

Теоретико-множественный смысл сложения и вычитания на множестве целых неотрицательных чисел.

Отношения «равно», «меньше».

Отношения «больше на», «меньше на».

Правила вычитания числа из суммы и суммы из числа.

Мы можем изобразить объединение двух конечных множеств. Число элементов объединения двух конечных множеств можно найти, используя счет, т.е. установление взаимно однозначного соответствия между объединением множеств и отрезком натурального ряда.

Кроме того в теории множеств доказано, что число элементов объединения двух непересекающихся множеств равно сумме числа элементов первого и второго множеств.

К р а т к а я з а п и с ь : $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$ (1), если $A \cap B = \emptyset$.

Пусть $m(A) = a$, $m(B) = b$ и $a, b \in \mathbb{N}_0$; сделав замену в равенстве (1), получим предложение $a + b = m(A \cup B)$, из которого получается определение суммы чисел a и b .

Определение 7. Суммой любых целых неотрицательных чисел a и b называется число элементов объединения непересекающихся множеств A и B , таких, что $a = m(A)$, $b = m(B)$.

К р а т к а я з а п и с ь : $a + b = m(A \cup B)$, где $m(A) = a$, $m(B) = b$, $A \cap B = \emptyset$

Из определения суммы чисел a и b мы видим связь сложения двух целых неотрицательных чисел с объединением двух непересекающихся множеств. Связь объединения множеств со сложением чисел раскроем при решении текстовых задач.

З а д а н и е 2.

Найдите значение суммы 5 и 3.

Докажите, что $5 + 0 = 5$.

Решение.

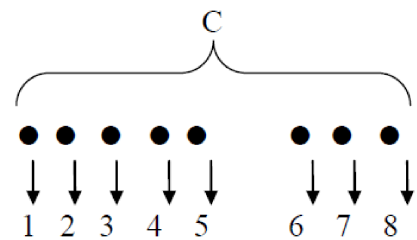
1. Воспользуемся определением суммы: $5 + 3 = m(A \cup B)$ (1), где $A \cap B = \emptyset$, $5 = m(A)$, $3 = m(B)$.

2. Изобразим $A \cup B$ (рис. 5), $C = A \cup B$.

3. Найдем число элементов $(A \cup B)$ счетом, $A \cup B \sim \mathbb{N}_b \Rightarrow m(A \cup B) = b(2)$.

4. Используя (1) и (2), получим $5 + 3 = 8$.

П р и м е ч а н и е. Обратите внимание на алгоритм решения: запись определения, построение модели, счет, вывод. Его можно использовать в дальнейшем и для нахождения значений разности, произведения, частного.



Пусть $5 = m(A)$, $0 = m(\emptyset)$.

По определению суммы, $5 + 0 = m(A \cup \emptyset)$, но $A \cup \emptyset = A$, значит, $5 + 0 = m(A)$, или $5 + 0 = 5$.

В школе дети учатся решать задачи на сложение двух типов:

- 1) на конкретный смысл сложения;
- 2) на увеличение на число (в прямой и косвенной форме).

Поставим перед собой такие цели:

- 1) научиться раскрывать теоретико-множественный смысл решения задачи, чтобы обосновать выбор действия, которым нужно решать задачу;
- 2) научиться строить модели к задаче и отвечать на вопрос задачи, не выполняя действия над числами.

На подготовительном этапе можно предложить такой алгоритм решения:

работа с условием, выбор множеств:

- построение модели к решению. Модель считается построенной, если обосновано построение искомого множества;
- ответ на вопрос задачи;
- обоснование выбора действия.
- математическая модель построения задачи.

Задание 3. Обосновать выбор действия и ответить на вопрос.

Задача 1. На первой полке 6 книг, на второй – 4 книги. Сколько книг на двух полках вместе?

1. Работа с условием. Выбор множеств.

A – множество книг на первой полке, $m(A) = 6$,

B – множество книг на второй полке, $m(B) = 4$,

C – множество книг на двух полках, $m(C) = ?$

2. Модель к задаче (рис. 6).

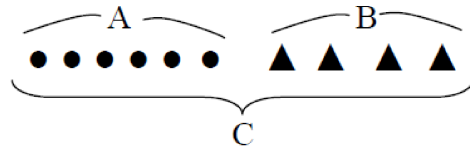


Рис. 6

Изобразим множество C, C – объединение множеств A и B, так как любая книга из множества C принадлежит множеству A или множеству B, $C = A \cup B$.

3. Нужно найти $m(C)$, где $C = A \cup B$ и $A \cap B = \emptyset$, значит, задачу нужно решать сложением.

4. Используя счет, найдем $m(C)$:

$C \sim N10 \Rightarrow m(C) = m(N10)$, $m(C) = 10$.

Ответ: на двух полках 10 книг.

В ы в о д: 1. Доказали, что задачу нужно решать сложением.

2. Ответили на вопрос задачи.

Примечание. Обосновать выбор действия можно иначе.

$C = A \cup B$ и $A \cap B = \emptyset$, тогда $m(C) = m(A \cup B)$ или $m(C) = m(A) + m(B)$, делаем замену и получаем $m(C) = 6 + 4$. Чтобы найти, сколько книг на двух полках, нужно сложить число книг на первой и второй полках.

Доказали, что задачу нужно решать сложением.

Задача 2. На первой полке 6 книг, на второй – на 3 книги больше. Сколько книг на второй полке?

1. Работа с условием. Выбор множеств.

A – множество книг на первой полке, $m(A) = 6$,

B – множество книг, $m(B) = 3$,

C – множество книг на второй полке, $m(C) = ?$

2. Изобразим множество C. По условию известно, что на второй полке на 3 книги больше, чем на первой. По определению отношения «больше на число» получаем, что на второй полке книг столько, сколько на первой ($C_1 \sim A$) да еще 3 книги (множество B).

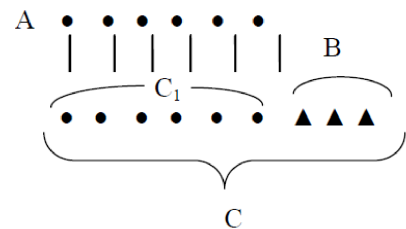


Рис. 7

Шаги построения модели (рис. 7):

1) A, $m(A) = 6$.

2) $C_1 \sim A$.

3) B, $m(B) = 3$.

4) C, $C = C_1 \cup B$.

3. Нужно найти $m(C)$, если $C = C_1 \cup B$, $C_1 \cap B = \emptyset$, значит, задачу решаем сложением.

4. $C \sim N9 \Rightarrow m(C) = m(N9)$, $\Rightarrow m(C) = 9$. На второй полке 9 книг.

Примечание. C равно объединению двух непересекающихся множеств, значит, $m(C) = m(C_1) + m(B)$. Сделаем замену: $m(C_1) = m(A) = 6$, так как $C_1 \sim A$ $m(C) = 6 + 3$. Чтобы узнать число книг на второй полке, нужно сложить число книг на первой полке и число, которое показывает, на сколько больше книг на второй полке.

Задача 3. На первой полке 5 книг, это на 4 книги меньше, чем на второй полке. Сколько книг на второй полке?

При построении модели рассуждаем так: на первой полке книг на 4 меньше, чем на второй, значит, на второй полке на 4 книги больше, чем на первой, то есть на второй книг столько, сколько на первой да еще 4 книги. Модель такая же, как к задаче 1.

Говорят, что в этих задачах действие задано в косвенной форме: есть слова «на 4 книги меньше», а задачу решают сложением.

Задача 4. С первой полки взяли 6 книг, а со второй – на 4 книги больше. Сколько книг взяли с двух полок вместе?

Задача составная, нужно сформулировать две простые и решить каждую (см. образцы выше).

Сумма $a + b$ не зависит от выбора непересекающихся множеств A и B , таких, что $n(A) = a$, $n(B) = b$. Это общее утверждение мы примем без доказательства.

Кроме того, **сумма целых неотрицательных чисел всегда существует и единственна.** Другими словами, какие бы два целых неотрицательных числа a и b мы ни взяли, всегда можно найти их сумму — целое неотрицательное число c , оно будет единственным для данных чисел a и b . Существование и единственность суммы вытекают из существования и единственности объединения двух множеств.

Действие, при помощи которого находят сумму, называют сложением, а числа, которые складывают, называют слагаемыми.

Выше нами было дано определение суммы двух слагаемых. А как определим сумму нескольких слагаемых?

Пусть сумма двух слагаемых определена и определена сумма n слагаемых. Тогда сумма, состоящая из $n + 1$ слагаемого, т. е. сумма $a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1}$ равна $(a_1 + a_2 + \dots + a_n) + a_{n+1}$.

Например, чтобы найти сумму $2+7+15+19$ согласно этому определению, надо выполнить следующие преобразования:

$$2 + 7 + 15 + 19 = (2 + 7 + 15) + 19 = ((2 + 7) + 15) + 19 = (9 + 15) + 19 = 24 + 19 = 43.$$

Законы сложения

Докажем сначала переместительный закон, т. е. докажем, что для любых целых неотрицательных чисел a и b выполняется равенство $a + b = b + a$.

Пусть a — число элементов в множестве A , b — число элементов в множестве B и $A \cap B = \emptyset$. Тогда по определению суммы целых неотрицательных чисел $a + b$ есть число элементов объединения множеств A и B : $a + b = n(A \cup B)$. Но множество $A \cup B$ равно множеству $B \cup A$ согласно переместительному свойству объединения множеств, и, значит, $n(A \cup B) = n(B \cup A)$. По определению суммы $n(B \cup A) = b + a$, поэтому $a + b = b + a$ для любых целых неотрицательных чисел a и b .

Докажем теперь сочетательный закон, т. е. докажем, что для любых целых неотрицательных чисел a, b, c выполняется равенство $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Пусть $a = n(A)$, $b = n(B)$, $c = n(C)$, причем $A \cap B = \emptyset$, $B \cap C = \emptyset$. Тогда по определению суммы двух чисел можно записать $(a + b) + c = n(A \cup B) + n(C) = n((A \cup B) \cup C)$

Так как объединение множеств подчиняется сочетательному закону, то $n((A \cup B) \cup C) = n(A \cup (B \cup C))$. Откуда по определению суммы двух чисел имеем $n(A \cup (B \cup C)) = n(A) + n(B \cup C) = a + (b + c)$. Следовательно, $(a + b) + c = a + (b + c)$ для любых целых неотрицательных чисел a, b и c .

Каково назначение сочетательного закона сложения? Он объясняет, как можно находить сумму трех слагаемых: для этого достаточно сложить первое слагаемое со вторым и к полученному числу прибавить третье слагаемое или прибавить первое слагаемое к сумме второго и третьего. Заметим, что сочетательный закон не предполагает перестановки слагаемых.

И переместительный и сочетательный законы сложения могут быть обобщены на любое число слагаемых. При этом переместительный закон будет означать, что сумма не изменяется при любой перестановке слагаемых, а сочетательный — что сумма не изменяется при любой группировке слагаемых (без изменения их порядка).

Из переместительного и сочетательного законов сложения вытекает, что сумма нескольких слагаемых не изменится, если их переставить любым способом и если любую их группу заключить в скобки.

Вычислим, используя законы сложения, значение выражения $109 + 36 + 191 + 64 + 27$.

На основании переместительного закона переставим слагаемые 36 и 191. Тогда $109 + 36 + 191 + 64 + 27 = 109 + 191 + 36 + 64 + 27$.

Воспользуемся сочетательным законом, сгруппировав слагаемые, а затем найдем суммы в скобках: $109 + 191 + 36 + 64 + 27 = (109 + 191) + (36 + 64) + 27 = 300 + 100 + 27$.

Применим еще раз сочетательный закон, заключив в скобки сумму чисел 300 и 100: $300 + 100 + 27 = (300 + 100) + 27$.

Произведем вычисления: $(300 + 100) + 27 = 400 + 27 = 427$.

С переместительным свойством сложения учащиеся начальных классов знакомятся при изучении чисел первого десятка. Сначала оно используется при составлении таблицы сложения однозначных чисел, а затем для рационализации различных вычислений.

Сочетательный закон сложения в начальном курсе математики в явном виде не изучается, но постоянно используется. Так, он является основой приема прибавления числа по частям: $3 + 2 = 3 + (1 + 1) = (3 + 1) + 1 = 4 + 1 = 5$. Кроме того, в тех случаях, **когда надо прибавить число к сумме, сумму к числу, сумму к сумме, сочетательный закон используется в сочетании с переместительным**. Например, прибавлять сумму $2 + 1$ к числу 4 предлагается следующими способами:

- 1) $4 + (2 + 1) = 4 + 3 = 7$;
- 2) $4 + (2 + 1) = 6 + 1 = 7$;
- 3) $4 + (2 + 1) = 5 + 2 = 7$.

Проанализируем эти способы. В случае 1 вычисления выполнены в соответствии с указанным порядком действий. В случае 2 применено сочетательное свойство сложения. Вычисления же в последнем случае опираются на переместительный и сочетательный законы сложения, причем промежуточные преобразования опущены. Они таковы. Сначала на основании переместительного закона переставили местами слагаемые 1 и 2: $4 + (2 + 1) = 4 + (1 + 2)$. Затем воспользовались сочетательным законом: $4 + (1 + 2) = (4 + 1) + 2$. И, наконец, произвели вычисления согласно порядку действий $(4 + 1) + 2 = 5 + 2 = 7$.

Вычитание

Из теории множеств известно, что **разность множеств А и В, если В – подмножество А, называется дополнением множества В до множества А.**

Мы можем изобразить дополнение одного множества до другого, число элементов дополнения можно найти счетом. Кроме того, в теории множеств доказано, что число элементов дополнения множества В до множества А равно разности числа элементов множества А и множества В.

К р а т к а я з а п и с ь : $m(BA) = m(A) - m(B)$ (1), если $B \subset A$.

Пусть $a = m(A)$, $b = m(B)$, где $a, b \in \mathbb{N}_0$.

Сделав замену в равенстве (1), получим предложение $a - b = m(BA)$, из которого можно сформулировать определение разности чисел а и b.

Определение 8. *Разностью целых неотрицательных чисел а и b называется число элементов дополнения множества В до множества А, если $a = m(A)$, $b = m(B)$ и $B \subset A$.*

К р а т к а я з а п и с ь : $a - b = m(BA)$, где $m(A) = a$, $m(B) = b$, $B \subset A$.

З а д а н и е 4. Найдите значение разности: а) 8 и 5, б) 5 и 0.

Докажите, что $7 - 5 = 2$.

При этом:

- а) см. задачу на нахождение суммы чисел (с. 9);
- б) используйте $A \setminus \emptyset = A$, $m(A \setminus \emptyset) = m(A)$, $A \setminus \emptyset = \emptyset$.

Решение.

1) По определению разности $7 - 5 = m(BA)$ (1), где $7 = m(A)$, $5 = m(B)$ и $B \subset A$. Известно, что разность равна 2. Значит, нужно доказать, что $m(BA) = 2$.

2) Изобразим множества А и В (рис. 8), где $B \subset A$.

Элементы из множества А, не вошедшие в множество В, образуют третье множество – дополнение множества В до А, т.е. BA . Используя счет предметов, получим $BA \sim \mathbb{N}_2$, т.е. $m(BA) = 2$ (2).

Из (1) и (2) следует, что $7 - 5 = 2$ – верное равенство.

Из определения разности чисел а и b мы видим связь вычитания чисел с разностью множеств, из которых второе будет подмножеством первого, т.е. с дополнением второго множества до первого.

Справедливо и обратное. **Связь дополнения множеств со сложением чисел раскроем при решении текстовых задач.**

В школе дети учатся решать задачи на вычитание четырех типов:

- на нахождение остатка;
- на нахождение неизвестного слагаемого по сумме и известному слагаемому;
- на разностное сравнение;
- на уменьшение на число (в прямой и косвенной форме).

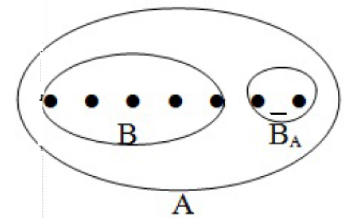


Рис. 8

Задание 5. Обосновать выбор действия и ответить на вопрос.

Задача 1. Катя сорвала 12 ромашек, три ромашки она отдала Маше. Сколько ромашек осталось у Кати?

1. Работа с условием.

Пусть A – множество ромашек, которые сорвала Катя, $m(A)$
= 12;

B – множество ромашек, которые Катя отдала, $m(B) = 3$;

C – множество ромашек, которые остались у Кати, $m(C) = ?$

2. Изобразим множество C (построим модель к задаче) на
рис. 9.

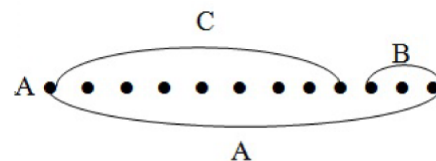


Рис. 9

Для этого можно изобразить:

1) A , $m(A) = 12$ (элементы A – точки);

2) B , $m(B) = 3$ и $B \subset A$;

3) элементы из A , которые не принадлежат множеству B , образуют множество C . По определению, $C = A \setminus B$ и так как $B \subset A$, то $C = BA$.

3. Нужно найти $m(C)$, где множество C равно дополнению множества B до множества A , значит, задачу нужно решать вычитанием. Обоснование можно провести иначе.

Для нахождения $m(C)$, используем теорему о числе элементов дополнения к подмножеству, получим $m(C) = m(A) - m(B)$, сделаем замену $m(C) = 12 - 3$. В этом случае мы не только доказали, что задачу решаем вычитанием, но и составили выражение, значение которого нужно найти.

4. Чтобы ответить на вопрос задачи, найдем $m(C)$ счетом. Получим $C \sim N_9 \Rightarrow m(C) = m(N_9)$, $m(C) = 9$, т.е. у Кати осталось 9 ромашек.

Вывод. 1. Доказали, что задачу нужно решать вычитанием.

2. Ответили на вопрос задачи.

Задача 2. В букете 12 ромашек и васильков. Сколько ромашек в букете, если в нем 7 васильков?

1. Работа с условием.

Пусть A – множество цветков в букете, $m(A) = 12$;

B – множество васильков в букете, $m(B) = 7$;

C – множество ромашек в букете, $m(C) = ?$

2. Модель к задаче (рис. 10).

Можно изобразить:

1) A , $m(A) = 12$;

2) B , $m(B) = 7$, $B \subset A$;

3) Существует C , $C = A \setminus B$, и так как $B \subset A$, то $C = B - A$.

3. См. объяснение в задаче 1 и дополнить решение,

4. См. объяснение в задаче 2 и дополнить решение.

Задача 3. В букете 10 ромашек и 6 васильков. На сколько васильков меньше, чем ромашек?

1. Работа с условием.

Пусть A – множество ромашек, $m(A) = 10$,

B – множество васильков, $m(B) = 6$,

C – множество цветов, где $m(C)$ показывает, насколько число васильков меньше числа ромашек. Найти $m(C)$.

2. Изобразим множество C (построим модель к задаче) на рис. 11.

Изобразим:

1) A , $m(A) = 10$;

2) B , $m(B) = 6$.

Число ромашек больше числа васильков на какое-то число x . По определению «больше на число x », ромашек столько, сколько васильков да еще x штук. Поэтому множество A будет разбито на два подмножества D и C , где $D \sim B$ и $m(C) = x$.

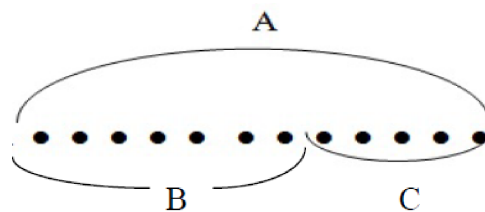


Рис. 10

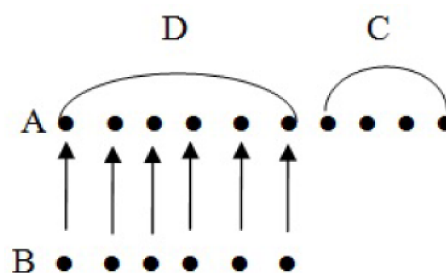


Рис. 11

3. Нужно найти $m(C)$, $C = A \setminus D$ и $D \subset A$, значит, $C = DA$. Задачу нужно решать вычитанием, а именно, т.к. $m(C) = m(DA)$ и $m(DA) = m(A) - m(D)$ и $m(D) = m(B)$, тогда получаем, что $m(C) = 10 - 6$.

4. Чтобы ответить на вопрос задачи, найдем $m(C)$. $C \sim (N_4)$, $m(C) = 4$. Васильков на 4 меньше, чем ромашек.

Задача 4. В букете 12 ромашек, а васильков на 5 меньше, чем ромашек. Сколько васильков в букете?

1. Работа с условием.

Пусть A – множество ромашек, $m(A) = 12$,

B – множество васильков, $m(B) = ?$

C – множество цветков, $m(C) = 5$.

5 – показывает, на сколько число васильков меньше числа ромашек.

2. Изобразим множество B . По условию число васильков на 5 меньше, чем число ромашек, или число ромашек на 5 больше, чем число васильков. Воспользуемся определением отношения «больше на число 5», получаем, что множество ромашек (множество с большим числом элементов) можно разбить на два непересекающихся подмножества D и C , таких, что D равномощно множеству васильков, а число элементов второго C равно 5. Это означает, что ромашек столько, сколько васильков, да еще 5 (рис. 12).

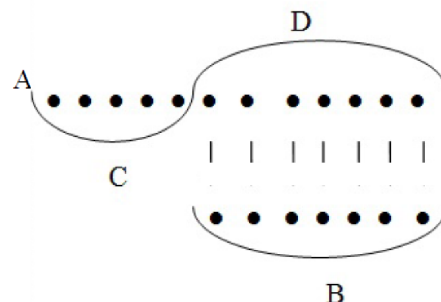


Рис. 12

Шаги построения:

1) A , $m(A) = 12$;

2) C , $m(C) = 5$, $C \subset A$;

3) существует D , $D \subset A$ и $D = CA$;

4) $B \sim D$.

3. Нужно найти $m(B)$, т.к. $B \sim D$, то $m(B) = m(D)$ (1), $D = CA$, значит, $m(D) = m(CA)$, $m(D) = m(A) - m(C)$, т.е. $m(D) = 12 - 5$ (2)

Из (1) и (2) $m(B) = 12 - 5$.

Доказали, что число васильков нужно находить вычитанием.

4. $B \sim N_7 \Rightarrow m(B) = 7$. Число васильков равно 7.

Рассмотрите еще один способ решения этой задачи. Сравните и выберите наиболее простой с вашей точки зрения.

Начнем со второго шага (построение модели). По условию число васильков на 5 меньше, чем число ромашек. Воспользуемся определением отношения «меньше на число», получаем, что васильков столько, сколько ромашек (множество D), но без 5 цветков (множество C). Из этого следует такое построение (рис. 13):

1) A , $m(A) = 12$;

2) $D \sim A$;

3) C , $m(C) = 5$, $C \subset D$;

4) существует B , $B \subset D$ элементы которого васильки.

Найдем $m(B)$. $B \sim N_7 \Rightarrow m(B) = 7$.

Число васильков равно 7. Можно найти иначе. $B = D \setminus C$, т.к. $C \subset D$, тогда $B = CD$, задачу будем решать вычитанием, а именно $m(B) = m(D) - m(C) = 12 - 5$, т.к. $D \sim A$, то $m(D) = m(A)$.

Наиболее трудными будут задачи, в которых действие задано в косвенной форме.

Задача 5. В букете 12 ромашек, их на 5 больше, чем васильков. Сколько васильков в букете?

Сформулируйте условие иначе. По условию число ромашек на 5 больше, чем число васильков, поэтому васильков на 5 меньше, чем ромашек. Задачу с несколько измененным условием мы решаем, как предыдущую.

Отношения «равно» и «меньше»

Вясним, на какой теоретической основе происходит сравнение чисел.

Пусть даны два целых неотрицательных числа a и b . С теоретико-множественной точки зрения они представляют собой число элементов конечных множеств A и B : $a = n(A)$, $b = n(B)$. Если эти множества равномощны, то им соответствует одно и то же число, т. е. $a=b$. Приходим к определению:

Числа a и b равны, если они определяются равномощными множествами:

$$a = b \Leftrightarrow A \sim B, \text{ где } n(A) = a, n(B) = b$$

Если множества A и B неравномощны, то числа, определяемые ими, различны.

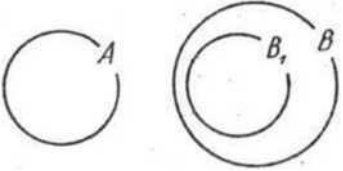
В том случае, если множество A равномощно собственному подмножеству множества B и $n(A) = a$, $n(B) = b$, говорят, что число a меньше числа b , и пишут: $a < b$. В этой же ситуации говорят, что b больше a , и пишут: $b > a$,

$$a < b \Leftrightarrow A \sim B_1, \text{ где } B_1 \subset B \text{ и } B_1 \neq B, B_1 \neq \emptyset$$

Из приведенных определений отношений «равно» и «меньше» исходят в начальной школе когда объясняют, что $2 = 2$, $3 = 3$, $2 < 3$, $3 < 4$ и т. д. Например, при введении записи $3 = 3$ рассматривают два равномощных множества квадратов и кругов (рис. 91). **При изучении отношения $3 < 4$ проводятся рассуждения:** возьмем три розовых кружка и 4 синих и каждый розовый наложим на синий, видим, что синий кружок остался незакрытым, значит, розовых кружков меньше, чем синих, поэтому можно записать: $3 < 4$.

Отметим еще, что если числа a и b определяются соответственно множествами A и B (кружков, квадратов, палочек и т. д.) и $a < b$, то выделение в множестве B собственного подмножества, равномощного множеству A , на практике происходит самыми различными способами: наложением, приложением, путем образования пар и т. д. Это возможно, так как отношение $a < b$ (так же как и отношение $a = b$) не зависит от выбора множеств A и B , таких, что $n(A) = a$, $n(B) = b$, важно только, чтобы A было равномощно собственному подмножеству множества B (а в случае равенства чисел A равномощно B).

Изложенный подход к определению отношения «меньше» имеет ограниченное применение, он может быть использован для сравнения чисел в пределах 20, поскольку связан с непосредственным сравнением двух групп предметов.



Как же можно еще сравнивать целые неотрицательные числа? Пусть $a < b$ в смысле данного выше определения.

Тогда $a = n(A)$, $b = n(B)$ и $A \sim B_1$, где B_1 — собственное подмножество множества B (рис. 92). Так как $B_1 \subset B$, то B можно представить в виде объединения множества B_1 и его дополнения $B \setminus B_1$. Обозначим это

дополнение B_1' (т. е. $B \setminus B_1 = B_1'$). Тогда $B = B_1 \cup B_1'$ и, следовательно, $n(B) = n(B_1 \cup B_1')$. Поскольку множества B_1 и B_1' не пересекаются, то по определению $A \sim B$ суммы $n(B) = n(B_1) + n(B_1')$ (*). Но по условию $B_1 \sim A$, значит, $n(B_1) = n(A)$. Если число элементов в множестве B_1 обозначить через c , то равенство (*) можно записать в виде $b = a + c$, т. е. из того, что $a < b$, следует, что $b = a + c$. Нетрудно убедиться и в справедливости обратного утверждения.

Пришли к другому определению отношения «меньше»:

Число a меньше числа b тогда и только тогда, когда существует такое натуральное число c , что $a + c = b$.

Как, пользуясь этим определением, объяснить, что $3 < 7$? $3 < 7$, поскольку существует такое целое неотрицательное число 4, что $3 + 4 = 7$.

Этот способ определения отношения «меньше» через сложение также используется в начальном курсе математики. Об этом говорит наличие пар записей $5 + 1 = 6$, $6 > 5$; $7 + 1 = 8$, $7 < 8$.

Рассмотрим еще один способ сравнения чисел.

Пусть $a < b$. Тогда про любое натуральное число x можно сказать, что если $x < a$, то $x < b$. Это значит, что при $a < b$ отрезок натурального ряда N_a является собственным подмножеством отрезка N_b . Справедливо и обратное утверждение.

Таким образом, получаем еще одно определение отношения «меньше»:

Число a меньше числа b тогда и только тогда, когда отрезок натурального ряда N_a является собственным подмножеством отрезка этого ряда N_b .

$$a < b \Leftrightarrow N_a \subset N_b \text{ и } N_a \neq N_b.$$

Например, справедливость неравенства $3 < 7$ с этих позиций можно объяснить тем, что $\{1, 2, 3\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Данная трактовка понятия «меньше» позволяет сравнивать числа, опираясь на знание их места в натуральном ряду.

Этот способ сравнения чисел также используется в начальном обучении математике: **число, которое при счете встречается раньше, всегда меньше числа, которое идет позднее.**

Отношение «равно», «меньше», «меньше на число»

Возьмем множества A и B , пусть $a = m(A)$, $b = m(B)$, где $a, b \in N_0$.

Если $A \sim B$, то эти множества принадлежат одному классу эквивалентности, поэтому им соответствует одно и то же натуральное число, т.е. $a = b$.

Справедливо и обратное. Если $a = b$, то эти натуральные числа определяют один и тот же класс конечных равномощных множеств, значит, множества A и B равномощны. Из сказанного можно получить определение равных натуральных чисел.

Определение 3. Два целых неотрицательных числа a и b равны тогда и только тогда, когда равномощны множества, число элементов которых числа a и b .

К р а т к а я з а п и с ь : $a = b \Leftrightarrow A \sim B$, где $a = m(A)$, $b = m(B)$.

Отношение «равно» на множестве целых неотрицательных чисел – рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Если множества A и B не равномощны, тогда одно из множеств будет равномощно подмножеству другого множества, т.е. или $A \sim B_1 \subset B$, или $B \sim A_1 \subset A$.

Пусть $A \sim B_1 \subset B$ (рис. 1). Видим, что в множестве B элементов столько, сколько в множестве A , да еще несколько, так как $a = m(A)$, $b = m(B)$, то говорят, что $a < b$. Справедливо и обратное.

Если $a < b$, то $A \sim B_1 \subset B$, где $a = m(A)$, $b = m(B)$.

Определение 4. Натуральное число a меньше натурального числа b тогда и только тогда, когда множество, число элементов которого равно a , равномощно собственному подмножеству другого множества, число элементов которого равно b .

К р а т к а я з а п и с ь : $a < b \Leftrightarrow A \sim B_1 \subset B$, где $a = m(A)$, $b = m(B)$.

Если $B \sim A_1 \subset A$, тогда получим, что $b < a$, где $b = m(B)$, $a = m(A)$.

Вывод. Если два множества неравномощны, то число элементов первого множества меньше числа элементов второго, или число элементов второго множества меньше числа элементов первого.

$A \sim B_1 \subset B$ можно прочитать еще так: в множестве B столько элементов, сколько в множестве A , да еще несколько (например, c). Тогда можно сказать, что число a меньше b на число c .

Определение 5. Число a меньше b на число c , тогда и только тогда, когда в множестве B элементов столько, сколько в множестве A , да еще c элементов, если $a = m(A)$, $b = m(B)$.

Можно еще отметить, что в этом случае множество B разбито на два подмножества, в одном элементов столько, сколько в множестве A , а в другом c элементов.

Можно дать еще одно такое определение: «меньше на число c ».

Определение 6. Число a меньше числа b на число c тогда и только тогда, когда множество B можно разбить на два непересекающихся подмножества, где число элементов одного равно числу a , а число элементов другого подмножества равно c .

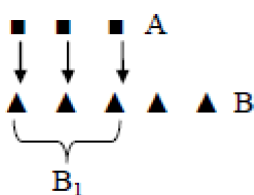


Рис. 2

Очевидно, если число a меньше b на число c , тогда число b больше a на число c . Справедливо и обратное.

П р и м е ч а н и е. Отношение «меньше» антирефлексивное, антисимметричное и транзитивное.

З а д а н и е 1. Доказать: 1) $3 < 5$, 2) $0 < 5$, 3) $6 = 6$, 4) 5 меньше 9 на 4, 5) 6 больше 4 на 2.

1. Пусть $3 = m(A)$, A – множество квадратов. $5 = m(B)$, B – множество треугольников. Можно поставить в соответствие каждому квадрату треугольник (рис.2), тогда в

множестве B выделяется подмножество B_1 , равномощное множеству A , получили $A \sim B_1 \subset B$, тогда, по определению 4, $3 < 5$.

2. Пусть $0 = m(\emptyset)$, $5 = m(A)$, где A – множество любых элементов. Из теории множеств известно, что все пустые множества равномощные и пустые множества являются подмножеством любого множества, т.е.

$$\emptyset \sim \emptyset \subset A \Rightarrow m(\emptyset) < m(A) \text{ или } 0 < 5.$$

3. Пусть $6 = m(A)$ и A – множество треугольников, $6 = m(B)$ и B – множество кругов (рис. 3).



Рис. 3

Можно поставить в соответствие каждому квадрату только один круг и каждому кругу можно поставить в соответствие только один треугольник. Получим $A \sim B$, т.е. $m(A) = m(B)$ или $6 = 6$ (по определению 3).

4. Пусть $5 = m(A)$, где A – множество точек, $9 = m(B)$, где B – множество кругов.

Изобразим A и B . Очевидно, что можно в множестве B выделить подмножество B_1 равномощное множеству A , $B_1 \sim A$ (рис. 4).

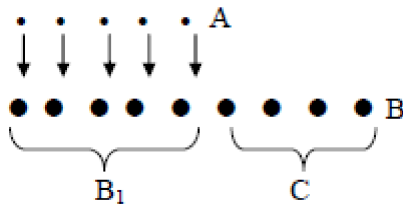


Рис. 4

Множество B содержит столько элементов, сколько множество A , да еще несколько элементов, которые образуют множество C . Используем счет для нахождения числа элементов множества C . $C \sim N_4$, значит, $m(C) = 4$. По определению 5 получаем, что 5 меньше 9 на 4.

5. Пусть $6 = m(A)$, $4 = m(B)$. Нужно доказать, что 6 больше 4 на 2 или 4 меньше 6 на 2 (см. решение 4).