Скалярний, векторний, мішаний добутки векторів.

1. **Скалярним добутком векторів** називається число, що дорівнює добутку довжин векторів на косинус кута між ними:

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\left(\bar{a}\ \hat{,}\ \bar{b}\right)$$

Якщо вектори задані своїми координатами: $\bar{a}=\left(a_x;\ a_y;\ a_z\right)$, $\bar{b}=\left(b_x;\ b_y;\ b_z\right)$, то скалярний добуток обчислюють за формулою:

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$$

Кут між векторами обчислюють за формулою:

$$\cos\left(\bar{a}\ \hat{,}\ \bar{b}\right)=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.$$

Умова перпендикулярності векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ має вигляд:

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0.$$

Скалярний квадрат вектора дорівнює:

$$\bar{a}^2=\bar{a}\cdot\bar{a}=|\bar{a}|\cdot|\bar{a}|\cdot\cos(0)=|\bar{a}|^2.$$

Проекція вектора $\bar{a}$ на напрям вектора $\bar{b}$:

$$np_{\bar{b}}\bar{a}=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|}.$$

2. **Векторним добутком двох векторів** $\bar{a}$ і $\bar{b}$ називається третій вектор $\bar{c}$, який задовольняє умові:

1) $|\bar{c}|=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\sin\left(\bar{a}\ \hat{,}\ \bar{b}\right)$;
2) $\bar{c}\perp\bar{a}$, $\bar{c}\perp\bar{b}$;

3) $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ утворюють праву трійку векторів, тобто третій вектор має

EMBED

Рис. 4.1

такий напрям, що при спостереженні з його кінця найближчий поворот від вектора $\overline{a}$ до $\overline{b}$ виконується проти годинникової стрілки.

Векторний добуток позначається символом $\overline{a} \times \overline{b}$. За визначенням випливає, що $\overline{a} \times \overline{b} = -(\overline{b} \times \overline{a})$.

Модуль векторного добутку дорівнює площі паралелограма, побудованого на $\overline{a}$ і $\overline{b}$:

$$S_{пар} = |\overline{a} \times \overline{b}|.$$

Площа трикутника обчислюється за формулою:

$$S_{тр} = \frac{1}{2} S_{пар} = \frac{1}{2} |\overline{a} \times \overline{b}|.$$

Векторній добуток векторів, які задані своїми координатами, обчислюються за формулою:

$$|\overline{a} \times \overline{b}| = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Умова колінеарності двох векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ має вигляд:

$\overline{a} \times \overline{b} = \overline{0}$ (або $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$).

Векторні добутки ортів дорівнюють:

$\overline{i} \times \overline{j} = \overline{k}$; $\overline{j} \times \overline{k} = \overline{i}$; $\overline{k} \times \overline{i} = \overline{j}$;

$\overline{i} \times \overline{i} = \overline{0}$; $\overline{j} \times \overline{j} = \overline{0}$; $\overline{k} \times \overline{k} = \overline{0}$.

3. **Мішаним добутком трьох векторів** називається добуток $(\overline{a} \times \overline{b}) \cdot \overline{c}$. Частіше мішаний добуток позначається $\overline{a}\overline{b}\overline{c}$.

Якщо вектори задані своїми координатами, то мішаний добуток знаходять за формулою:

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Об'єм паралелепіпеду, який побудований на векторах $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ як на сторонах, дорівнює модулю мішаного добутку цих векторів:

$$V_{пар} = \left|\overline{a}\overline{b}\overline{c}\right|.$$

Для об'єму піраміди маємо наступну формулу:

$$V_{піраміди} = \frac{1}{6}\left|\overline{a}\overline{b}\overline{c}\right|.$$

Умова компланарності трьох векторів має вигляд: $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = 0$.

Зразки розв'язування задач.

Задача 1. Знайти скалярний добуток векторів $\overline{a} = 4\overline{k} - \overline{i}$, $\overline{b} = 3\overline{j} + \overline{i} - \overline{k}$.

Розв'язання. Знайдемо координати векторів: $\overline{a}(-1;\ 0;\ 4)$, $\overline{b}(1;\ 3;\ -1)$. Тоді скалярний добуток дорівнює $\overline{a} \cdot \overline{b} = (-1)\cdot 1 + 0\cdot 3 + 4\cdot(-1) = -1 - 4 = -5$.

Задача 2. Знайти кут між діагоналями паралелограма, який побудований на векторах $\overline{a} = \overline{i} + 2\overline{j} - \overline{k}$, $\overline{b} = 3\overline{j} - \overline{i} - 4\overline{k}$.

Розв'язання. Як відомо, діагоналі паралелограма є $\overline{c} = (\overline{a} + \overline{b})$ та $\overline{d} = (\overline{a} - \overline{b})$. Знайдемо ці вектори:

$$\overline{c} = \overline{a} + \overline{b} = (\overline{i} + 2\overline{j} - \overline{k}) + (3\overline{j} - \overline{i} - 4\overline{k}) = 5\overline{j} - 5\overline{k};$$

$$\overline{c} = \overline{a} + \overline{b} = (0;\ 5;\ -5);$$

$$\overline{d} = \overline{a} - \overline{b} = (\overline{i} + 2\overline{j} - \overline{k}) - (3\overline{j} - \overline{i} - 4\overline{k}) = 2\overline{i} - \overline{j} + 3\overline{k};$$

$$\overline{d} = \overline{a} - \overline{b} = (2;\ -1;\ 3).$$

Тоді косинус кута між діагоналями знаходиться за формулою:

$$\cos\left(\overline{c}\ \hat{,}\ \overline{d}\right) = \frac{\overline{c}\cdot\overline{d}}{|\overline{c}|\cdot|\overline{d}|} = \frac{0\cdot 2 + 5\cdot(-1) + (-5)\cdot 3}{\sqrt{5^2 + (-5)^2}\cdot\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2}} = \frac{-5-15}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{14}} = \frac{-20}{5\sqrt{2}\cdot\sqrt{2\cdot 7}} =$$

$$= -\frac{20}{10\sqrt{7}} = -\frac{2}{\sqrt{7}} = -\frac{2\sqrt{7}}{7};$$

$$\cos\left(\overline{c}\ \hat{,}\ \overline{d}\right) = \arccos\left(-\frac{2\sqrt{7}}{7}\right).$$

Задача 3. Задано вектори $\overline{a} = 12\overline{i} - 3\overline{j} - 3\overline{k}$, $\overline{b} = \overline{i} + 2\overline{j} + 4\overline{k}$, $\overline{c} = \overline{i} - 3\overline{j} - 2\overline{k}$. Обчислити проекцію вектора $\overline{b} + \overline{c}$ на вектор $\overline{a}$.

Розв'язання. Знайдемо координати векторів $\overline{b}+\overline{c}=(1+1;\ 2-3;\ 4-2)$; $\overline{b}+\overline{c}=(2;\ -1;\ 2)$ та $\overline{c}=(12;\ -3;\ -3)$.

Обчислимо проекцію $(\overline{b}+\overline{c})$ на вектор $\overline{a}$ за формулою:

$$np_{\overline{a}}(\overline{b}+\overline{c})=\frac{(\overline{b}+\overline{c})\cdot\overline{a}}{|\overline{a}|}=\frac{2\cdot 12+(-1)\cdot(-3)+2(-3)}{\sqrt{12^2+(-3)^2+(-3)^2}}=\frac{24+3-6}{\sqrt{144+9+9}}=\frac{21}{\sqrt{162}}=\frac{21}{9\sqrt{2}}=\frac{7\sqrt{2}}{6}.$$