

5. الزوايا والدائرة :

الكفاءات المستهدفة : الزوايا والدائرة .

نشاط 11 :

أرسم دائرة (C) مركزها O ونصف قطرها 5 cm ، و [AB] قطر فيها ،
M نقطة من الدائرة حيث $AM = 4$ cm .

(1) باستعمال ال

(2) آلة الحاسبة والتدوير إلى 0,1 أحسب قياس الزاوية ABM ، استنتج قياس الزاوية MAB .

(3) ما نوع المثلث AOM ؟ واحسب أقياس زواياه .

(4) استنتج العلاقة بين الزاويتين ABM و AOM .

حل النشاط :

(1) حساب قياس الزاوية ABM :

المثلث ABM قائم في M

لأن ضلعه [AB] هو قطر للدائرة (C) .

$$\sin \angle ABM = \frac{AM}{AB} = \frac{4}{10} = 0,4$$

ومنه :

إذن بالحاسبة وبالتدوير إلى 0,1 نجد :

$$\angle ABM = 23,6^\circ$$

استنتج قياس الزاوية MAB

$$\angle MAB = 90 - 23,6 = 66,4^\circ$$

(2) نوع المثلث AOM : هو متساوي الساقين

رأسه O لأن : $OM = OA$ (نصفي قطر الدائرة)

حساب أقياس زوايا المثلث AOM :

$$\angle AOM = \angle MOA = 66,4^\circ \text{ و } \angle OMA = 180 - 2 \times 66,4 = 47,2^\circ$$

(3) استنتج العلاقة بين الزاويتين ABM و AOM .

لدينا : $47,2 = 23,6 \times 2$ ومنه $\angle AOM = 2\angle ABM$

نشاط إضافي :

M ، B ، A ثلاث نقط متمايزة من دائرة (c) مركزها O ، المستقيم (AO) يقطع الدائرة (c) في النقطة A' .

نضع $\angle AOB = \beta$ و $\angle AAB = \alpha$.

(1) بين أن كل من المثلثين AOM و BOM متساوي الساقين ،

ثم عبر عن قياس الزاوية $\angle AOA'$ بدلالة قياس الزاوية $\angle MOA'$ ،

وعن قياس الزاوية $\angle AOA'$ بدلالة قياس الزاوية $\angle BOA'$.

(2) استنتج العلاقة بين α و β .

(3) عبر عن الزاوية $\angle A'M$ بدلالة β ، ثم بدلالة α ،

واستنتج العلاقة بين الزاويتين $\angle BAM$ و $\angle A'M$.

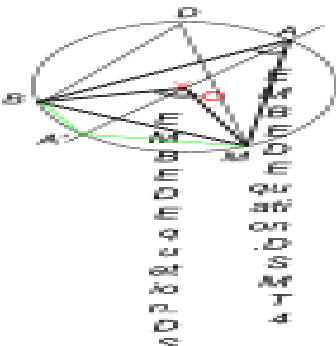
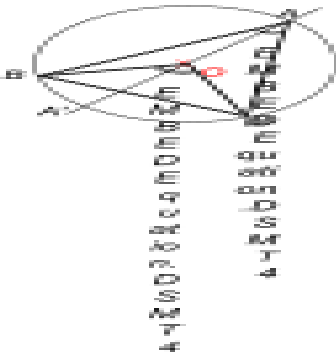
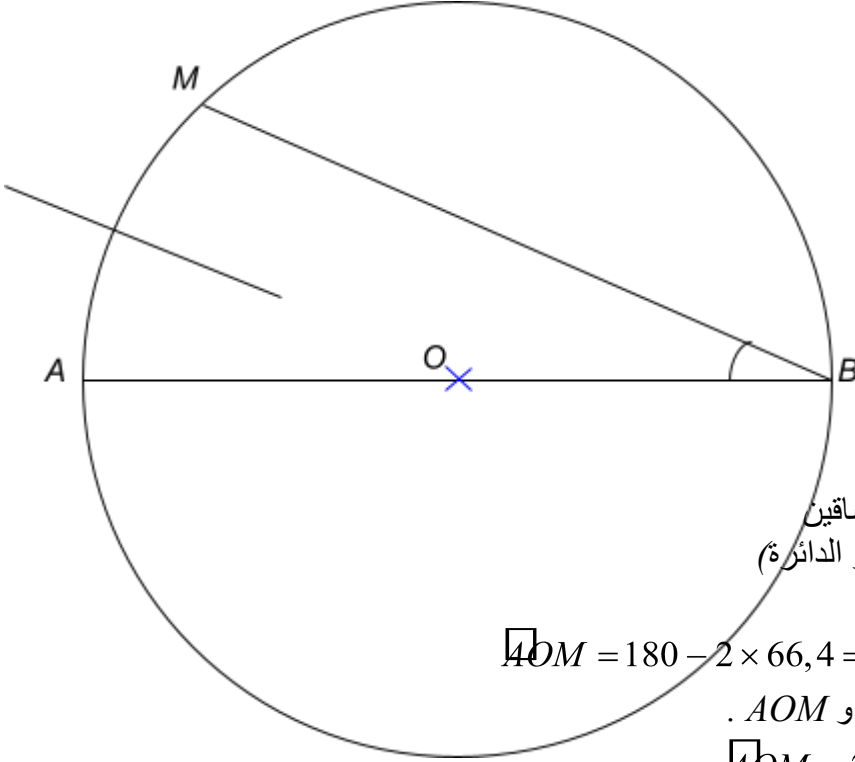
(4) D نقطة من القوس الكبرى BM استنتج مما سبق العلاقة بين الزاويتين $\angle BDM$ و $\angle BAM$.

حل النشاط :

(1) تبين أن كل من المثلثين AOM و BOM متساوي الساقين ،

لدينا $OA = OM = OB$ (أنصاف أقطار الدائرة)

إذن المثلثان AOM و BOM كل منهما متساوي الساقين .



• قياس الزاوية $\angle AOA'$ بدلالة قياس الزاوية $\angle MOA'$:

لدينا $\angle MOA'$ زاوية خارجية في المثلث AOM

ومنه: $\angle MOA' = \angle MAO + \angle OMA$ وبما أن $\angle MAO = \angle OMA = \angle AOA'$

فإن: $\angle MOA' = 2\angle AOA'$

• قياس الزاوية $\angle BOA'$ بدلالة قياس الزاوية $\angle BOA'$:

لدينا $\angle BOA'$ زاوية خارجية في المثلث BOA ومنه

$\angle BOA' = \angle BAO + \angle OBA$ وبما أن $\angle BAO = \angle OBA = \angle AOA'$ فإن: $\angle BOA' = 2\angle AOA'$

(2) استنتاج العلاقة بين α و β .

$\angle BOM = \angle BOA' + \angle AOM$ ومنه: $\angle BOM = 2\angle AOA' + 2\angle AOM$ إذن: $\angle BOM = 2\angle AOM$

وبالتالي: $\beta = 2\alpha$

(3) عبر عن الزاوية $\angle BA'M$ بدلالة β ، ثم بدلالة α ،

باستعمال نفس الطريقة السابقة نجد: $\angle BA'M = 180^\circ - \frac{1}{2}\beta$ و $\angle BA'M = 180^\circ - \alpha$

واستنتج العلاقة بين الزاويتين $\angle BAM$ و $\angle BA'M$.

$\angle BA'M + \alpha = 180^\circ$ أي: $\angle BA'M + \angle BAM = 180^\circ$ ومنه: $\angle BAM$ و $\angle BA'M$ زاويتان متكاملتان.

(4) D نقطة من القوس الكبرى BM استنتج مما سبق العلاقة بين الزاويتين $\angle BDM$ و $\angle BAM$.

مما سبق نستنتج أن: $\angle BDM = \frac{\beta}{2} = \alpha$ ومنه: $\angle BDM = \angle BAM$

مفردات ومصطلحات :

(C) دائرة مركزها O ، و A ، B ، M ، N نقط من الدائرة (C) حيث O تنتمي إلى $[AN]$.

• القطعة $[AN]$ تسمى **قطرا** ، وكل من القطع $[AB]$ ، $[AM]$ ، $[BM]$

تسمى **وتر** في الدائرة (C).

• النقطتان المتمايزتان A و B تعينان على الدائرة (C) قوسين كل منها

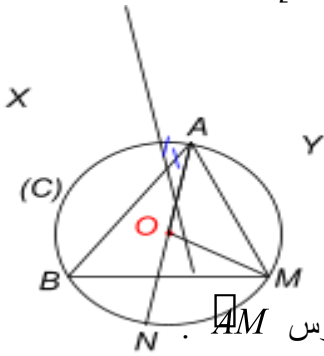
نرمز لها بالرمز $\widehat{AB}$.

• مستقيم يشترك مع الدائرة (C) في نقطة وحيدة A ،

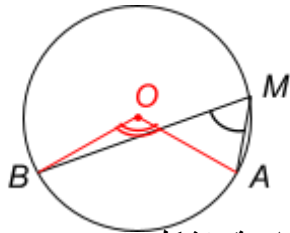
يسمى **مماسا** للدائرة (C) عند النقطة A ويكون عموديا على (AO) .

• الزاوية $\angle BOM$ رأسها مركز الدائرة تسمى **زاوية مركزية** ، نقول إنها **تحصر** القوس $\widehat{BM}$.

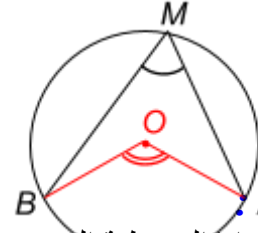
• الزاوية $\angle ABM$ رأسها نقطة من الدائرة تسمى **زاوية محيطية** ، نقول إنها **تحصر** القوس $\widehat{AM}$.



- الزاوية $\angle AOB$ تسمى زاوية **محيطية** ، نقول إنها **تحصر** القوس $\widehat{AB}$.
- مبرهنة :** في كل دائرة ، الزاوية المركزية تساوي ضعف الزاوية المحيطية التي تحصر معها نفس القوس .
- مثال :** A ، B ، M ثلاث نقاط متمايضة من دائرة مركزها O .

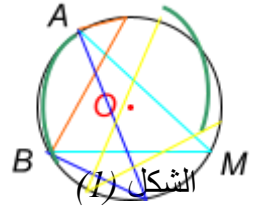
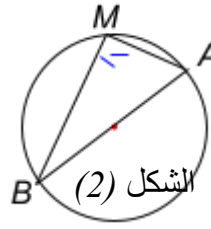
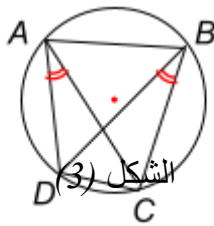
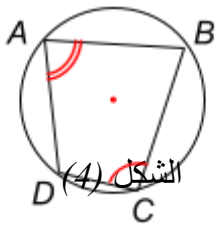


$$\angle AOB = 2\angle AMB$$



نتائج :

- (1) الزوايا المحيطية التي تحصر نفس القوس أو أقواسا متقايسة تكون متقايسة. (شكل 1)
- (2) إذا كانت القطعة $[AB]$ قطرا لدائرة فإنه من أجل كل نقطة M من هذه الدائرة وتختلف عن A و B ، يكون المثلث ABM قائما في M . (شكل 2)
- (3) تكون رؤوس الرباعي المحدب $ABCD$ من نفس الدائرة إذا كانت : $\angle DAC = \angle DBC$. (شكل 3)
- (4) يكون الرباعي المحدب $ABCD$ دائريا إذا كانت زاويتان متقابلتان متكاملتين. (شكل 4)



تطبيقات :

تمرين : 75 صفحة 244

- (1) (C) و (C') دائرتان مركزهما O و O' متقاطعتان في نقطتين A و B ، $[AC]$ قطر في (C) و يقطع (C') في النقطة M ، و $[AD]$ قطر في (C') و يقطع (C) في النقطة N . أرسم شكلا مناسباً .
- (2) بين أن النقط C ، B ، D في استقامة .
- (3) بين أن المستقيمت (AB) ، (CN) ، (MD) متقاطعة في نقطة واحدة .

الحل :

- (2) تبين أن النقط C ، B ، D في استقامة .

$$\angle ABC = 90^\circ \text{ تحصر نصف الدائرة } (C)$$

$$\angle ABD = 90^\circ \text{ تحصر نصف الدائرة } (C')$$

$$\angle CBD = 180^\circ \text{ ومنه :}$$

وبالتالي : $(CB) \parallel (CD)$ ومنه : النقط C ، B ، D في استقامة .

- (3) تبين أن المستقيمت (AB) ، (CN) ، (MD) متقاطعة في نقطة واحدة .

لدينا المثلث ANC قائم في N لأن الزاوية $\angle ANC$ تحصر نصف الدائرة (C) ومنه : $(CN) \perp (AD)$

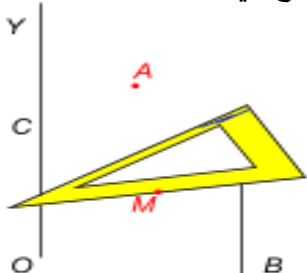
ولدينا المثلث ABD قائم في B لأن الزاوية $\angle ABD$ تحصر نصف الدائرة (C') ومنه : $(AB) \perp (CD)$

ولدينا المثلث AMD قائم في M لأن الزاوية $\angle AMD$ تحصر نصف الدائرة (C) ومنه : $(DM) \perp (AC)$

إذن المستقيمت (AB) ، (CN) ، (MD) هي ارتفاعات في المثلث ACD وبالتالي تتقاطع في نقطة واحدة .

تمرين : 81 صفحة 245

$[OX]$ و $[OY]$ نصف مستقيمين متعامدان في النقطة O ،



نفترض ABC كوسا ونحركه بحيث تتحرك B على $[OX]$ وتتحرك C على $[OY]$.

(1) ما هو المسار الذي تتحرك عليه النقطة M منتصف $[BC]$ ؟

(2) ما هو المسار الذي تتحرك عليه النقطة A ؟

(إرشاد : بين أن الزاوية $\angle BOA$ ثابتة)

الحل :

(1) تعيين المسار الذي تتحرك عليه النقطة M منتصف $[BC]$:

نرمز بـ (e) مجموعة النقط (المسار) المطلوبة ،

نرسم عدة نقط ونستغلها لتخمين النتيجة :

نلاحظ في هذه الحالة أن المسار هو عبارة عن ربع دائرة مركزها O

$\frac{BC}{2}$

ونصف قطرها 2. نرمز له بالرمز EF

لنبرهن أن $(e) = EF$:

ولهذا نتبع المراحل التالية :

(1) نبين أن (e) مجموعة غير خالية

(2) نبين أن كل نقطة M من (e) تنتمي إلى EF أي (e) محتواة في EF

(3) نبين أن كل نقطة M من EF تنتمي إلى (e) أي EF محتواة في (e)

• لنبين أن (E) مجموعة غير خالية

إذا أخذنا B منطبقة على O فإن النقطة C تكون في $[OY]$

والنقطة E منتصف $[BC]$ توجد في $[OY]$ وهي تنتمي إلى (e)

إذن : $(e) \neq \Phi$

إذا أخذنا C منطبقة على O فإن النقطة B تكون في $[OX]$

والنقطة F منتصف $[BC]$ توجد في $[OX]$ وهي تنتمي إلى (e)

• لنبين أن كل نقطة M من (e) تنتمي إلى EF

لتكن M نقطة تنتمي إلى المجموعة (e) .

توجد نقطة B من $[OX]$ وتوجد نقطة C من $[OY]$ بحيث M تكون منتصف القطعة $[BC]$.

$$OM = \frac{1}{2} BC$$

المثلث COB قائم في B والنقطة M منتصف القطعة $[BC]$ ، إذن :

$$\frac{BC}{2}$$

ومنه النقطة M تنتمي إلى ربع الدائرة ذات المركز O و نصف القطر

وبالتالي : $(e) \subset EF$ (1) . . .

• لنبين أن كل نقطة M من EF تنتمي إلى (e)

لتكن M نقطة تنتمي إلى المجموعة EF

نعين نقطة B من $[OX]$ ونعين نقطة C من $[OY]$ حيث : $OB = OC = OM$

لنبرهن أن النقط C ، M ، B في استقامة.

لدينا النقط C ، O ، B تنتمي إلى الدائرة ذات المركز M

ومنه : $\angle BMC = 2\angle BOC = 180^\circ$ لأن : $\angle BOC$ زاوية محيطية

و $\angle BMC$ زاوية مركزية وتحصران نفس القوس.

ومنه : النقط C ، M ، B في استقامة.

إذن : النقطة M منتصف القطعة $[BC]$ وبالتالي : النقطة M تنتمي إلى المجموعة (e) .

أي : $EF \subset (e)$ (2) . . .

خلاصة : من (1) و (2) نستنتج أن : $(e) = EF$

(2) تعيين المسار الذي تتحرك عليه النقطة A :

نسمي (F) المسار المطلوب ، وهي مجموعة النقط A بحيث تكون النقطة B من $[OX]$ والنقطة C من $[OY]$ و ABC يمثل كوسا

أي مثلثا قائما في A . نضع الزاوية $\angle ACB$ للكوس هي α نلاحظ أن النقطة A هي نقطة من قطعة مستقيمة $[GH]$.

حيث O, G, H في استقامية و $\angle GOB = \angle ACB = \alpha$ لنبرهن أن (F) غير خالية :

إذا أخذنا B منطبقة على O فإن النقطة C تكون في $[OY]$.

نرسم الدائرة ذات المركز M منتصف $[BC]$ ونعين النقطة H منها حيث:

$\angle BCH = \alpha$ ومنه المثلث القائم يعين كوسا إذن النقطة H تنتمي إلى المجموعة (F) .

نأخذ C' منطبقة على B و O ونعين النقطة B' من $[OX]$ حيث $OB' = BC$ نعتبر النقطة G المسقط العمودي للنقطة B' على (OH) .

لدينا : $\angle GCB' = \angle BCH = \alpha$ إذن المثلث القائم $GB'C'$ يمثل كوسا

إذن النقطة G تنتمي إلى المجموعة (F) . وبالتالي المجموعة (F) غير خالية :

• لنبين أن كل نقطة A من (F) تنتمي إلى $[GH]$ (أي (E) محتواة في $[GH]$)
لتكن A نقطة من (F) أي : توجد النقطة B من $[OX]$ والنقطة C من $[OY]$ حيث

$\angle ACB = \alpha$ و ABC مثلثا قائما في A

لدينا $ACOB$ رباعي دائري في الدائرة ذات القطر $[AB]$

ومنه $\angle AOB = \angle ACB = \alpha$ تحصران نفس القوس إذن A تنتمي إلى $[GH]$.

ومنه : $(F) \subset [GH]$

• لنبين أن كل نقطة A من $[GH]$ تنتمي إلى (F) (أي $[GH]$ محتواة في (E))

لتكن A نقطة من $[GH]$ ، H' المسقط العمودي للنقطة H على $[OY]$

ولدينا : $OG = HH'$ نعين نقطة C من $[OH]$ حيث $AC = OG$.

نعين نقطة B من $[OX]$ حيث $\angle AOB = \angle ACB = \alpha$

إذن الرباعي $ACOB$ دائري ومنه الزاويتان المتقابلتان $\angle OAB$ و $\angle OCB$ متكاملتان

إذن المثلث ACB قائم في A .

لدينا المثلث القائم OHH' يمثل كوسا

وبمقارنته مع المثلث BAC لدينا : $HH' = AC$ و $\angle HOH' = \angle ACB = \alpha$ و $\angle H'HO = \angle BAC = 90^\circ$

إذن المثلثان OHH' و BAC متقايسان ومنه BAC يمثل كذلك كوسا إذن النقطة A تنتمي إلى (F)

وبالتالي : $[GH] \subset (F)$

خلاصة : لدينا $(F) \subset [GH]$ و $[GH] \subset (F)$ إذن : $(F) = [GH]$.