

PARTIE 1 Représentations graphiques de fonctions

On considère comme connue la notion de fonction, le vocabulaire associé (image, antécédent, ensemble de définition...), les notations ($f: x \mapsto \dots$, $f(x) \dots$).

I. Représentation graphique d'une fonction

Définition

On considère le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On appelle **représentation graphique de la fonction** f l'ensemble des points de coordonnées $(x; f(x))$ où x appartient à l'ensemble de définition.

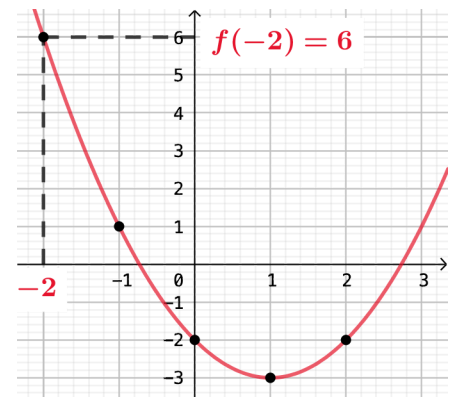
Exemple

On veut représenter sur l'intervalle $[-2; 2]$ la fonction définie par

$$f(x) = (x - 1)^2 - 3$$

On utilise le un tableau des valeurs suivant.

Abscisses	x	-2	-1	0	1	2
Ordonnées	$f(x)$	6	1	-2	-3	-2



II. Position relative de deux courbes

Définition

Soit C_f et C_g les courbes représentatives, dans un repère du plan, de deux fonctions f et g sur un intervalle I . Étudier la position relative de deux courbes, c'est préciser pour quelles valeurs l'une se situe au-dessus de l'autre et en quels points elles se croisent.

Exemple

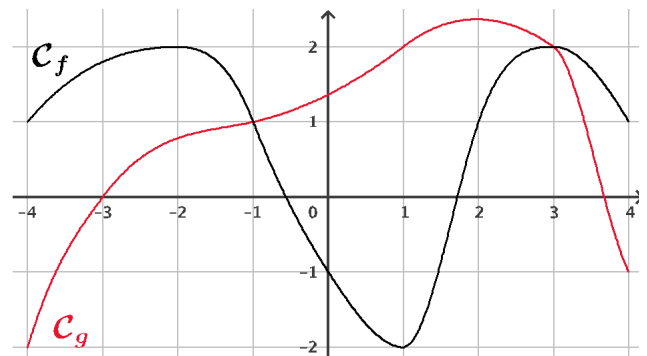
Sur les intervalles $] -4; -1[$ et $]3; 4[$, la courbe C_f est située au-dessus de la courbe C_g

$$\forall x \in] -4; -1[\cup]3; 4[, f(x) > g(x)$$

Sur l'intervalle $] -1; 3[$, la courbe C_f est située au-dessous de la courbe C_g

$$\forall x \in] -1; 3[, f(x) < g(x)$$

Les courbes se croisent aux points d'abscisses -1 et 3.



Méthode

Pour étudier la position relative de C_f et C_g sur I , il suffit de comparer les fonctions f et g en étudiant le signe de $f(x) - g(x)$.

- Si $f(x) - g(x) > 0$ pour tout réel x de l'intervalle I , alors C_f est strictement au-dessus de C_g sur I .
- Si $f(x) - g(x) < 0$ pour tout réel x de l'intervalle I , alors C_f est strictement au-dessous de C_g sur I .
- Les solutions de l'équation $f(x) - g(x) = 0$ sont les abscisses des points d'intersection des deux courbes.

Exemple

Soit deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - 1$ et $g(x) = -x + 2$. Soient C_f et C_g leurs courbes représentatives. Étudier la position relative des courbes C_f et C_g .

Solution

$$f(x) - g(x) < 0 \Leftrightarrow (2x - 1) - (-x + 2) < 0 \Leftrightarrow 3x - 3 < 0 \Leftrightarrow 3x < 3 \Leftrightarrow x < 1$$

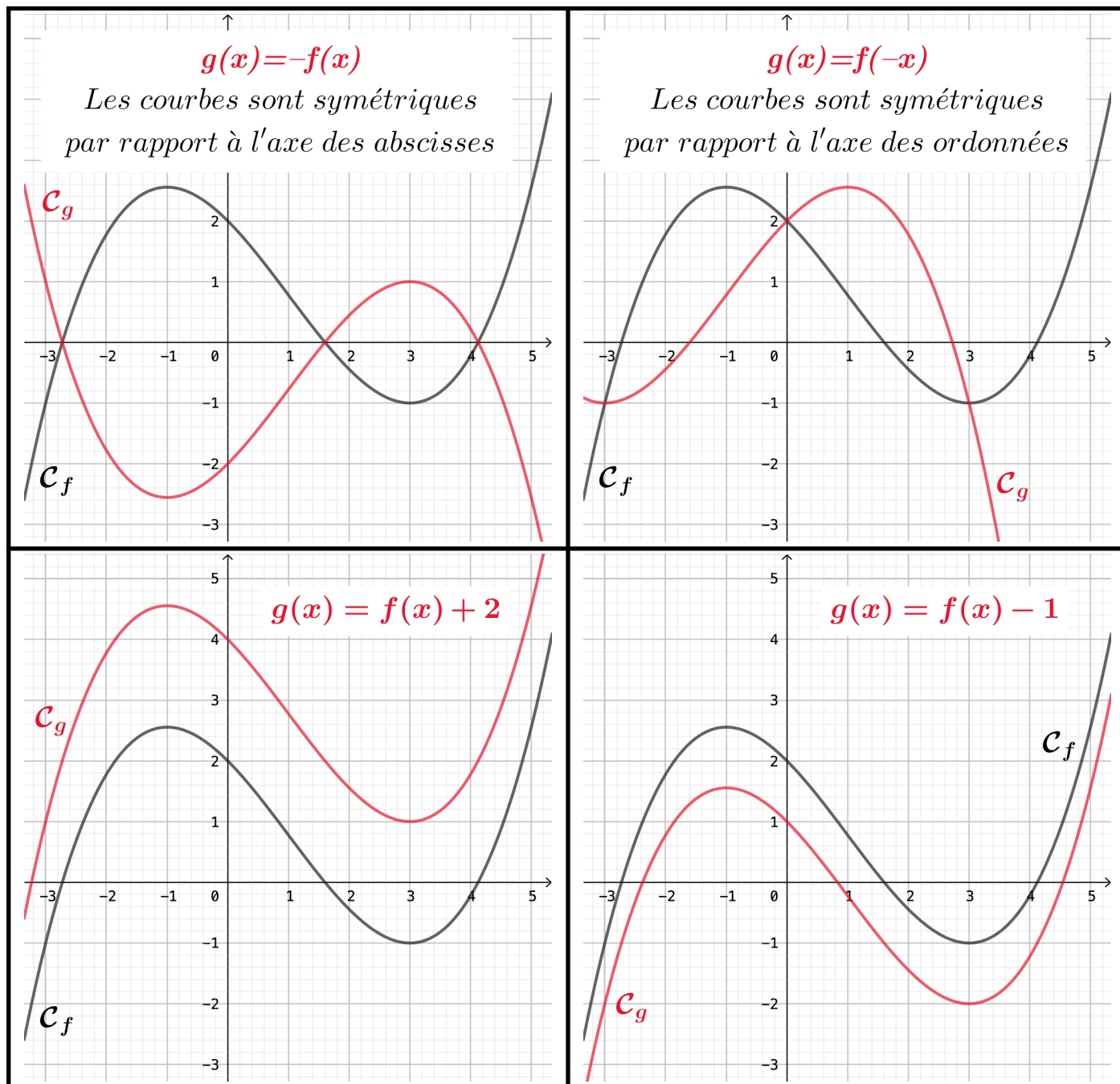
Pour tout nombre réel x de l'intervalle $] - \infty; 1[$, la courbe C_f est donc au-dessous de C_g . Pour tout nombre réel x de l'intervalle $]1; + \infty[$, la courbe C_f est au-dessus de C_g . Les courbes se croisent au point de coordonnées $(1; 1)$.

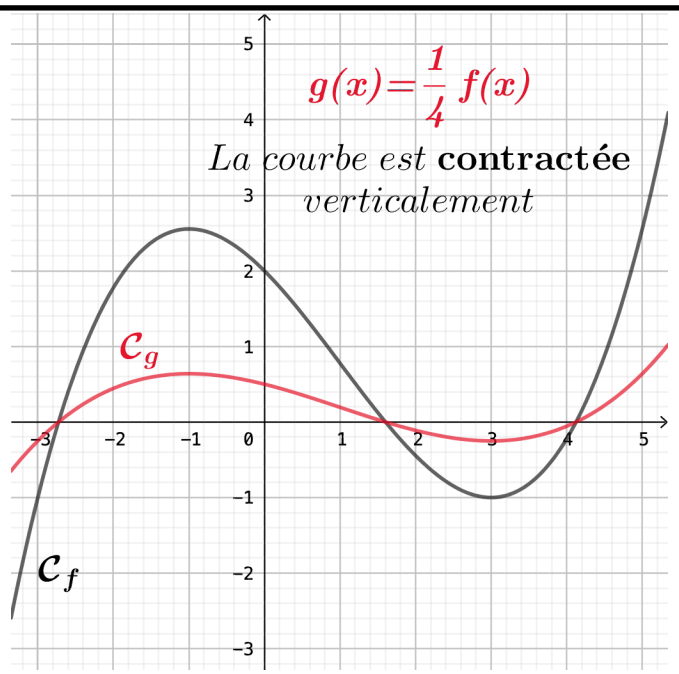
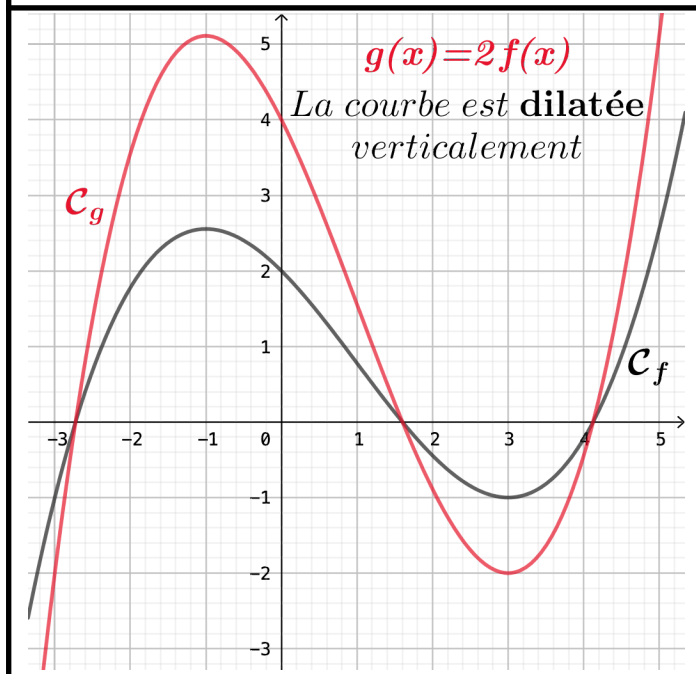
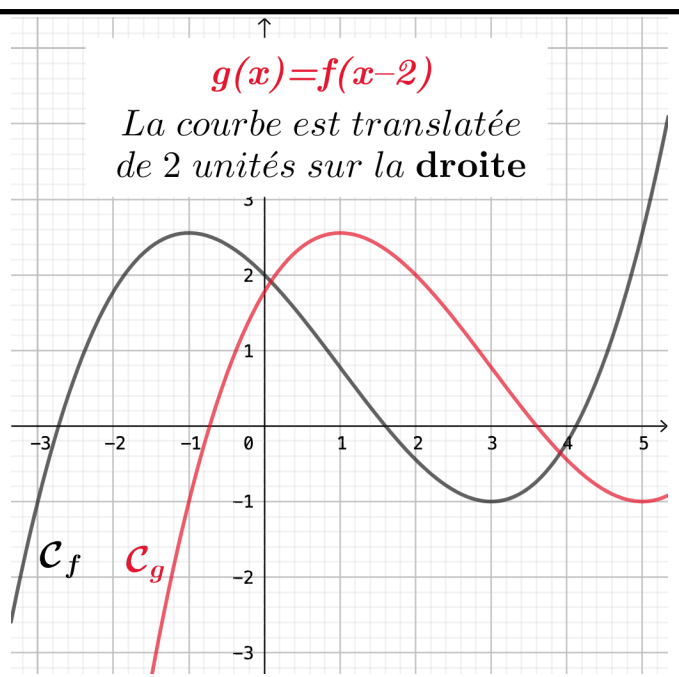
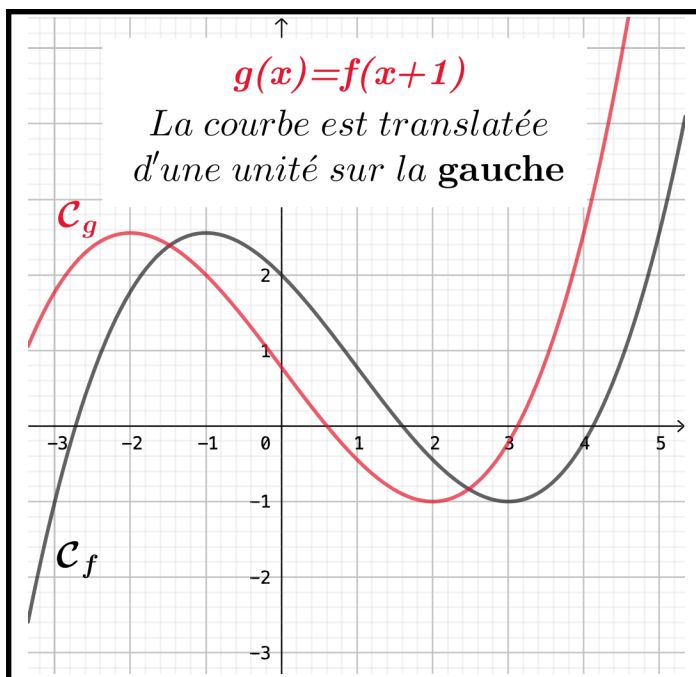
$$f(1) = 2 \times 1 - 1 = -1 + 2 = g(1) = 1$$

III. Déplacement de courbes

On considère par exemple dans ce paragraphe la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - x + 2$$







PARTIE 2 Dérivation

I. Taux d'accroissement

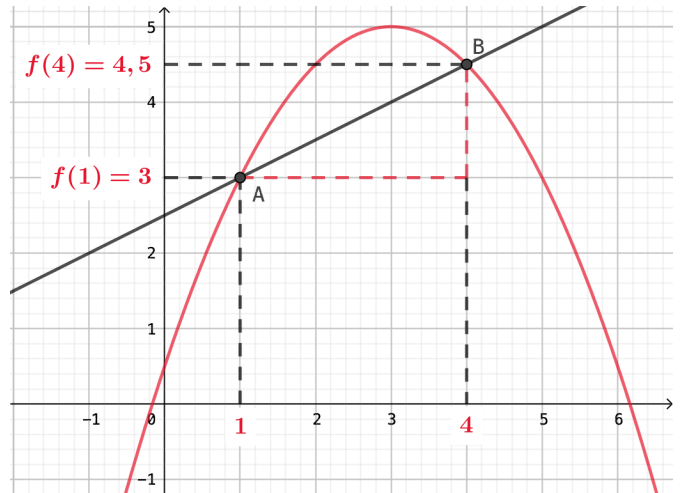
Exemple

Soit une fonction f définie sur un intervalle I . Soit A et B deux points de la courbe représentative de f d'abscisses respectives 1 et 4.

Le **coefficient directeur de la droite (AB)** égale

$$\frac{f(4)-f(1)}{4-1} = \frac{4,5-3}{4-1} = 0,5$$

Ce quotient est appelé le **taux d'accroissement** de f entre 1 et 4.



Méthode Calculer un taux d'accroissement

Soit la fonction carrée f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2$$

1. Calculer le taux d'accroissement de f entre 2 et 3.

2. Soit h un réel non nul. Calculer le taux d'accroissement de f entre 2 et $2 + h$.

Solution

1. Le taux d'accroissement de f entre 2 et 3 égale

$$\frac{f(3)-f(2)}{3-2} = \frac{3^2-2^2}{1} = 5$$

2. Le taux d'accroissement de f entre 2 et $2 + h$ égale

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{2+h-2} = \frac{(2+h)^2-2^2}{h} = \frac{4+4h+h^2-4}{h} = \frac{4h+h^2}{h} = 4 + h$$

II. Nombre dérivé

Soit une fonction f définie sur un intervalle I . Soit un réel a appartenant à I . Soit un réel $h \neq 0$ tel que $a + h \in I$.

Soit A et M deux points de la courbe représentative de f d'abscisses respectives a et $a + h$.

Le coefficient directeur de la droite (AM) qui est aussi le d'accroissement de f entre a et $a + h$ égale

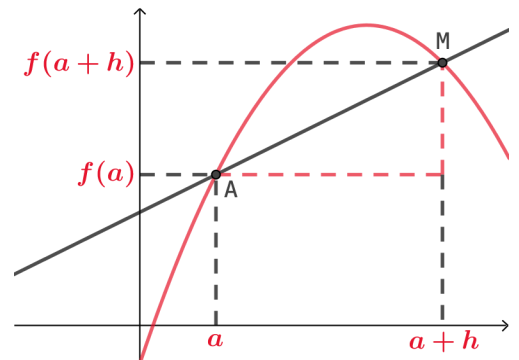
$$\frac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Lorsque le point M se rapproche du point A, le coefficient directeur de la droite (AM) est égal à la limite de

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

lorsque h tend vers 0.

Lorsqu'elle existe, la limite de ce coefficient directeur lorsque h tend vers 0 s'appelle le **nombre dérivé de f en a** .



Définition

On dit que la fonction f est **dérivable en a** s'il existe un nombre réel L , tel que

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = L$$

L est appelé le **nombre dérivé de f en a** . On note alors $f'(a) = L$

Méthode Déterminer un nombre dérivé.

Soit la fonction trinôme f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3$. Déterminer le nombre dérivé de f en $x = 1$

Solution

Soit $h \neq 0$,

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2-3-(1^2-3)}{h} = \frac{1+2h+h^2-3-1+3}{h} = \frac{2h+h^2}{h} = 2 + h$$

Donc

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2 + h) = 2$$



On en déduit que f est dérivable en $x = 1$. Le nombre dérivé de f en 1 vaut 2. On note $f'(1) = 2$

Tangente à une courbe

Soit une fonction f définie sur un intervalle I et dérivable en un nombre réel a appartenant à I . $f'(a)$ est le nombre dérivé de f en a . A est un point d'abscisse a appartenant à la courbe représentative C_f de f .

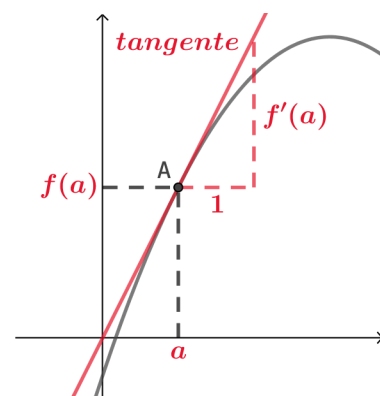
Définition

La **tangente** à la courbe C_f au point A d'abscisse a est la droite passant par le point A de **coefficient directeur le nombre dérivé $f'(a)$** .

Propriété

Une équation de la tangente à la courbe C_f en A est

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$



Méthode Déterminer le coefficient directeur et l'équation d'une tangente à une courbe.

On considère la fonction trinôme f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3$ dont la dérivabilité en 1 a été étudiée plus haut. Déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point A de la courbe d'abscisse 1 et une équation de tangente à la courbe représentative de f au point A de la courbe d'abscisse 1.

Solution

On a vu que le nombre dérivé de f en 1 vaut 2. Ainsi la tangente à la courbe représentative de f au point A de la courbe d'abscisse 1 est la droite passant par A et de coefficient directeur 2.

$$f'(1) = 2$$

Son équation est de la forme

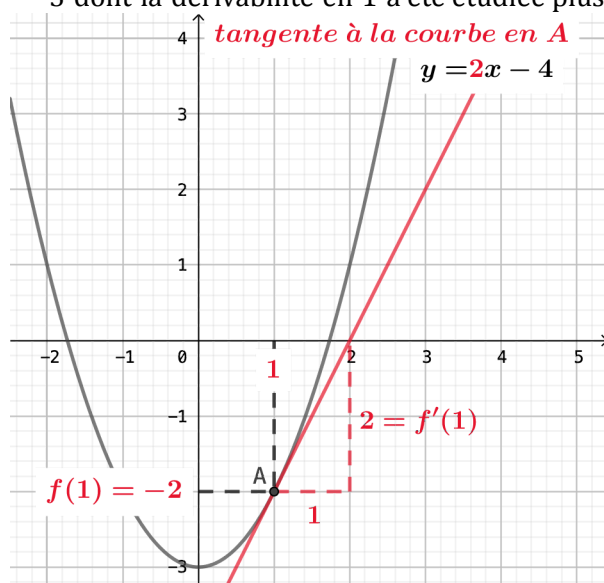
$$y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

Soit

$$y = 2(x - 1) + (-2) \Leftrightarrow y = 2x - 4$$

Une équation de tangente à la courbe représentative de f au point A de la courbe d'abscisse 1 est

$$y = 2x - 4$$



III. Fonction dérivée

Définitions

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . On dit que f est **dérivable** sur I si elle est dérivable en tout réel x de I . Dans ce cas, la fonction qui à tout réel x de I associe le nombre dérivé de f en x est appelée **fonction dérivée** de f et se note f' .

Formules de dérivation des fonctions usuelles

Fonction f	Ensemble de définition de f	Dérivée f'	Ensemble de définition de f'
$f(x) = a, a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax, a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$



$f(x) = \frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$[0; +\infty[$

Exemples

1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4$ alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = 4x^3$

2. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = \frac{1}{x^5}$$

alors f est dérivable sur $] -\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$ et on a pour tout x de $\mathbb{R}^*$,

$$f'(x) = -\frac{5}{x^6}$$

IV. Formules d'opération sur les fonctions dérivées

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I .

$u + v$ est dérivable sur I	$(u + v)' = u' + v'$
ku est dérivable sur I , où k est une constante	$(ku)' = ku'$
uv est dérivable sur I	$(uv)' = u'v + uv'$
$\frac{1}{u}$ est dérivable sur I , où u ne s'annule pas sur I	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$ est dérivable sur I , où v ne s'annule pas sur I	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
u^n où $n \in \mathbb{N}^*$ est dérivable sur I	$(u^n)' = nu'u^{n-1}$

Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes sur leur domaine de définition I .

1. $f_1(x) = 5x^3$

2. $f_2(x) = 3x^2 + 4\sqrt{x}$

3. $f_3(x) = \frac{1}{2x^2 + 5x}$

4. $f_4(x) = (3x^2 + 4x)(5x - 1)$

5. $f_5(x) = \frac{6x-5}{x^3-2x^2-1}$

6. $f_6(x) = (6x - 5)^3$

Solution

1. Soit $x \in I$, $f_1(x) = 5u(x)$ avec $u(x) = x^3$ et $u'(x) = 3x^2$

$$\text{Donc } f_1'(x) = 5u'(x) = 5 \times 3x^2 = 15x^2$$

2. Soit $x \in I$, $f_2(x) = u(x) + v(x)$ avec $u(x) = 3x^2$ et $u'(x) = 6x$

$$v(x) = 4\sqrt{x} \quad v'(x) = 4 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}}$$

Donc

$$f_2'(x) = u'(x) + v'(x) = 6x + \frac{2}{\sqrt{x}}$$

3. Soit $x \in I$, $f_3(x) = \frac{1}{u(x)}$ avec $u(x) = 2x^2 + 5x$ et $u'(x) = 4x + 5$

Donc

$$f_3'(x) = -\frac{u'(x)}{(u(x))^2} = -\frac{4x+5}{(2x^2+5x)^2}$$

4. Soit $x \in I$, $f_4(x) = u(x)v(x)$ avec $u(x) = 3x^2 + 4x$ et $u'(x) = 6x + 4$

$$v(x) = 5x - 1 \quad v'(x) = 5$$

Donc

$$f_4'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = (6x + 4)(5x - 1) + (3x^2 + 4x) \times 5$$

$$f_4'(x) = 30x^2 - 6x + 20x - 4 + 15x^2 + 20x = 45x^2 + 34x - 4$$

5. Soit $x \in I$, $f_5(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = 6x - 5$ et $u'(x) = 6$

$$v(x) = x^3 - 2x^2 - 1 \quad v'(x) = 3x^2 - 4x$$

Donc

$$f_5'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} = \frac{6(x^3 - 2x^2 - 1) - (6x - 5)(3x^2 - 4x)}{(x^3 - 2x^2 - 1)^2}$$

$$f_5'(x) = \frac{6x^3 - 12x^2 - 6 - 18x^3 + 24x^2 + 15x^2 - 20x}{(x^3 - 2x^2 - 1)^2} = \frac{-12x^3 + 27x^2 - 20x - 6}{(x^3 - 2x^2 - 1)^2}$$

$$6. f_6'(x) = 3 \times 6(6x - 5)^2 = 18(6x - 5)^2$$

V. Variations de fonction

Théorème

Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I .

- Si, pour tout réel $x \in I$, $f'(x) \leq 0$, alors f est **décroissante** sur I .
- Si, pour tout réel $x \in I$, $f'(x) \geq 0$, alors f est **croissante** sur I .

Méthode Étudier les variations d'une fonction

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2x - 4$$

$$f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow 2x - 4 \leq 0 \Leftrightarrow 2x \leq 4 \Leftrightarrow x \leq 2$$

La dérivée f' est **négative** sur l'intervalle $] - \infty; 2]$ donc la fonction f est **décroissante** sur l'intervalle $] - \infty; 2]$.

De la même façon, la fonction f est croissante sur l'intervalle $[2; + \infty[$. On peut résumer ceci dans un **tableau de variations**.



x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	$+\infty$	-4	$+\infty$

Une application en économie : coût total, coût moyen et coût marginal

Une **fonction CT de coût total** exprime l'ensemble des charges affectées à un produit en fonction d'une quantité non nulle x de tonnes fabriquées. Les fonctions de coût prennent souvent la forme d'une fonction polynomiale du troisième degré. Prenons par exemple

$$CT(x) = x^3 - 2x^2 + 10x + 150$$

La notion de **Coût marginal Cm** , Incremental Cost en anglais, consiste à évaluer le coût d'une unité produite supplémentaire (en fait, d'accepter ou de refuser une commande). Mathématiquement, le coût marginal Cm s'évalue comme la **dérivée du coût total**.

La fonction de coût marginal étant la dérivée de CT , on obtient

$$Cm(x) = CT'(x) = 3x^2 - 4x + 10$$

Précisons que la dérivée ne permet qu'une approximation affine. Par exemple, le coût de la sixième tonne est de

$$CT(6) - CT(5) = 354 - 275 = 79$$

Il est sensiblement différent de

$$Cm(5) = 65$$

la **fonction de coût moyen CM** est tout simplement celle du coût total divisée par la quantité. On obtient ici

$$\forall x \in]0, +\infty[, CM(x) = \frac{CT(x)}{x} = x^2 - 2x + 10 + \frac{150}{x}$$

On trace les deux courbes Cm et CM . On remarque que les courbes se croisent là où le coût moyen est le plus faible. Ce niveau de production est appelé **optimum technique**. Tant qu'une tonne supplémentaire est moins coûteuse que la moyenne, il est évident que sa production implique un coût unitaire globalement plus avantageux. Mais au-delà de l'optimum technique, les tonnes produites à des coûts de plus en plus élevés se traduisent par un coût unitaire moyen forcément croissant.

Remarque

Il est normal d'observer des fonctions de coûts unitaires (moyen ou marginal) décroissantes puis croissantes (donc convexes). Décroissantes parce que les coûts fixes sont rentabilisés au fur et à mesure que la production augmente puis croissantes parce qu'au-delà d'un certain niveau de production celle-ci devient de plus en plus coûteuse (heures supplémentaires, appel à des sous-traitants, etc.).

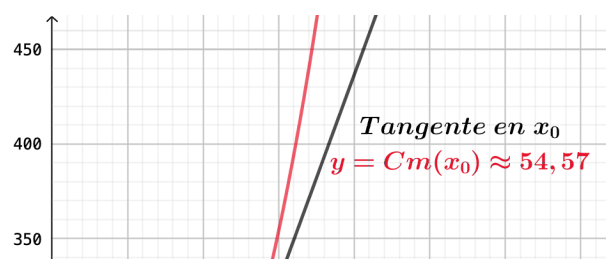
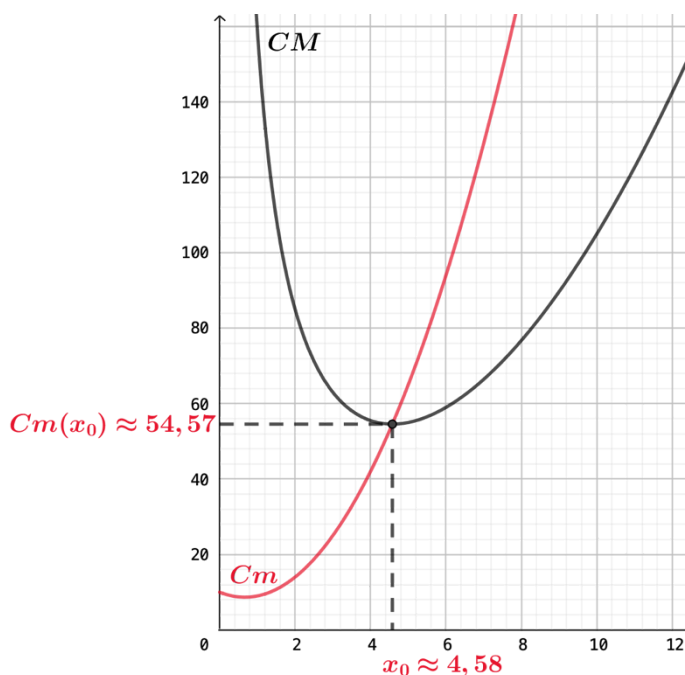
Pour définir l'optimum technique, on peut choisir entre au moins deux techniques. Soit on égalise les expressions des deux fonctions, soit on dérive CM pour savoir en quel point elle s'annule.

$$\forall x \in]0, +\infty[, CM'(x) = 2x - 2 - \frac{150}{x^2}$$

Il n'existe aucun moyen algébrique simple de résoudre l'équation $CM'(x) = 0$. Remarquons cependant que

$$\forall x \in]0, +\infty[, CM''(x) = 2 + \frac{300}{x^3} > 0$$

CM' est donc continue et strictement croissante sur l'intervalle $]0, +\infty[$. Le théorème des valeurs



intermédiaires permet d'affirmer qu'il existe une seule solution x_0 sur l'intervalle $]0, +\infty[$. Avec une calculatrice, un logiciel ou un site tel que **dcode.fr**, on trouve

$$x_0 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{2027}{2} - \frac{45\sqrt{2029}}{2}} + \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{1}{2}(2027 + 45\sqrt{2029})} \approx 4,58$$

Pour connaître le coût unitaire (moyen ou marginal), on calcule $CM(x_0)$ ou $Cm(x_0)$, au choix puisque ces coûts sont égaux à ce niveau de production. Il s'avère que le coût s'établit à environ 54,6 unités monétaires.

Par ailleurs, on peut représenter la **courbe du coût total**. On trace la tangente au point d'abscisse $x_0 \approx 4,58$. Le

coût moyen est égal au coefficient directeur de cette dernière. L'équation de cette tangente est

$$y = CT(x_0) + CT'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y = x_0 \times CM(x_0) + Cm(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y = x_0 \times CM(x_0) + Cm(x_0) \times x - Cm(x_0) \times x_0 \Leftrightarrow$$

On découvre ici une deuxième façon de déterminer l'optimum technique : on trace la courbe du coût total puis **la seule tangente à cette courbe qui parte de l'origine**. Il se trouve que c'est justement la tangente au point d'abscisse x_0

