

ÉTUDE DE LA STABILISATION D'UN SATELLITE PAR GRADIENT DE GRAVITÉ

Remarque : l'énoncé admet, parfois implicitement, que le centre d'inertie du satellite a un mouvement circulaire uniforme ; la justification que les oscillations ne perturbent pratiquement pas ce mouvement se trouve en II.3.d.

I - SATELLITE EN FORME D'HALTÈRE

- 1) Le moment en G des forces de gravitation est nul pour $\alpha = 0$, $\alpha = \pi$ et $\alpha = \pm\pi/2$:
- si $\alpha = 0$ ou π , les supports des forces passent par G ;
 - si $\alpha = \pm\pi/2$, les deux forces, symétriques par rapport à G , ont des moments opposés.

$$\vec{M}_G = -\mu m \left(\vec{GA} \wedge \frac{\vec{OA}}{OA^3} + \vec{GB} \wedge \frac{\vec{OB}}{OB^3} \right) = -\mu m \left(\vec{GA} \wedge \frac{\vec{OG} + \vec{GA}}{OA^3} + \vec{GB} \wedge \frac{\vec{OG} + \vec{GB}}{OB^3} \right)$$

$$2) \vec{M}_G = -\mu m \vec{GB} \wedge \vec{OG} \left(\frac{1}{OB^3} - \frac{1}{OA^3} \right) \text{ qui est parallèle à } Gz.$$

Pour un point M proche de G , en notant x' et y' les projections de $\vec{GM}$ sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\vec{OM} = \vec{OG} + \vec{GM}$$

$$OM^2 = OG^2 + GM^2 + 2\vec{OG} \cdot \vec{GM} = r^2 + x'^2 + y'^2 + 2rx'$$

$$\frac{1}{OM^3} = \frac{1}{r^3} \left(1 + \frac{2x'}{r} + \frac{x'^2 + y'^2}{r^2} \right)^{-3/2} \approx \frac{1}{r^3} - \frac{3x'}{r^4} + \dots$$

$$\frac{1}{OB^3} - \frac{1}{OA^3} \approx -\frac{6x'_B}{r^4}$$

D'autre part, $\vec{GB} \wedge \vec{OG} = -y'_B r' \vec{z}$. D'où $\vec{M}_G = -\frac{6\mu m x'_B y'_B}{r^3} = -\frac{6\mu m L^2 \sin \alpha \cos \alpha}{r^3} = -\frac{3\mu m L^2 \sin 2\alpha}{r^3}$

3) Plaçons nous dans le référentiel tournant R_1 . Les moments en G des forces d'inertie de Coriolis et de la tension de la tige sont nuls, car les supports de ces forces passent par G . Montrons que le moment des forces d'inertie d'entraînement est nul :

$$\vec{M}_G(\vec{F}_{ie}) = \vec{GA} \wedge m\omega^2 \vec{OA} + \vec{GB} \wedge m\omega^2 \vec{OB} = \vec{GB} \wedge m\omega^2 (\vec{OB} - \vec{OA}) = \vec{0} \text{ car } \vec{AB} \text{ parallèle à } \vec{GB}.$$

Dans R_1 , le moment des forces se réduit à celui des forces de gravitation. Soit J_G le moment d'inertie du satellite.

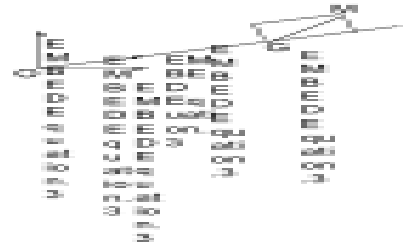
$$J_G \ddot{\alpha} = \vec{M}_G$$

$$2mL^2 \ddot{\alpha} = -\frac{3\mu m L^2 \sin 2\alpha}{r^3}$$

Si α petit, $\sin 2\alpha \approx 2\alpha$; l'équation devient $\ddot{\alpha} + \omega_{osc}^2 \alpha \approx 0$, avec $\omega_{osc} \approx \sqrt{\frac{3\mu}{r^3}}$ et la période

$$T_{osc} = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{3\mu}} = 2\pi \sqrt{\frac{(7 \times 10^6)^3}{3 \times 4 \times 10^{14}}} = 3360 \text{ s}$$

d'oscillation est



II - SATELLITE PLAN

1.a) Dans le référentiel géocentrique R , $dW = F_r dr + F_\theta r d\theta + M_G(d\theta + d\alpha)$.

1.b) $dU = \frac{\partial U}{\partial r} dr + \frac{\partial U}{\partial \alpha} d\alpha = -dW$ est vrai quels que soient dr , $d\theta$ et $d\alpha$, variables indépendantes. En identifiant leurs coefficients dans les deux membres de cette égalité,

$$F_r = -\frac{\partial U}{\partial r} \quad M_G = -\frac{\partial U}{\partial \alpha} \quad F_\theta = -\frac{M_G}{r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \alpha}.$$

1.c) Le moment des forces de gravitation en O est nul, car toutes ces forces ont des supports passant par O .

2.a) Dans R et dans R_3 , $\sigma_G^{\mathbb{W}} = (A+B)(\alpha + \theta)^{\mathbb{W}}_Z$.

Dans R , en utilisant le théorème de König et en tenant compte de ce que la masse du système est

$$2m, \quad E_c = m(\dot{x}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}(A+B)(\dot{\alpha} + \dot{\theta})^2$$

2.b) Dans le référentiel géocentrique R , le moment cinétique $\sigma_O^{\mathbb{W}} = \sigma_G^{\mathbb{W}} + 2mr^2(\dot{\alpha} + \dot{\theta})$ en O est une constante du mouvement. En effet, les seules forces extérieures sont les forces de gravitation, dont les supports passent par O .

Dans le référentiel géocentrique R , l'énergie totale $E_c + U$ est une constante du mouvement. En effet, les forces intérieures ne travaillent pas puisque le satellite est indéformable et les forces extérieures dérivent de l'énergie potentielle U .

3.a) Soit $x' = X \cos \alpha - Y \sin \alpha$ et y' les projections de $\overrightarrow{GM}$ sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$$\iint_P \rho^2 dm = A+B \quad \text{par définition des moments d'inertie.}$$

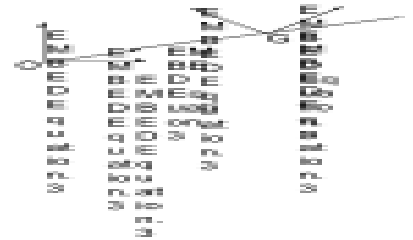
$$\iint_P \rho \cos \phi dm = \iint_P x' dm = 0 \quad \text{par définition du centre d'inertie.}$$

$$\iint_P \rho^2 \cos^2 \phi dm = \iint_P (X \cos \alpha - Y \sin \alpha)^2 dm \quad \text{Or} \quad \iint_P X^2 dm = B, \quad \iint_P Y^2 dm = A \quad \text{et} \quad \iint_P XY dm = 0.$$

D'où

$$\iint_P \rho^2 \cos^2 \phi dm = B \cos^2 \alpha + A \sin^2 \alpha = B \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} + A \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$\iint_P \rho^2 \cos^2 \phi dm = \frac{A+B}{2} + \frac{B-A}{2} \cos 2\alpha$$



3.b)

$$OM^2 = (r + x')^2 + y'^2$$

$$\frac{1}{OM} = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{2x'}{r} + \frac{\rho^2}{r^2} \right)^{-1/2} = \frac{1}{r} - \frac{x'}{r^2} + \frac{3x'^2 - \rho^2}{2r^3} + \frac{3x'\rho^2 - 5x'^3}{2r^4} + \dots$$

$$U = \iint_P -\frac{\mu dm}{OM} = -\frac{\mu m}{r} + \frac{\mu}{r^2} \iint_P x' dm + \frac{\mu}{2r^3} \iint_P (\rho^2 - 3x'^2) dm + \frac{\mu}{2r^4} \iint_P (5x'\rho^2 - 3x'^3) dm + \dots$$

$$U = -\frac{\mu m}{r} + \frac{\mu}{2r^3} \left[(A+B) - 3 \left(\frac{A+B}{2} + \frac{B-A}{2} \cos 2\alpha \right) \right] + \dots$$

$$U = -\frac{\mu m}{r} - \frac{\mu}{4r^3} [(A+B) + 3(B-A) \cos 2\alpha] + \dots$$

Le terme en $1/r^4$ n'est pas nul dans le cas général ; il l'est si le satellite a un centre de symétrie.

$$3.c) \quad M_\theta = -\frac{\partial U}{\partial \alpha} = -\frac{3\mu(B-A)}{2r^3} \sin 2\alpha$$

Dans la partie I, $A=0$ et $B=2mL^2$; l'expression obtenue donne le même résultat qu'en I :

$$M_\theta = -\frac{3\mu mL^2}{r^3} \sin 2\alpha$$

$$F_\theta = -\frac{M_\theta}{r} = \frac{3\mu(B-A)}{2r^4} \sin 2\alpha$$

$$3.d) \quad B-A = 2m'R^2$$

$$\max(|M_\theta|) = \frac{3\mu m'R^2}{r^3} = \frac{3 \times 4 \times 10^{14} \times 3 \times 4^2}{(7 \times 10^6)^3} = 1,7 \times 10^{-4} \text{ N.m}$$

$$\max(|F_\theta|) = \frac{\max(|M_\theta|)}{r} = \frac{1,7 \times 10^{-4}}{7 \times 10^6} = 2,4 \times 10^{-11} \text{ N}$$

Le terme principal de F_r est $-\frac{\mu}{r^2} = -\frac{4 \cdot 10^{14}}{(7 \cdot 10^6)^2} = -57 \text{ N}$. Sous l'action de cette force, le mouvement est circulaire uniforme. Il est intéressant de considérer le terme suivant du

développement de F_r , soit $-\frac{3\mu}{4r^4} (A+B+3(B-A)\cos 2\alpha)$, dont la variation maximale est

$$\frac{9\mu m'R^2}{2r^4} = \frac{3}{2} \max(|F_\theta|)$$

. On voit que F_θ et la variation de F_r sont négligeables devant le terme indépendant de α du développement de F_r ; les oscillations du satellite ne déforment guère son mouvement, qui reste sensiblement circulaire uniforme.

$$4.a) \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{86164} = 7,29 \times 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$$

La loi fondamentale de la dynamique appliquée au satellite s'écrit $\frac{\mu m}{r^2} = m\omega^2 r$, d'où $r = (\mu/\omega^2)^{1/3} = (4 \times 10^{14})^{1/3} / (7,29 \times 10^{-5})^{2/3} = 4,22 \times 10^7 \text{ m}$.

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi \times 4,22 \times 10^7}{86164} = 3080 \text{ m.s}^{-1}$$

4.b) Le moment en G des forces d'inertie de Coriolis est nul, car les supports de ces forces passent par G . Montrons que le moment des forces d'inertie d'entraînement est nul :

$$\vec{M}_G(\vec{F}_{ie}) = \iint_P \vec{GM} \wedge dm \omega^2 \vec{OM} = \iint_P \vec{GM} \wedge dm \omega^2 (\vec{OG} + \vec{GM}) = \vec{0} \quad \text{car} \quad \iint_P \vec{GM} dm = \vec{0}.$$

Le moment des forces est donc égal à celui des forces de gravitation. Le théorème du moment cinétique donne :

$$(A+B)\ddot{\alpha} = -\frac{3\mu(B-A)\sin 2\alpha}{2r^3}$$

$$\ddot{\alpha} + \frac{3\mu}{2r^3} \frac{B-A}{A+B} \sin 2\alpha = 0$$

4.c) Une orientation d'équilibre est stable si le moment des forces est une fonction décroissante de l'angle.

Les orientations d'équilibres sont :

- $\alpha = 0$ et $\alpha = \pi$, qui sont instables si $A > B$ et stables si $A < B$;
- $\alpha = \pm \pi/2$, qui sont stables si $A > B$ et instables si $A < B$.

Au voisinage d'une orientation α_{eq} d'équilibre stable, si $\alpha = \alpha_{eq} + \varepsilon$ ($\varepsilon \ll 1$),

$$\ddot{\alpha} + \frac{3\mu}{r^3} \frac{|B-A|}{A+B} \varepsilon = 0$$

$$T_{osc} = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{3\mu} \frac{A+B}{|B-A|}} = \frac{T_{orb}}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{A+B}{|B-A|}} = \sqrt{\frac{4}{3}} 86164 = 99500 \text{ s}$$

4.d) La conservation de l'énergie s'écrit :

$$\frac{1}{2}(A+B)\dot{\alpha}^2 - \frac{3\mu(B-A)}{4r^3} \cos 2\alpha = \frac{1}{2}(A+B)\dot{\alpha}_0^2 - \frac{3\mu(B-A)}{4r^3} \cos 2\alpha_0$$

$$\dot{\alpha}^2 = f(\alpha) = \dot{\alpha}_0^2 + \frac{3\mu(B-A)}{2r^3(A+B)} (\cos 2\alpha - \cos 2\alpha_0)$$

Pour que le mouvement soit non révolutif, il faut que $\dot{\alpha}$ puisse s'annuler, donc que le minimum de $f(\alpha)$ soit négatif.

Si $B > A$, le minimum de $f(\alpha)$ a lieu quand $\cos 2\alpha$ est minimum, soit pour $\cos 2\alpha = -1$. La condition devient

$$\dot{\alpha}_0^2 - \frac{3\mu|A-B|}{2r^3(A+B)} (1 + \cos 2\alpha_0) < 0$$

$$|\dot{\alpha}_0| < \sqrt{\frac{3\mu|A-B|}{r^3(A+B)}} \cos|\alpha_0| = \frac{2\pi}{T_{osc}} \sin|\alpha_0| = \frac{2\pi}{99500} \cos 40^\circ = 4,84 \times 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$$

$$\text{Si } B < A, \text{ la condition est } |\dot{\alpha}_0| < \frac{2\pi}{T_{osc}} \sin|\alpha_0|.$$

III - SATELLITE DE FORME QUELCONQUE

$$1.a) \quad \vec{M}_G = -\iiint \vec{GM} \wedge \frac{\mu \vec{OM}}{OM^3} dm = -\mu \iiint \frac{\vec{GM} \wedge (\vec{OG} + \vec{GM})}{OM^3} dm = \mu \vec{OG} \wedge \iiint \frac{\vec{GM}}{OM^3} dm$$

$$OM^2 = OG^2 + GM^2 + 2\vec{OG} \cdot \vec{GM}$$

$$\frac{1}{OM^3} = \frac{1}{OG^3} \left(1 + \frac{2\vec{OG} \cdot \vec{GM}}{OG^2} + \frac{GM^2}{OG^2} \right)^{-3/2} \approx \frac{1}{OG^3} \left(1 - \frac{3\vec{OG} \cdot \vec{GM}}{OG^2} \right)$$

$$\vec{M}_G = \mu \frac{\vec{OG}}{OG^3} \wedge \iiint \vec{GM} dm - \frac{3\mu \vec{OG}}{OG^5} \wedge \iiint (\vec{OG} \cdot \vec{GM}) \vec{GM} dm$$

$$\vec{OG} = (\alpha X + \beta Y + \gamma Z) \vec{r} \quad \vec{GM} = XX + YY + ZZ$$

$$\vec{M}_G = -\frac{3\mu}{r^3} \iiint dm (\alpha X + \beta Y + \gamma Z) \begin{vmatrix} \alpha & X \\ \beta & Y \\ \gamma & Z \end{vmatrix}$$

$$M_{Gx} = -\frac{3\mu}{r^3} \iiint (\alpha X + \beta Y + \gamma Z)(\beta Z - \gamma Y) dm$$

Rappelons que $\iiint (X^2 + Y^2) dm = C$, $\iiint (Y^2 + Z^2) dm = A$, $\iiint (Z^2 + X^2) dm = B$ et $\iiint XY dm = \iiint YZ dm = \iiint ZX dm = 0$

$$M_{Gx} = \frac{3\mu}{r^3} \beta \gamma \iiint (Y^2 - Z^2) dm = 3\omega^2 \beta \gamma (C - B)$$

Par permutation circulaire sur les indices de coordonnées,

$$M_{Gy} = 3\omega^2 \gamma \alpha (A - C)$$

$$M_{Gz} = 3\omega^2 \alpha \beta (B - A)$$

1.b) Notons l'angle entre la radiale et la tige de la première partie $\alpha' = (\vec{x}, \vec{u})$ pour le distinguer de la coordonnée α du vecteur unitaire radial ; $A = 0$, $B = C = 2mL^2$, $\alpha = \cos \alpha'$, $\beta = -\sin \alpha'$, $\gamma = 0$; d'où $M_{Gx} = M_{Gy} = 0$, $M_{Gz} = 3\omega^2 \alpha \beta (B - A) = -6\omega^2 mL^2 \cos \alpha' \sin \alpha'$ en accord avec les résultats de la première partie.

2.a) Pour passer de la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ de R_1 à la base $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ de R_2 , on peut enchaîner les trois rotations suivantes :

- $(\vec{v}, \vec{w})$ tourne de ψ autour de $\vec{u}$, devenant $(\vec{N}, \vec{N}')$;
- $(\vec{u}, \vec{N}')$ tourne de θ autour de $\vec{N}$, donnant $(\vec{Z}, \vec{N}'')$;
- $(\vec{N}, \vec{N}'')$ tourne de ϕ autour de $\vec{Z}$, donnant $(\vec{X}, \vec{Y})$.

Le vecteur rotation de R_2 par rapport à R_1 est donc $\psi \vec{u} + \theta \vec{N} + \phi \vec{Z}$ et celui de R_2 par rapport à R est $\vec{\Omega} = \psi \vec{u} + \theta \vec{N} + \phi \vec{Z} + \omega \vec{w}$

$\begin{aligned} N &= X \cos \phi - Y \sin \phi \\ N'' &= X \sin \phi + Y \cos \phi \end{aligned}$	$\begin{aligned} u &= Z \cos \theta + N'' \sin \theta \\ N' &= -Z \sin \theta + N'' \cos \theta \end{aligned}$	$\begin{aligned} w &= N \sin \psi + N' \cos \psi \\ v &= N \cos \psi - N' \sin \psi \end{aligned}$

$$\Omega = \omega \left(Z \cos \theta + (X \sin \phi + Y \cos \phi) \sin \theta \right) + \theta (X \cos \phi - Y \sin \phi) + \phi Z + \omega w \quad \text{où}$$

$$w = \omega \left((X \cos \phi - Y \sin \phi) \sin \psi + (-Z \sin \theta + (X \sin \phi + Y \cos \phi) \cos \theta) \cos \psi \right)$$

En projetant :

$$\Omega_X = \omega \sin \phi \sin \theta + \theta \cos \phi + \omega (\cos \phi \sin \psi + \sin \phi \cos \theta \cos \psi)$$

$$\Omega_Y = \omega \cos \phi \sin \theta - \theta \sin \phi + \omega (-\sin \phi \sin \psi + \cos \phi \cos \theta \cos \psi)$$

$$\Omega_Z = \omega \cos \theta + \phi - \omega \sin \theta \cos \psi$$

2.b) En supposant ω fini et constant et ψ, ε, ϕ ainsi que leurs dérivées infiniment petits :

$$\Omega_X = \phi + \omega \psi$$

$$\Omega_Y = \psi - \omega \varepsilon$$

$$\Omega_Z = \phi - \omega$$

On peut se demander s'il n'aurait pas fallu considérer ω , non pas comme nul, mais comme un infiniment petit comparable à ψ, ε, ϕ . En réalité, la conservation du moment cinétique total, orbital et oscillatoire, montre que ω est plus petit que ψ, ε, ϕ d'un facteur égal au carré du rapport de la dimension du satellite au rayon de son orbite.

2.c)

$$\sigma_{GX} = A \Omega_X \approx A(\phi + \omega \psi)$$

$$\sigma_{GY} = B \Omega_Y \approx B(\psi - \omega \varepsilon)$$

$$\sigma_{GZ} = C \Omega_Z \approx C(\phi - \omega)$$

Nous avons montré en 2.a que $u = Z \cos \theta + (X \sin \phi + Y \cos \phi) \sin \theta$, d'où

$$\alpha = \sin \phi \sin \theta \approx \phi$$

$$\beta = \cos \phi \sin \theta \approx 1$$

$$\gamma = \cos \theta \approx -\varepsilon$$

$$M_{GX} \approx 3\omega^2 (B - C) \varepsilon$$

$$M_{GY} \approx 0$$

$$M_{GZ} \approx 3\omega^2 (B - A) \phi$$

3.a) Dans le référentiel géocentrique R , $\frac{d\vec{\sigma}_G}{dt} = \vec{M}_G$, soit

$$A\left(\frac{d\Omega_X}{dt}\vec{X} + \Omega_X\frac{d\vec{X}}{dt}\right) + B\left(\frac{d\Omega_Y}{dt}\vec{Y} + \Omega_Y\frac{d\vec{Y}}{dt}\right) + C\left(\frac{d\Omega_Z}{dt}\vec{Z} + \Omega_Z\frac{d\vec{Z}}{dt}\right) = \vec{M}_G$$

Comme $\frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{X} = \Omega_Z\vec{Y} - \Omega_Y\vec{Z}$, $\frac{d\vec{Y}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{Y} = \Omega_X\vec{Z} - \Omega_Z\vec{X}$ et $\frac{d\vec{Z}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{Z} = \Omega_Y\vec{X} - \Omega_X\vec{Y}$, les projections de cette équation sur les trois directions principales d'inertie du satellite sont

$$A\frac{d\Omega_X}{dt} + (C-B)\Omega_Y\Omega_Z = M_{GX}$$

$$B\frac{d\Omega_Y}{dt} + (A-C)\Omega_Z\Omega_X = M_{GY}$$

$$C\frac{d\Omega_Z}{dt} + (B-A)\Omega_X\Omega_Y = M_{GZ}$$

Faisons l'approximation linéaire :

$$A(\vec{\omega} + \omega\vec{\psi}) + (B-C)\omega(\vec{\psi} - \omega\vec{\varepsilon}) = 3\omega^2(B-C)\vec{\varepsilon}$$

$$B(\vec{\psi} - \omega\vec{\varepsilon}) + (C-A)\omega(\vec{\varepsilon} + \omega\vec{\psi}) = 0$$

$$C\vec{\phi} + (B-A)\omega(\vec{\psi} - \omega\vec{\varepsilon}) = 3\omega^2(B-A)\vec{\phi}$$

3.b) Si $C = A + B$, le couplage entre $\vec{\psi}$ et $\vec{\varepsilon}$ disparaît dans les deux premières équations.

Pour interpréter cette relation, explicitons-la :

$\int (X^2 + Y^2) dm = \int (Y^2 + Z^2) dm + \int (X^2 + Z^2) dm \Rightarrow \int Z^2 dm = 0$. Z^2 est positif ou nul et les masses sont positives ; le fait qu'une somme de termes positifs ou nuls soit nulle implique que tous les termes de la somme sont nuls : le solide est plan et situé dans le plan $Z = 0$.

3.c) Si $C = A + B$, les équations deviennent :

$$A\vec{\varepsilon} + 4\omega^2(C-B)\vec{\varepsilon} = 0 \quad \vec{\varepsilon} + 4\omega^2\vec{\varepsilon} = 0$$

$$B\vec{\psi} + 4\omega^2(C-A)\vec{\psi} = 0 \quad \vec{\psi} + 4\omega^2\vec{\psi} = 0$$

$$C\vec{\phi} + 3\omega^2(A-B)\vec{\phi} = 0 \quad \text{ou} \quad C\vec{\phi} + 3\omega^2(A-B)\vec{\phi} = 0$$

Pour que la position d'équilibre considérée soit stable, il faut que ces trois équations soient de la forme $\vec{x} + ax = 0$ où $a > 0$. L'équilibre est donc stable si $A > B$. Il est instable si $A < B$. Si $A = B$, notre développement n'est pas assez poussé pour trancher.

3.d) La position d'équilibre considérée est stable, puisque les conditions $C = A + B$ et $A > B$ sont vérifiées.

$$T_{orb} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{\mu}} = 2\pi\sqrt{\frac{(7 \times 10^6)^3}{(4 \times 10^{14})}} = 5818s$$

3.e) La période orbitale est

Les périodes d'oscillation des trois modes sont :

$$T_\psi = T_\varepsilon = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{T_{orb}}{2} = 2909s$$

$$T_\phi = T_{orb}\sqrt{\frac{C}{3(A-B)}} = 5818\sqrt{\frac{360}{3(300-60)}} = 4114s$$

L'expression de T_ϕ est la même que celle trouvée en II.4.c.

Les oscillations sont amorties si les forces subies dans R_2 déforment le satellite et s'il existe une résistance, du type viscosité, à la vitesse de déformation.

4.a) Si $A = B$, les équations linéarisées sont :

$$A\ddot{\varepsilon} + (2A - C)\omega\dot{\varepsilon} + 4(C - A)\omega^2\varepsilon = 0$$

$$A\ddot{\psi} + (C - 2A)\omega\dot{\psi} + (C - A)\omega^2\psi = 0$$

$$\ddot{\phi} = 0$$

La troisième équation signifie que le satellite tourne librement autour de $\hat{Z}$, cette rotation n'étant guère affectée par les oscillations d'orientation.

Cherchons une solution aux deux premières équations de la forme

$$\varepsilon = \text{Re}(\underline{\varepsilon}) \quad \underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}_0 \exp(i\Omega_0 t) \quad \psi = \text{Re}(\underline{\psi}) \quad \underline{\psi} = \underline{\psi}_0 \exp(i\Omega_0 t)$$

$$(-\Omega_0^2 A + 4(C - A)\omega^2)\underline{\varepsilon}_0 + i\Omega_0(2A - C)\omega\underline{\psi}_0 = 0$$

$$i\Omega_0(C - 2A)\omega\underline{\varepsilon}_0 + (-\Omega_0^2 A + (C - A)\omega^2)\underline{\psi}_0 = 0$$

Ce système n'admet que la solution $\underline{\varepsilon}_0 = \underline{\psi}_0 = 0$ sauf si

$$\begin{vmatrix} -\Omega_0^2 A + 4(C - A)\omega^2 & i\Omega_0(2A - C)\omega \\ i\Omega_0(C - 2A)\omega & -\Omega_0^2 A + (C - A)\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

ce qui conduit à l'équation du second degré en Ω_0^2 :

$$A^2\Omega_0^4 - [5A(C - A) + (C - 2A)^2]\omega^2\Omega_0^2 + 4(C - A)^2\omega^4 = 0 \quad \text{ou}$$

$$A^2\Omega_0^4 - (C^2 + AC - A^2)\omega^2\Omega_0^2 + 4(C - A)^2\omega^4 = 0$$

4.b) Le discriminant de cette équation est $\Delta = (C^2 + AC - A^2)^2 - 16A^2(C - A)^2$.

La solution proposée existe si les racines de cette équation existent et sont positives (elles sont du même signe). Le discriminant est positif si $|C^2 + AC - A^2| > 4A|C - A|$; les racines sont alors positives si $C^2 + AC - A^2 > 0$; d'où la condition d'existence des solutions du type considéré :

$$C^2 + AC - A^2 > 4A|C - A| \quad \text{ou} \quad 1 + x - x^2 > 4x|1 - x| \quad \text{ou} \quad x < \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$$

Si cette condition n'est pas vérifiée, l'orientation d'équilibre $\psi = 0, \varepsilon = \pi/2$ est instable.

Pour garder la fonte english incorporée dans le fichier, ne pas supprimer cette ligne : M