto. Luego también es solución}\}$

Para la última pregunta, ya hemos visto que el sistema tiene infinitas soluciones

Pregunta 3. Opción B. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -m & m \\ m & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2m \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} m & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \text{ y } E = \begin{pmatrix} 1 & m \end{pmatrix}$$

a) Si $\frac{1}{3}(A + BC)D = E$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m. (1,5 puntos)

Resolución

Sustituyendo, $\frac{1}{3}[(-m \ m - 2 \ 2m) + (1 \ -1 \ 1 \ 2m)(m \ 2 \ -1 \ 0)](x \ y) = (1 \ m)$. Operamos:

$$[(-m \ m \ -2 \ 2m \ 2) + (m \ +1 \ 2 \ -m \ 2)](x \ y) = 3(1 \ m); (1 \ m \ m \ 4)(x \ y) = (3 \ 3m); \text{ queda } \begin{cases} x + my = 3mx + 4y = 3m \end{cases}$$

b) Encuentra, al menos, un valor de m para el cual el sistema tenga infinitas soluciones. (1 puntos)

Resolución

El sistema es $\begin{cases} x + my = 3mx + 4y = 3m \end{cases}$

Las matrices de coeficientes y ampliada son $A = (1 \ m \ m \ 4)$ y $A^* = (1 \ m \ 3 \ m \ 4 \ 3m)$

$$\det A = 4 - m^2 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2$$

– Si $m \neq \pm 2$, $\det A \neq 0$, $\text{rg } A = 2 = \text{rg } A^* = n^\circ$ de incógnitas. Luego, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, tiene solución única.

– Si $m = 2$, $\det A = 0$, $A = (1 \ 2 \ 2 \ 4)$. Como $f_2 = 2f_1$, $\text{rg } A = 1$

$$A^* = (1 \ 2 \ 3 \ 2 \ 4 \ 6) \quad f_2 = 2f_1 \quad (1 \ 2 \ 3), \text{ rg } A^* = 1.$$

Luego, $\text{rg } A^* = \text{rg } A = 1 < n^\circ$ de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

– Si $m = -2$, $\det A = 0$, $A = (1 \ -2 \ -2 \ 4)$. Como $f_2 = -2f_1$, $\text{rg } A = 1$

$$A^* = (1 \ -2 \ 3 \ -2 \ 4 \ -6) \quad f_2 = -2f_1 \quad (1 \ -2 \ 3), \text{ rg } A^* = 1.$$

Luego, $\text{rg } A^* = \text{rg } A = 1 < n^\circ$ de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema también es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

Conclusión: para $m = \pm 2$ el sistema tiene infinitas soluciones

Pregunta 4. Opción A. Una empresa comercializa cromos de unos dibujos animados. El 60% de los cromos son de personajes del «Reino Rosa» y el resto de los personajes del «Reino Gris». Por otro lado, uno de cada tres cromos del «Reino Rosa» y uno de cada cinco del «Reino Gris» tienen el borde dorado.

a) Elegido un cromo al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga el borde dorado? (1,25 puntos)

b) Si se elige al azar un cromo entre los que no tienen el borde dorado, ¿cuál es la probabilidad de que sea del «Reino Rosa»? (1,25 puntos)

Resolución

A = el cromo es de Reino Rosa B = el cromo es de Reino Gris D = el cromo tiene el borde dorado

$$\text{Según el enunciado, } p(A) = 0,6 = \frac{3}{5} \quad p(B) = 1 - 0,6 = 0,4 = \frac{2}{5} \quad p(D/A) = \frac{1}{3} \quad p(D/B) = \frac{1}{5}$$

a) Piden $p(D)$, que, usando el teorema de probabilidad total, es

$$p(D) = p(A)p(D/A) + p(B)p(D/B) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{7}{25} = 0,28 = 28\%$$

b)

Se

pide

$$p\left(\frac{A}{D^c}\right) = \frac{p(A \cap D^c)}{p(D^c)} = \frac{p(A) - p(A \cap D)}{p(D^c)} = \frac{p(A) - p(A)p(D/A)}{1 - p(D)} = \frac{\frac{3}{5} - \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3}}{1 - \frac{7}{25}} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{18}{25}} = \frac{2}{9} \cong 0,5556 = 55,56\%$$

Pregunta 4. Opción B. Una marca de bolsos comercializó tres modelos la pasada primavera. El 3% del total de bolsos fabricados salieron defectuosos. Por otra parte, el 30% de todos los bolsos fabricados eran de tipo A; el 35%, de tipo B y el resto, de tipo C. Además, se sabe que el 3% de los de tipo A y el 5% de los de tipo C salieron defectuosos.

a) Elegido al azar un bolso entre los de tipo B, ¿cuál es la probabilidad de que sea defectuoso?

(1,25 puntos)

b) Elegido un bolso al azar entre los defectuosos, ¿cuál es la probabilidad de que sea de tipo B?

(1,25 puntos)

Resolución

A = el bolso es del tipo A B = el bolso es del tipo B C = el bolso es del tipo C D = el bolso es defectuoso

Según el enunciado, $p(D) = 0,03$ $p(A) = 0,3$ $p(B) = 0,35$ $p(C) = 1 - 0,3 - 0,35 = 0,35$

$p(D/A) = 0,03$ $p(D/C) = 0,05$

a) Pide $p(D/B) = x$. Usando el teorema de probabilidad total

$$p(D) = p(A)p(D/A) + p(B)p(D/B) + p(C)p(D/C) \Rightarrow 0,03 = 0,3 \cdot 0,03 + 0,35 \cdot x + 0,35 \cdot 0,05$$

Operando y despejando: $0,03 = 0,35x + 0,0265$, $0,35x = 0,0035$, $x = \frac{0,0035}{0,35} = 0,01$. O sea, $p(D/B) = 1\%$

$$b) \text{ Se pide } p\left(\frac{B}{D}\right) = \frac{p(B \cap D)}{p(D)} = \frac{p(B)p(D/B)}{p(D)} = \frac{0,35 \cdot 0,01}{0,03} \cong 0,1167 = 11,67\%$$

Pregunta 5. Opción A. Una fábrica hace un control de calidad para determinar la proporción de tabletas de chocolate que realmente contienen la cantidad de leche que indican en el envoltorio.

a) ¿Cuál debería ser el tamaño muestral mínimo para determinar la verdadera proporción de tabletas con el contenido en leche indicado a partir de la proporción muestral con un error de estimación máximo de 0,05 y un nivel de confianza del 95%? (1 punto)

Resolución

La v.a. “proporción de tabletas de cada muestra, elegida al azar, que realmente contienen la cantidad de

leche que indican en el envoltorio”, tiene una distribución Normal $N\left(p, \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$ donde p es la proporción poblacional, n el tamaño de la muestra y al no conocer el valor de la proporción muestral y no poder estimarla, aún no tenemos una muestra, se considera el caso más desfavorable, $\hat{p} = 0,5$

El intervalo de confianza a nivel de confianza del 95% para la proporción poblacional, p,

es $I_c = (\hat{p} - E, \hat{p} + E)$, siendo $E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$, el máximo error de estimación.

$$\frac{1+n_c}{2} = \frac{1+0,95}{2} = 0,975 ; p(Z < z_{\alpha/2}) = 0,975 \text{ usando la tabla de la } N(0,1) \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96.$$

Piden hallar n tal que

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \leq 0,05 \text{ elevando al cuadrado } \rightarrow (z_{\alpha/2})^2 \cdot \frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n} \leq 0,05^2$$

Despejando, $n \geq (z_{\alpha/2})^2 \cdot \frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{0,05^2} = 1,96^2 \cdot \frac{0,5(1-0,5)}{0,05^2} \cong 384,2$. El tamaño mínimo es 385 tabletas.

b) Finalmente, se decidió analizar 300 tabletas. Si la proporción muestral y el nivel de confianza son los mismos, ¿se obtendrá un intervalo más amplio con 300 tabletas o con el número de tabletas obtenido en el apartado anterior? (1 punto)

Resolución

$$z_{\alpha/2} = 1,96; \hat{p} = 0,5 \text{ y ahora } n = 300. \text{ El error sería } E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,5(1-0,5)}{300}} \cong 0,0566$$

El error es mayor que 0,05 y el intervalo de confianza será más amplio.

Al disminuir el tamaño muestral, la estimación empeora, aumentando la amplitud del intervalo de confianza.

c) Si a partir de la misma muestra de tamaño 300 se quisiera obtener un intervalo de confianza al 99% de confianza, ¿este último intervalo será más amplio o menos? ¿Por qué? (0,5 puntos)

Resolución

Si aumentamos el nivel de confianza entonces aumenta $z_{\alpha/2}$ y, por tanto, también lo hace el error,

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \text{ por lo que aumenta la amplitud del intervalo, } A = 2E = 2z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

Pregunta 5. Opción B. El nivel de cierta hormona en sangre sigue distribución normal con desviación típica 1,2 UI/l. Para una muestra de 200 personas se obtuvo, con un nivel de confianza al 90%, el intervalo de confianza (8,5608 ; 8,8392) para estimar el nivel medio de esa hormona en la sangre de las personas en la muestra.

a) ¿Cuál fue el nivel medio de la hormona en la sangre en esas 200 personas? (1 punto)

b) En el intervalo anterior, ¿cuánto vale el error de estimación? (0,75 puntos)

Resolución

$X =$ nivel de cierta hormona en sangre $\rightarrow N(\mu; 1,5)$. El intervalo de confianza a nivel de confianza del 90% para el nivel medio, μ , es $I_c = (\bar{x} - E, \bar{x} + E)$, siendo $\bar{x}$ la media de la muestra de

tamaño $n = 200$ y $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ el máximo error de estimación.

a) El nivel medio de la muestra, $\bar{x}$, es el punto medio del intervalo de confianza, $I_c = (8,5608 ; 8,8392)$

Luego, el nivel medio que se pide es $\bar{x} = \frac{8,8392 + 8,5608}{2} = 8,7 \text{ UI/l}$

b) El error de estimación, E , es la mitad de la amplitud del intervalo de confianza, $I_c = (8,5608 ; 8,8392)$

Luego, el error que se pide es $E = \frac{8,8392 - 8,5608}{2} = 0,1392 \text{ UI/l}$

c) Uno de los dos intervalos siguientes: (8,5681 ; 8,8319) y (8,5514 ; 8,8486) se obtuvo a partir de la misma muestra al 88% de confianza. Razona adecuadamente cuál de los dos corresponde al nivel de confianza del 88%. (0,75 puntos)

Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$, $F(1,64) = 0,95$, $F(1,96) = 0,975$, $F(2,33) = 0,99$ y $F(2,58) = 0,995$.

Expresión del intervalo de confianza, al nivel de confianza $1 - \alpha$, para la media de una población con distribución normal de varianza conocida, a partir de una muestra de tamaño n ,

 $(\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, donde $z_{\alpha/2}$ representa el valor que cumple que $p(|Z| < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$

para

una variable Z con distribución $N(0, 1)$, es decir, el valor que cumple

que $p(|Z| < z_{\alpha/2}) = p(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$

Resolución

Como el nivel de confianza ha disminuido (pasa del 90% al 88%) entonces disminuye $z_{\alpha/2}$ y, por tanto,

también lo hace la amplitud del intervalo. Luego, el intervalo será (8,5681 ; 8,8319)