

Application : Les arbres de décisions

Un arbre de décisions est une méthode graphique pour analyser des décisions avec risque, des modèles dans lesquels les probabilités associées aux différents états de la nature sont spécifiées. Pour être plus précis, les arbres de décisions ont été conçus pour les problèmes faisant intervenir une séquence de décisions et événements successifs. L'arbre de décision est habituellement représenté comme des décisions ou des événements successifs représentés chronologiquement de **gauche à droite** :

- Les nœuds représentant des **décisions** sont habituellement représentés par des **cercles** et une branche suivant une décision sera associée à chaque possibilité de décision.
- Les nœuds représentant des **événements** sont habituellement représentés par des **carrés** et une branche suivant un événement est associé à chaque configuration envisageable.

La configuration qui se réalisera dépend des décisions prises mais aussi des événements qui se réaliseront, avec la possibilité qu'une décision soit influencée par les événements ayant eu lieu précédemment. Les événements sont souvent nommés « états de la nature » pour bien indiquer qu'ils ne dépendent pas de la volonté du décideur.

Exemple

Adam Labrosse est propriétaire du plus important fabricant de brosses à main chirurgicales de la région, ses brosses d'une douceur inégalée sont distribuées aux hôpitaux, C.L.S.C. et cliniques médicales. Moyennant des modifications mineures à son équipement déjà en place, il pourrait produire des brosses à dents. Il est inquiet de la réaction des producteurs actuellement sur le marché.

M. Labrosse envisage trois décisions : ne pas tenter de s'introduire dans le marché, tenter une introduction discrète, sans publicité grand public mais en poussant le produit auprès de détaillants et en offrant des présentoirs attrayants, ou tenter une introduction en catimini, sans publicité ni présentoirs, ne faisant qu'offrir au détaillant son produit. Il ne considère que deux événements possibles : réussite ou échec. Des études préliminaires indiquent qu'en s'introduisant

de façon discrète les profits annuels pourraient s'élever à 5 millions si l'introduction est réussie ou de -5 millions si l'introduction est un échec. En s'introduisant en catimini, les profits seraient respectivement de 3 millions et de -2 millions. L'abandon du projet n'entraînerait ni profit, ni perte. Les profits annuels des différentes alternatives ainsi que les estimations préliminaires des probabilités de réussite sont résumés par le tableau suivant :

	Résultat	
	Réussite	Échec
Introduction discrète	5M\$	-5M\$
Introduction en catimini	3M\$	-2M\$
Probabilité	0,22	0,78

Dans cet énoncé, il y a un niveau de décision et trois décisions possibles :

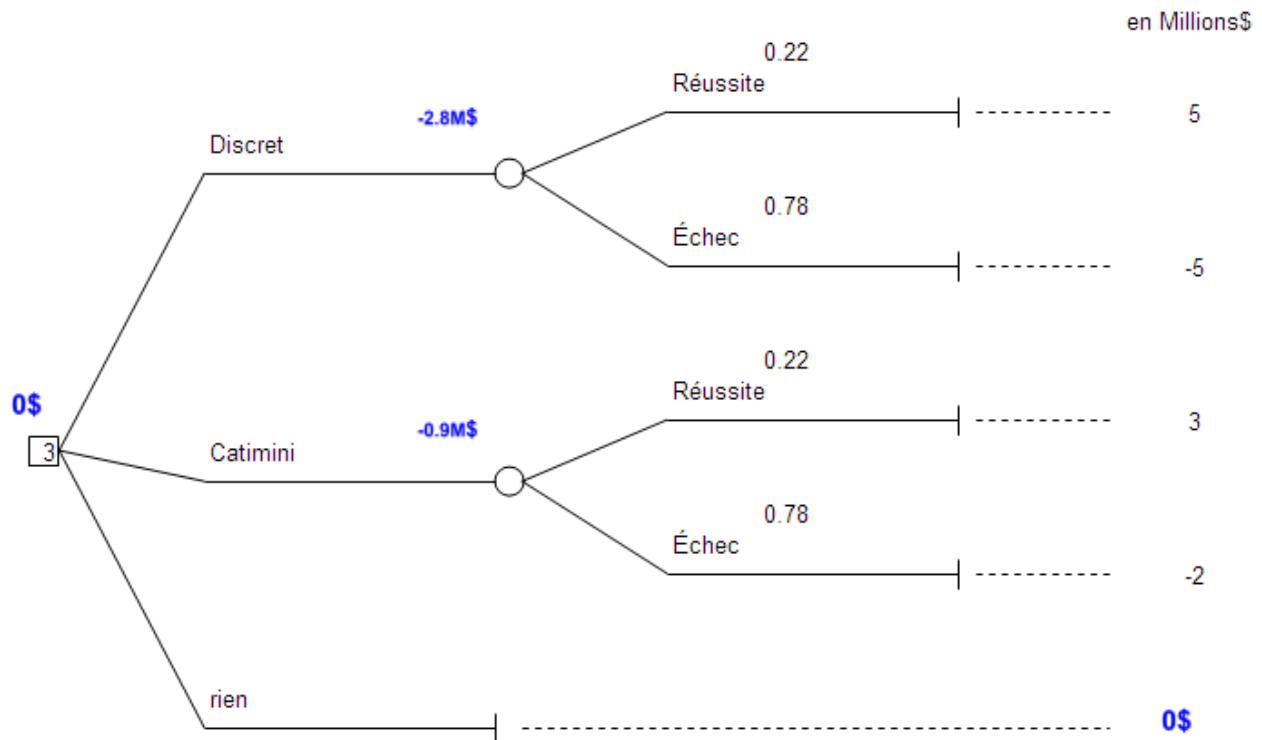
1. Ne rien faire;
2. Introduction discrète;
3. Introduction en catimini.

Deux événements possibles :

- Succès (avec une probabilité de 22%);
- Échec (avec une probabilité de 78%).

D'où viennent les probabilités?

M. Labrosse peut utiliser des données historiques de son entreprise lors de projets semblables. Il peut s'agir de données historiques de concurrents, de données agrégées sur les lancements de produits d'hygiène personnelle (données économiques) ou finalement l'intuition éclairée d'experts qui ont déjà fait face à ce type de situation (il aurait également été possible d'utiliser des probabilités différentes selon le type d'introduction dans le marché)



La résolution de l'arbre

Le critère qui sera utilisé est la valeur monétaire espérée (VME).

Pour la première branche :

$$\text{VME} = 0,22 \times 5 + 0,78 \times -5 = -2,8\text{M\$}.$$

Pour la deuxième branche :

$$\text{VME} = 0,22 \times 3 + 0,78 \times -2 = -0,9\text{M\$}.$$

La décision devient maintenant :

1. Choisir une introduction discrète avec une perte espérée de 2.8M\$,
2. Choisir une introduction en catimini avec une perte espérée de 0,9M\$.
3. Décider de ne pas s'introduire sur ce marché sans perte.

Si M. Labrosse cherche à maximiser ses profits, il choisira de ne pas s'introduire sur le marché des brosses à dents avec un profit nul.

Partie 2 : arbres avec plusieurs niveaux de décisions

M. Labrosse peut obtenir une étude lui indiquant si le marché est saturé ou non, pour 100 000 \$. Si le marché est saturé, les producteurs actuellement sur le marché risquent de réagir vivement à l'apparition d'un nouveau concurrent et ainsi augmenter la probabilité d'échec de l'introduction de l'entreprise de M. Labrosse dans leur marché, par contre si le marché est non saturé M Labrosse pourrait s'y introduire sans susciter de réactions pouvant nuire à sa tentative. L'aptitude des consultants à prédire l'état de saturation du marché des brosses à dents est donnée par les probabilités conditionnelles suivantes :

Probabilité (prévision de l'étude résultat)			
		Résultat	
		Réussite	Échec
Prévision du marché selon l'étude	Marché non saturé	61.36%	1.92%
	Marché saturé	38.64%	98.08%

Par exemple :

- La probabilité que l'étude prévoit un « marché saturé » si en fait l'introduction sera un échec est de 98,08%.
- La probabilité que l'étude prédise un « marché non saturé » si en fait l'introduction sera une réussite est de 61,36%.

Comment a-t-on obtenu ces probabilités ?

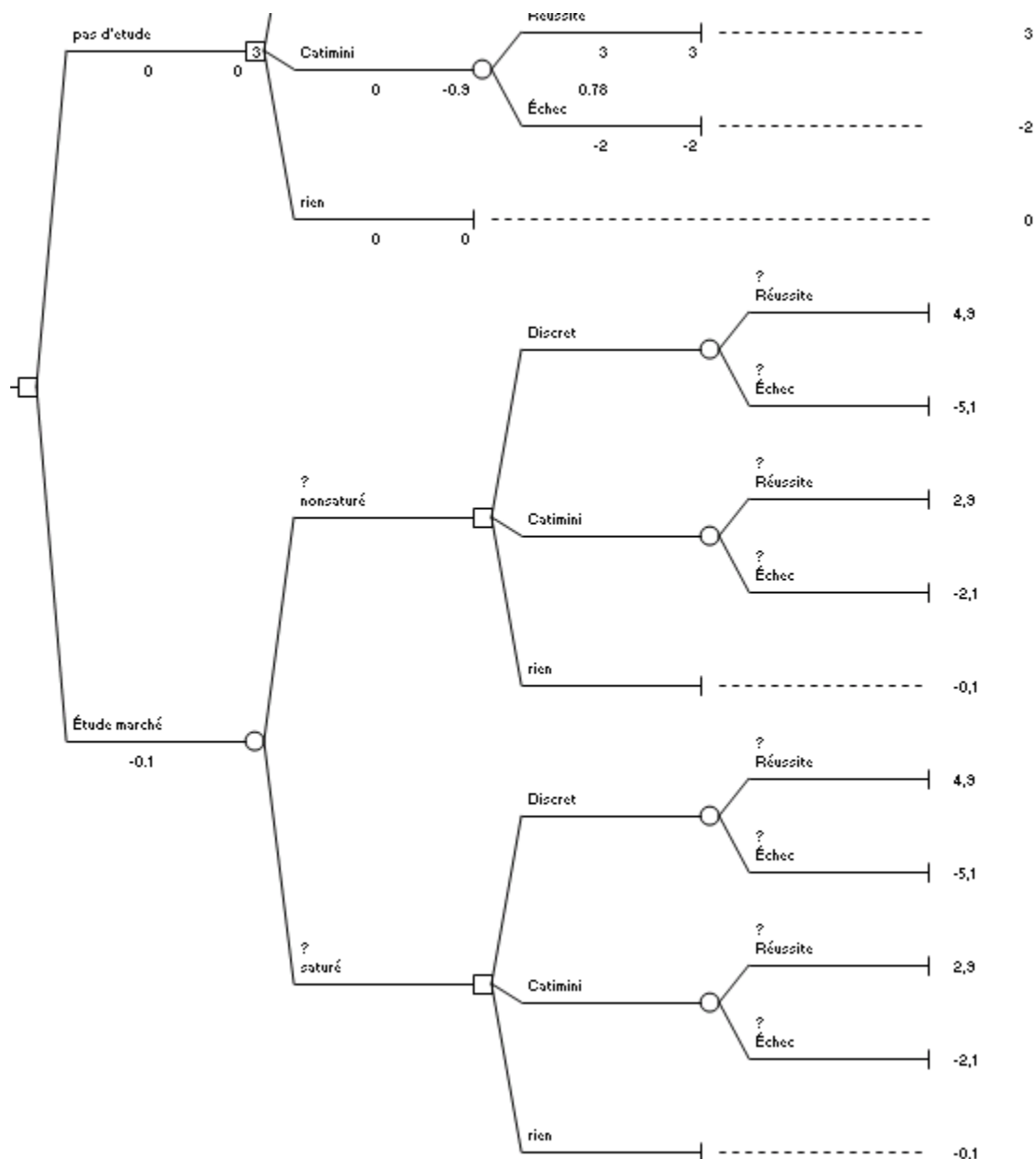
Toutes les entreprises qui font des études de marché, prévisions, sondages, peuvent après que l'évènement se soit produit constater la justesse de leur prévision. C'est pourquoi les probabilités conditionnelles sont présentées sous la forme $P(\text{prévision} \mid \text{ce qui arrivera})$. Dans le cas qui nous intéresse, le consultant a colligé toutes les introductions échouées de produits, parmi celles-ci, elle avait statué que le marché était saturé dans 98,07% des cas. En procédant de même avec les introductions réussies, elle avait statué dans 61,36% des cas que le marché était non saturé.

Quel est le nouvel arbre de décision qui intègre la décision de procéder ou non à l'étude?

La première décision de M. Labrosse sera de procéder ou non à l'étude de marché, dans ce cas nous retrouvons l'arbre déjà résolu. Si la décision est de procéder à l'étude, un événement aléatoire suivra :

- L'étude prédit que le marché est saturé,
- ou
- L'étude prédit que le marché est non saturé.

Chacun des deux événements sera suivi de la décision sur le type d'introduction.



La branche du haut est volontairement tronquée, il s'agit de la même branche que dans la partie 1. Remarquez bien que les valeurs monétaires utilisées à l'extrémité de chacune des branches est nette, dans notre problème seul le coût de l'étude vient diminuer le profit éventuel de M. Labrosse.

Comment calculer les probabilités sur les branches terminales?

Prenons la première branche du nouvel arbre, il correspond à la suite de décisions et d'événements suivants :

«Faire l'étude»/«prédire un marché non saturé»/ « introduction discrète »/ «introduction réussie»

Définissons les événements suivants :

- R=L'introduction est réussie
- NS = L'étude prévoit un marché non-saturé

Nous savons que :

- $P(R)=22\%$ et bien sûr $P(\sim R)=78\%$;
- $P(NS|R)= 61.36\%$ et $P(\sim NS|R)=38.64\%$;
- $P(NS|\sim R)= 1.92\%$ et $P(\sim NS|\sim R)=98.08\%$;

Le long de cette branche, il y a deux probabilités à déterminer :

- $P(\text{«prédire un marché non-saturé»}) = P(NS)$
- $P(\text{«introduction réussie»} | \text{«prédire un marché non-saturé»}) = P(R|NS)$

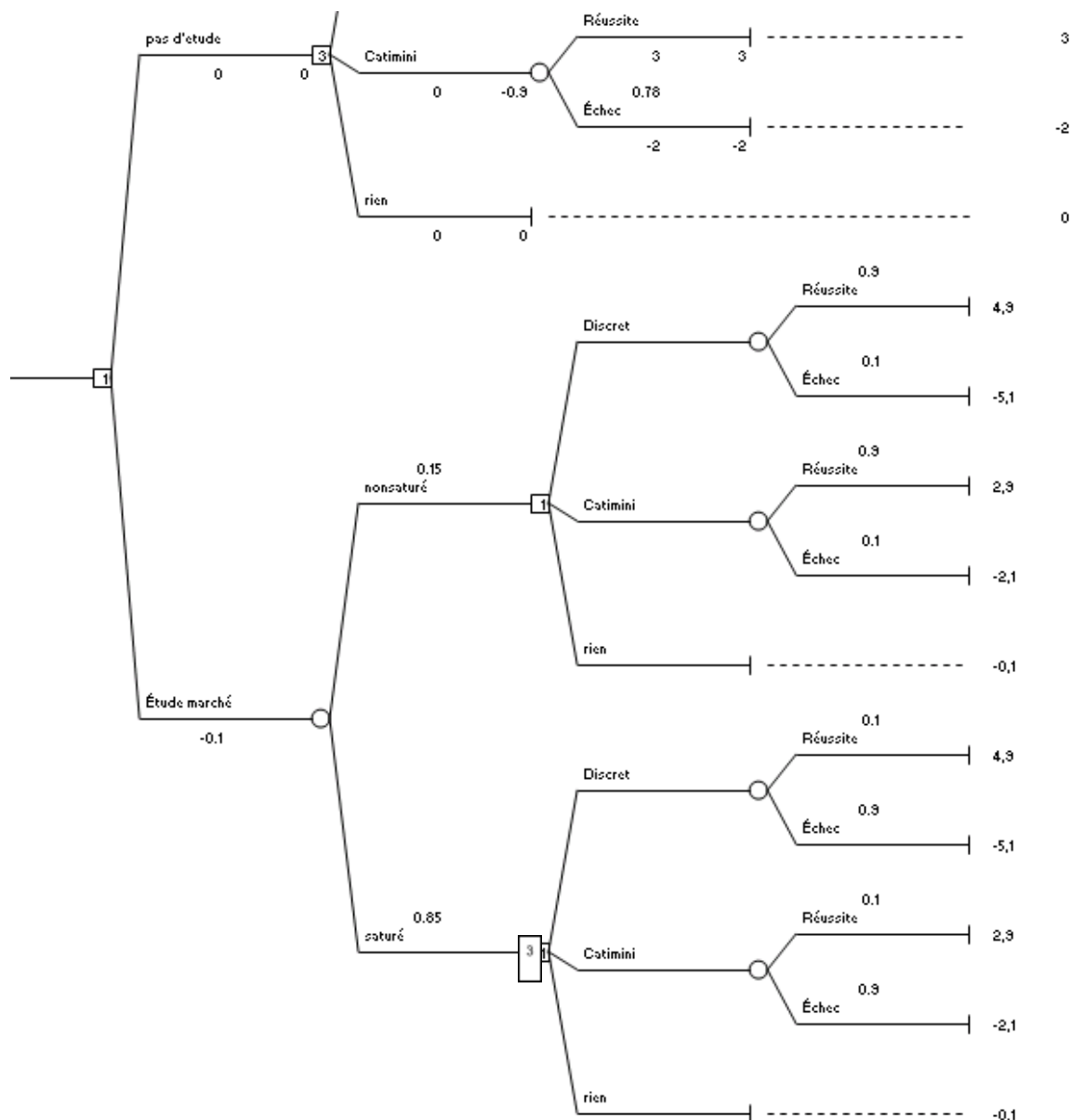
La première probabilité est obtenue à l'aide de la formule de la probabilité marginale :

$$\begin{aligned} P(NS) &= P(NS|R)P(R) + P(NS|\sim R)P(\sim R) \\ &= (61.36\%)(22\%)+(1.92\%)(78\%) \\ &= 15\% \end{aligned}$$

La deuxième probabilité est obtenue en utilisant le théorème de Bayes :

$$\begin{aligned}
 P(R|NS) &= P(NS|R)P(R)/P(NS) \\
 &= (61.36\%)(22\%)/(15\%) \\
 &= 90\%
 \end{aligned}$$

Des calculs très similaires nous permettent de trouver toutes les probabilités manquantes dans l'arbre :



Résoudre l'arbre en calculant les VME

En partant de la droite et en allant vers la gauche :

- À chaque nœud d'évènement, calculer les VME;
- À chaque nœud de décision choisir la décision qui maximise les profits

Pour la branche «Faire l'étude»/ «L'étude prévoit un marché non saturé» :

- Introduction discrète : $VME = 0,9 \times 4,9 + 0,1 \times -5,1 = 3,9M\$$
- Introduction en catimini : $VME = 0,9 \times 2,9 + 0,1 \times -2,1 = 2,4M\$$
- Ne rien faire : $-0,1 M\$$

La décision sera introduction discrète avec une $VME = 3,9$, et on reporte cette valeur à côté du nœud de décision

Pour la branche «Faire l'étude»/ «L'étude prévoit un marché saturé» :

- Introduction discrète : $VME = 0,1 \times 4,9 + 0,9 \times -5,1 = -4,1M\$$
- Introduction en catimini : $VME = 0,9 \times 2,9 + 0,1 \times -2,1 = -1,6M\$$
- Ne rien faire : $-0,1 M\$$

La décision sera de ne pas tenter l'introduction avec une $VME = -0,1$, et on reporte cette valeur à côté du nœud de décision

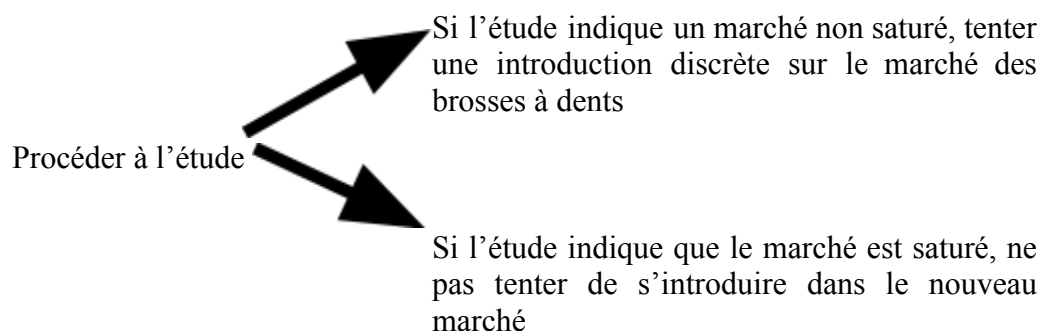
Par la suite, un autre nœud d'évènement se présente, celui du résultat de l'étude de marché:

Étude de marché : $VME = 0,15 \times 3,9 + 0,85 \times -0,1 = 0,5M\$$

La décision sera de procéder à l'étude avec une valeur monétaire espérée de 0,5 millions, soit 500 000\$. (La décision de ne pas faire d'étude de marché avait une VME de 0)

Quelle stratégie devrait choisir le M. Labrosse ?

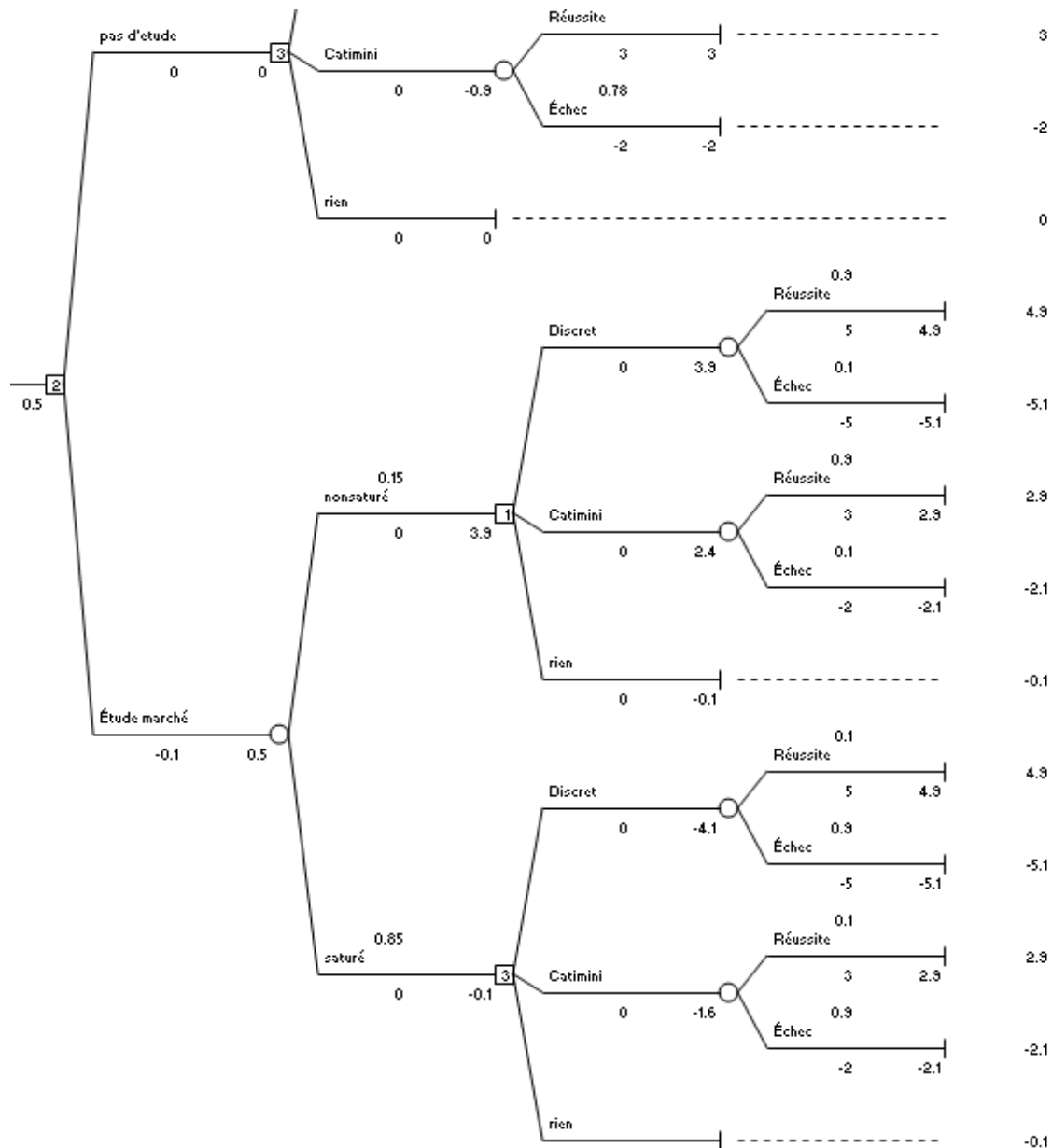
La stratégie est la séquence des décisions prises lors de la résolution de l'arbre énoncées dans l'ordre chronologique:



Cette stratégie a une valeur monétaire espérée de 500 000\$.

Voici maintenant l'arbre final, résolu.

Le petit numéro dans le nœud de décision indique la branche qui a la VME la plus élevée.



Les concepts abordés ici seront repris en théorie des jeux, utilisée en économie, marketing et finance pour ne mentionner qu'eux, en théorie de la décision, le décideur est confronté aux états

de la nature, alors qu'en théorie des jeux le décideur est confronté à un ou plusieurs autres décideurs.