

Chapitre 5

Lois de comportement

1. Introduction

Les **lois de comportement** sont des lois expérimentales qui définissent les relations entre les contraintes et les déformations (i.e les relations entre le tenseur des contraintes, σ , et les tenseurs des déformations et des taux de déformations ε et D). La science qui permet de développer les lois de comportement est **la rhéologie** (c'est pourquoi les lois de comportement sont également appelées **équations rhéologiques**).

Les équations que nous avons établies jusqu'à présent ne permettent pas de déterminer le champ de vitesses (ou le vecteur déplacement) pour un milieu continu. En effet, l'équation locale du mouvement et l'équation de continuité ne donnent que 4 relations contre 10 inconnues dans ces mêmes équations (6 composantes de σ , 3 composantes de la vitesse et la masse volumique). D'où la nécessité de recourir aux lois de comportement pour établir les 6 relations qui manquent.

Ces lois sont diverses en raison de la diversité des milieux naturels (milieux élastiques, plastiques, viscoélastiques, fluides visqueux,...)

Les lois de comportement doivent respecter les principes suivants :

- principe de causalité : le tenseur des contraintes à l'instant t est connu si l'on connaît l'histoire du milieu jusqu'à cet instant ;
- principe d'action locale : seul le mouvement des particules voisines de la position M influe sur le tenseur $\sigma(M)$ en cette position ;
- principe d'objectivité (ou principe d'universalité) : la relation traduisant la loi de comportement doit être la même pour tout observateur (i.e. indépendante du référentiel). En particulier, il ne doit pas dépendre explicitement du temps.

Dans ce cours on va se limiter à des milieux **homogènes** et **isotropes**. Un milieu est dit **homogène** si la loi de comportement est la même pour toutes les positions de ce milieu, et il est dit **isotrope** si cette loi est la même pour toutes les directions matérielles (un matériau fibreux tel que le bois n'est pas isotrope)

2. Exemples de lois de comportement

2.1 Comportement des Milieux élastiques classiques.

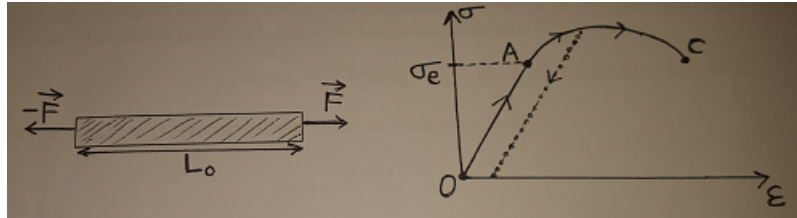
2.1.1 Définitions

Un milieu est dit **élastique** s'il retrouve son état initial une fois on supprime les contraintes qui lui sont appliquées. Si en plus la relation entre le tenseur des contraintes est le tenseur des déformations de Green-Lagrange est linéaire (i.e. les σ_{ij} sont des fonctions linéaires des L_{ij}), on dit qu'il s'agit d'un milieu **élastique linéaire**. On appelle milieu **élastique classique**, un milieu élastique, linéaire et isotrope en petites déformations (les σ_{ij} sont donc des fonctions linéaires des ε_{ij}).

2.1.2 Essai de traction

Si l'on applique aux deux extrémités d'une tige cylindrique, de longueur L_0 et de section S_0 , deux forces de traction opposées de module F , et l'on mesure l'allongement relatif $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0}$ en fonction de la

contrainte $\sigma = \frac{F}{S_0}$, on obtient une courbe caractéristique qui, dans le cas d'un essai de traction sur une éprouvette en acier, prend la forme donnée sur la



acier, prend la forme figure ci-dessous :

Sur cette figure on distingue deux zones correspondant à deux comportements différents :

- une zone OA linéaire obtenue pour des contraintes $\sigma < \sigma_e$ et régie par la loi de Hooke :

$$\sigma = E\varepsilon \quad (E \text{ étant le module d'élasticité d'Young})$$

Dans cette zone, si l'on ramène la contrainte σ à 0, la tige retrouve son état initial en passant par les mêmes états intermédiaires représentés par le segment OA. On dit alors que la déformation représentée par la zone OA est élastique, parfaite et linéaire.

- une zone AC caractérisée par un comportement non linéaire. Dans cette zone, la tige ne retrouve pas son état initial si on ramène la contrainte σ à 0 (persistance d'un allongement résiduel) et la courbe de décharge (courbe en pointillés) ne coïncide pas avec la courbe de charge. Cette zone correspond à un comportement plastique. Le point C correspond à la rupture de la tige.

Généralement, l'expérience montre que les solides ont un comportement élastique linéaire pour des contraintes suffisamment faibles (la limite d'élasticité dépend du matériau). De plus, leurs déformations sont d'autant plus petites que les contraintes sont faibles. Cependant, il existe des milieux solides qui ne satisfont pas à l'hypothèse d'isotropie (c'est le cas du bois et des milieux cristallins, par exemple). De tels milieux ne peuvent pas être étudiés à l'aide de la théorie de l'élasticité classique.

2.1.3 Loi de comportement d'un milieu élastique classique

Pour un milieu élastique classique, le tenseur des contraintes, σ , est lié au tenseur des petites déformations, ε , par une relation linéaire :

$$\sigma = K \overline{\otimes} \varepsilon \quad , \quad \text{où } K \text{ est un tenseur d'ordre 4.}$$

Les composantes de σ sont données par :

$$\sigma_{ij} = K_{ijmn} \varepsilon^{mn}$$

Pour répondre aux conditions déjà citées et pour des considérations thermodynamiques, la loi de comportement d'un milieu élastique classique doit être de la forme :

$$\sigma = 2\mu \varepsilon + \lambda \text{Tr}(\varepsilon) G \quad (1)$$

λ et μ , dont l'unité est le Pascal, sont appelés **coefficients de Lamé** (G est le tenseur métrique). Cette loi est appelée loi de **Hooke généralisée**. Dans une base orthonormée on a :

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \text{Tr}(\varepsilon) \delta_{ij} \quad , \quad \text{où } \delta_{ij} \text{ est le symbole de Kronecker .}$$

A partir de la relation (1) on peut calculer $\text{Tr}(\varepsilon)$ en fonction de $\text{Tr}(\sigma)$:

$$\text{Tr}(\varepsilon) = \frac{\text{Tr}(\sigma)}{2\mu + 3\lambda}$$

Ainsi, on peut exprimer ε en fonction σ :

$$\varepsilon = \frac{1}{2\mu} \left[\sigma - \frac{\lambda \text{Tr}(\sigma)}{2\mu + 3\lambda} G \right] \quad (2)$$

Si l'on utilise le module d'Young E et le coefficient d'élasticité de Poisson ν définis par :

$$E = \frac{\mu(2\mu + 3\lambda)}{\mu + \lambda} \quad ; \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\mu + \lambda)}$$

on obtient :

$$\sigma = \frac{E}{1+\nu} \left[\varepsilon + \frac{\lambda \text{Tr}(\varepsilon) G}{1-2\nu} \right]$$

et

$$\varepsilon = \frac{1+\nu}{E} \sigma - \frac{\nu}{E} \text{Tr}(\sigma) G$$

2.1.4 Equation d'équilibre (élastostatique)

A l'équilibre, la vitesse est nulle, donc l'équation locale du mouvement devient :

$$\rho \overset{\mathbb{W}}{f}_m + \operatorname{div} \sigma = 0 \quad (3)$$

Si l'on remplace σ en fonction de ε (relation (1)) puis ε en fonction du vecteur déplacement $\overset{\mathbb{W}}{U}$ dans cette relation, on obtient l'équation d'équilibre sous la forme :

$$(\lambda + \mu) \overrightarrow{\operatorname{grad}(\operatorname{div} \overset{\mathbb{W}}{U})} + \mu \Delta \overset{\mathbb{W}}{U} + \rho \overset{\mathbb{W}}{f}_m = 0$$

ou encore :

$$(\lambda + 2\mu) \overrightarrow{\operatorname{grad}(\operatorname{div} \overset{\mathbb{W}}{U})} - \mu \overrightarrow{\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \overset{\mathbb{W}}{U})} + \rho \overset{\mathbb{W}}{f}_m = 0$$

La résolution de cette équation avec les conditions aux limites permet de déterminer le vecteur déplacement à partir duquel on calcule le tenseur ε . Ensuite, on utilise la loi de comportement (relation (1)) pour calculer σ . Cette méthode est appelée **méthode de Lamé et Clapeyron**.

On peut résoudre le problème des déformations en utilisant une autre méthode (**méthode de Beltrami**) qui consiste à calculer σ à partir de l'équation (3), puis vérifier les conditions de compatibilité de ε données au deuxième chapitre. En pratique, on exprime les composantes ε_{ij} en fonction des composantes σ_{ij} (voir la relation (2)) dans les conditions de compatibilité. Dans le cas où les forces volumiques sont constantes, on obtient (en coordonnées cartésiennes):

$$\Delta \sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu} (\operatorname{Tr}(\varepsilon))_{ij} = 0$$

2.2 Comportement des fluides newtoniens

Un milieu fluide est un milieu dont la loi de comportement est de la forme :

$$\sigma = f(D)$$

où D est le tenseur des taux de déformations.

Un fluide **newtonien**, est un milieu isotrope dont le tenseur σ est une fonction linéaire affine du tenseur D :

$$\sigma = K \overline{\otimes} D + \sigma_0, \quad \text{où } K \text{ est un tenseur d'ordre 4.}$$

On montre que la loi de comportement des fluides newtoniens est nécessairement de la forme :

$$\sigma = 2\mu D + [\lambda \operatorname{Tr}(D) - P]G \quad (4)$$

où :

- λ est le premier coefficient de viscosité (en Kg/m/s ou poiseuille) ;
- μ est le second coefficient de viscosité ou viscosité dynamique (en Kg/m/s ou poiseuille) ;

- P est la pression absolue (en Pascal).

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

La viscosité cinématique est définie par : ρ (en m²/s)

La pression P est positive, et s'il ne dépend que de la masse volumique, on dit que le fluide est barotrope.

2.2.1 Cas d'un fluide parfait

On dit que le fluide est parfait si $\lambda = \mu = 0$. La loi de comportement devient :

$$\sigma = -P G$$

Dans une base orthonormée : $\sigma_{ij} = -P \delta_{ij}$. Donc :

$$\sigma = \begin{bmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{bmatrix}$$

2.2.2 Cas d'un fluide incompressible

Pour un fluide incompressible $\text{div} \vec{V} = 0$. Et puisque $\text{Tr}(D) = \text{div} \vec{V}$, alors on a :

$$\sigma = 2\mu D - P G$$

2.2.3 Equation du mouvement

En remplaçant σ en fonction de la vitesse dans l'équation locale du mouvement (équation (4) du chapitre précédent), et en supposant que les coefficients λ et μ sont constants (ce qui n'est pas le cas pour un milieu non isotherme), on obtient :

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\vec{V}}{dt} &= \rho \vec{f}_m + \text{div} \sigma \\ &= \rho \vec{f}_m + \mu \text{div}(\text{grad} \vec{V} + {}^T \text{grad} \vec{V}) + \lambda \text{div}[\text{Tr}(D)G] - \text{div}(P G) \end{aligned}$$

En utilisant les relations suivantes:

. $\text{div}(\alpha G) = \overrightarrow{\text{grad}} \alpha$ pour une fonction scalaire α ;

. $\text{div}({}^T \text{grad} \vec{V}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{V})$;

. $\text{div}(\text{grad} \vec{V}) = \Delta \vec{V}$.

on peut mettre l'équation du mouvement sous la forme :

$$\rho \frac{dV}{dt} = \rho f_m - \overrightarrow{\text{grad}} P + \mu \Delta V + (\lambda + \mu) \text{grad}(\text{div} V)$$

2.2.4 Puissance des efforts intérieurs

La puissance des forces intérieures par unité de volume (i.e. la densité volumique de la puissance des efforts intérieurs) est :

$$P_{\text{int/vol}} = -\sigma \otimes \overline{D}$$

A l'aide de la relation (4), on obtient :

$$\begin{aligned} P_{\text{int/vol}} &= P \text{Tr}(D) - \lambda [\text{Tr}(D)]^2 - 2\mu D \otimes \overline{D} \\ &= \underbrace{P \text{div} V}_{P_{\text{int/rev}}} - \underbrace{\lambda (\text{div} V)^2}_{P_{\text{int/irrev}}} - 2\mu D \otimes \overline{D} \end{aligned}$$

La puissance mécanique des efforts intérieurs est constituée de deux termes :

- un terme $P_{\text{int/rev}}$ qui représente la puissance mécanique de compression ou dilatation élastique (il est positif si le volume augmente et négatif dans le cas contraire). C'est la partie réversible de la puissance des forces intérieures.
- un terme $P_{\text{int/irrev}}$ qui représente la puissance mécanique des forces de viscosité. Ce terme est toujours négatif et constitue la partie irréversible de la puissance des forces intérieures. La dissipation intrinsèque définie dans le chapitre précédent est telle que : $\Phi_{\text{int}} = -P_{\text{int/irrev}}$.

En décomposant D en partie sphérique et déviateur on a :

$$D = D_s + D_d, \quad \text{où} \quad D_s = \frac{1}{3} \text{Tr}(D) G \quad \text{et} \quad D_d = D - \frac{1}{3} \text{Tr}(D) G$$

On a : $\text{Tr}(D_s) = \text{Tr}(D)$ et $\text{Tr}(D_d) = 0$. Sachant que $G \otimes \overline{D_d} = \text{Tr}(D_d) = 0$, on peut écrire Φ_{int} sous la forme :

$$\Phi_{\text{int}} = \left(\lambda + \frac{2\mu}{3} \right) [\text{Tr}(D)]^2 + 2\mu D_d \otimes \overline{D_d}$$

Φ_{int} est positive, de plus les quantités $[\text{Tr}(D)]^2$ et $D_d \otimes \overline{D_d}$ sont positives (on peut le vérifier facilement dans une base orthonormée) est indépendantes, donc on doit vérifier :

$$\lambda + \frac{2\mu}{3} \geq 0 \quad \text{et} \quad \mu \geq 0$$

La quantité $(\lambda + \frac{2\mu}{3})[Tr(D)]^2$ est la dissipation visqueuse due aux variations de volume, et la quantité $2\mu D_d \otimes D_d$ est la dissipation visqueuse de distorsion (ou cisaillement). On appelle **fluide de Stokes**, un fluide tel que la dissipation due aux variations de volume est nulle :

$$\lambda + \frac{2\mu}{3} = 0$$

Ainsi, on peut éliminer λ de l'équation du mouvement ($\lambda = -\frac{2\mu}{3}$), ce qui veut dire que le fluide de Stokes n'a qu'un seul coefficient de viscosité. On montre aussi que le seul fluide qui satisfait au second principe de la thermodynamique pour tout mouvement est le fluide de Stokes.