

7 класс, 2014 год

1. У моего телефона замечательный семизначный номер. Его первые цифры одинаковы, остальные четыре – тоже одинаковы. Более того, сумма всех семи цифр номера равняется числу, первая цифра которого совпадает с первой цифрой номера телефона, а вторая – с последней. Каков же мой номер телефона?
2. Анна, Лада и Диана устроили соревнование по бегу на роликовых коньках. Вначале у всех было одинаковое количество конфет, но после каждого забега девочка, прибежавшая последней, отдавала девочке, занявшей первое место – 2 конфеты, а девочке, занявшей 2-ое место – 1 конфету. Не было ни одного забега, в котором первое или второе место заняли бы две девочки. После пяти забегов у Анны стало 18 конфет, у Лады – 8 конфет, у Дианы – 4 конфеты. Сколько раз каждая девочка занимала 1-ое, 2-ое или 3-е место?
3. В следующих многозначных числах цифры заменены буквами (одинаковые цифры – одинаковыми буквами, а разные – разными). Оказалось, что ДЕВЯНОСТО делится на 90, а ДЕВЯТКА делится на 9. Может ли СОТКА делиться на 9?
4. Какое максимальное число точек пересечения могут иметь восемь окружностей?
5. В одном городе 20% семей, имеющих кошек, имеет также собак, 25% семей, имеющих собак, имеет также и кошек, а 20% всех семей не имеют ни кошек, ни собак. Какой процент семей в этом городе имеет и кошек, и собак?
6. Произведение всех натуральных делителей числа n (включая и само n) оканчивается ровно на 15 нулей. На какое наибольшее количество нулей может оканчиваться число n ?

Решения 7 класс, 2014 год

1. Решение. Пусть первая цифра номера – x , а вторая – y . Тогда, с одной стороны, сумма цифр номера равна $3x+4y$, а с другой – $10x+y$. Следовательно, $3x+4y=10x+y$, т.е. $7x=3y$. Отсюда $x=3$, $y=7$ и мой номер телефона 3337777.

Ответ: 3337777.

2. Решение. Всего было $18+8+4 = 30$ конфет, или по 10 у каждой из 3-х девочек. Анна не выиграла все забеги, иначе имела бы $10+5 \cdot 2 = 20$ конфет, и не проиграла ни одного, иначе (если бы был один проигрыш) максимум имела бы $10+4 \cdot 2-3 = 15$ конфет. Так как за второе место дают одну конфету (число нечетное), а у Анны четное число конфет, значит, вторых мест у нее было четное количество раз, и это число 2 (4 вторых места не подходят, так как конфет не хватает). В итоге у Анны 3 первых и 2 вторых места. На Ладу и Диану остается: 2 первых, 3 вторых и 5 третьих мест. Ни Лада, ни Диана не могли проиграть 4 забега (тем более 5) иначе обанкротились бы. Количество конфет у них также четное, следовательно, кто проиграл 3 забега (- 9 конфет) занял второе место 1 раз (+ 1) (это Диана, у нее конфет меньше), а кто проиграл 2 забега (-6), занял 2 место 2 раза (+ 2). Первые места распределяются автоматически по одному каждой. Теперь распределим поименно: у Лады 1 первое, 2 вторых и 2 третьих (- 2 конфеты); у Дианы 1 первое, 1 второе и 3 третьих мест (- 6 конфет).

Ответ: Анна 3 первых и 2 вторых места; Лада 1 первое, 2 вторых и 2 третьих; Диана 1 первое, 1 второе и 3 третьих мест.

3. Решение. Сразу ясно, что буква О означает цифру 0 (нуль), иначе не будет делимости на 90. Всего использовано 10 различных букв, значит, и зашифрованы все 10 цифр. Так как букве О соответствует цифра 0, то сумма всех цифр, соответствующих остальным девяти буквам, равна 45, т.е. кратна 9. Сумма Д+Е+В+Я+Н+С+Т делится на 9, а также Д+Е+В+Я+Т+К+А делится на 9. Значит, Н+С и К+А делятся на 9. Предположим, что СОТКА делится на 9, тогда С+Т+К+А делится на 9. Но раз К+А делится на 9, то и С+Т делится на 9. Имеем: Н+С и Т+С оба делятся на 9. Значит, Н и Т дают одинаковые остатки при делении на 9. Но из цифр это могут быть только 0 и 9, а 0 занят буквой О. Получили противоречие, значит, сделали неправильное предположение и СОТКА не делится на 9.

Ответ: Не может.

4. Решение. Две окружности могут пересечься в двух точках. Третья окружность пересечется с каждой из имеющихся окружностей тоже в двух точках, т.е. добавятся еще $2 \cdot 2 = 4$ точки. Добавление каждой следующей окружности увеличивает число точек на величину, равную удвоенному количеству уже имеющихся окружностей. Итого: $2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 2 \cdot 7 = 2 \cdot (1+2+3+4+5+6+7) = 56$.

Ответ: 56 точек.

5. Решение: Пусть x семей имеет и кошек, и собак. По условию 20% (или $\frac{1}{5}$) всех семей, имеющих кошек, имеет и собак. Значит, кошек имеет $5x$ семей.

Поскольку 25% (или $\frac{1}{4}$) семей, имеющих собак, имеет и кошек, то собак имеет $4x$ семей. Итак, x семей имеет и кошек, и собак, $4x$ семей – только кошек, $3x$ семей – только собак. Всего получается $x+4x+3x = 8x$ семей, имеющих животных. По условию они составляют 80% всех семей в этом городе. Значит, всего в городе $8x:80 \cdot 100 = 10x$ семей, среди них x семей имеет и кошек, и собак. Они составляют $1/10$, или 10%.

Ответ: 10% семей.

6. Решение: Заметим, что число 400 оканчивается на 2 нуля, а произведение всех делителей этого числа ($400 = 2^4 \cdot 5^2$) равно $1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 16 \cdot 5 \cdot 25 \cdot 10 \cdot 50 \cdot 20 \cdot 100 \cdot 40 \cdot 200 \cdot 80 \cdot 400$. В этом произведении множитель 5 встречается ровно 15 раз (в 5, 10, 20, 40 и 80 – по одному разу и в 25, 50, 100, 200 и 400 – по два раза). Поскольку множитель 2 встречается заметно чаще, то все произведение оканчивается ровно на 15 нулей. Покажем, что любое число, оканчивающееся на 3 нуля, будет иметь на конце произведения всех делителей более 15 нулей. Действительно, пусть $n = k \cdot 10^3$, где k – натуральное число. Тогда среди его делителей будут все делители числа 1000, произведение которых равно $2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 25 \cdot 125 \cdot 10 \cdot 50 \cdot 250 \cdot 20 \cdot 100 \cdot 500 \cdot 40 \cdot 200 \cdot 1000 = 10 \cdot 100 \cdot 1000 \cdot 10 \cdot 1000 \cdot 10000 \cdot 100 \cdot 100000 \cdot 1000$, и на конец гораздо больше чем 15 нулей. Итак, наибольшее возможное число нулей на конце числа n равно 2.

Ответ: 2.

