

УТВЕРЖДАЮ

Начальник управления образования
Могилевского облисполкома

В.В.Рыжков

«___» ноября 2017 г.

ЗАДАНИЯ

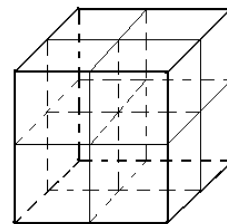
для проведения второго этапа республиканской олимпиады
по учебному предмету «Математика»

Дата проведения: 2 декабря 2017 г.

Время выполнения заданий: 10.00 – 14.30

Х класс

1. Имеется куб с ребром 5, разбитый на 125 единичных кубиков. (На рисунке приведено аналогичное разбиение куба с ребром 2). Любые два единичных кубика, имеющие общую грань, разделены перегородкой. Назовем эти перегородки *внутренними*. На гранях единичных кубиков, которые не являются общими для двух различных кубиков, также стоят перегородки. Назовем их *внешними*. Таким образом, каждый единичный кубик является огражденным со стороны всех шести граней. Внутри некоторого единичного кубика находится бабочка. Какое минимальное количество внутренних перегородок необходимо удалить, чтобы бабочка из любого начального положения могла попасть в каждый из остальных единичных кубиков?



2. Найдите функцию $f(x)$, определенную на всей числовой прямой, такую, что для любого действительного x выполнено равенство $2f(x) - f(2017 - x) = 2x$.

3. На сторонах AB , BC и AC треугольника ABC отмечены соответственно точки M , N и K так, что $AM:MB=BN:NC=CK:KA=2:1$. Отрезки AN и BK пересекаются в точке P , AN и CM пересекаются в точке R , BK и CM пересекаются в точке Q . Найдите площадь треугольника PQR , если площадь треугольника ABC равна S .

4. Имеется 83 монеты. Требуется разложить эти монеты по клеткам квадратной доски $n \times n$ так, чтобы количества монет в любых двух соседних по стороне клетках отличались ровно на 1 (в клетках может быть по несколько монет или не быть их вообще). При каком максимальном n это возможно?

5. Вершины равнобедренной трапеции $ABCD$ лежат на параболе $y = x^2$. При этом основания AD и BC параллельны оси OX . Докажите, что если высота трапеции равна 1, то центр окружности, описанной около трапеции, лежит на большем основании.

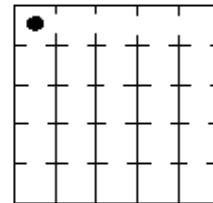
Математика
X класс. Решения.

Решения учащихся могут отличаться от авторских!

1. **Решение.**

Для того, чтобы бабочка из любого первоначального кубика могла попасть в некоторый другой, ей необходимо преодолеть хотя бы одну перегородку. Значит, чтобы облететь все остальные 124 кубика, бабочке необходимо преодолеть не менее 124 перегородок.

Покажем, как можно удалить 124 перегородки, чтобы бабочка могла из произвольного кубика попасть в любой другой. На рисунке приведен вид исходного кубика сверху. В верхнем слое единичных кубиков удалены 24 вертикальные перегородки. С остальными 4 слоями поступаем аналогично. Также удалим 4 внутренние горизонтальные перегородки, расположенные под жирной точкой. Всего будут удалены 124 перегородки. Тогда бабочка, находясь в произвольном кубике, может облететь все кубики данного слоя («этажа»), а между «этажами» она может перемещаться по «лифту», отмеченному черной точкой.



Ответ: 124 перегородки.

2. **Решение.**

Подставим в равенство $2f(x) - f(2017 - x) = 2x$ (1) вместо x выражение $2017 - x$, получим:

$$2f(2017 - x) - f(2017 - (2017 - x)) = 2(2017 - x) \quad \text{или} \quad 2f(2017 - x) - f(x) = 4034 - 2x \quad (2).$$

Умножим обе части равенства (1) на 2 и полученное равенство сложим с (2):

$$4f(x) - 2(2017 - x) + 2f(2017 - x) - f(x) = 4x + 4034 - 2x.$$

$$\text{Откуда} \quad 3f(x) = 2x + 4034, \quad f(x) = \frac{2x + 4034}{3} = \frac{2}{3}(x + 2017).$$

Проверка показывает, что данная функцию удовлетворяет условию задачи.

$$\text{Ответ:} \quad f(x) = \frac{2}{3}(x + 2017).$$

3. **Решение.**

$$S_{\triangle ABK} = S_{\triangle ANC} = S_{\triangle BMC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC}.$$

$$S_{\triangle PQR} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle ABP} - S_{\triangle BCQ} - S_{\triangle ACR} \quad (1)$$

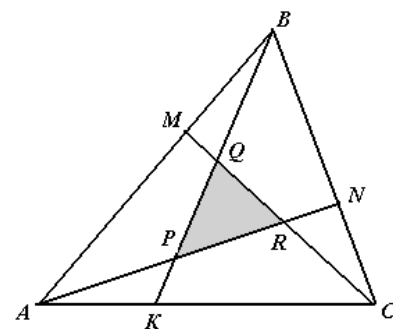
$$\frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle ABK}} = \frac{BP}{BK}, \quad \frac{S_{\triangle BCQ}}{S_{\triangle BCM}} = \frac{CQ}{CM}, \quad \frac{S_{\triangle ACR}}{S_{\triangle ACN}} = \frac{AR}{AN} \quad (2)$$

Чтобы найти, например, $BP:BK$, применим теорему Менелая

$$\text{к треугольнику KBC и прямой AN:} \quad \frac{KP}{PB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CA}{AK} = 1.$$

$$\text{Имеем:} \quad \frac{KP}{PB} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{1} = 1, \quad \text{откуда} \quad \frac{KP}{PB} = \frac{1}{6}. \quad \text{Тогда} \quad \frac{BP}{BK} = \frac{6}{7}.$$

$$\text{Далее, из (2) следует, что} \quad \frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle ABK}} = \frac{BP}{BK} = \frac{6}{7} \quad \text{и} \quad S_{\triangle ABP} = \frac{6}{7} \cdot S_{\triangle ABK} = \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} = \frac{2}{7} S_{\triangle ABC}.$$



Аналогично, получаем, что $S_{\Delta CBQ} = \frac{2}{7} \cdot S_{\Delta ABC}$ и $S_{\Delta ARC} = \frac{2}{7} \cdot S_{\Delta ABC}$.

Итак, из (1) получаем $S_{\Delta PQR} = S_{\Delta ABC} - 3 \cdot \frac{2}{7} S_{\Delta ABC} = \frac{1}{7} S_{\Delta ABC} = \frac{1}{7} S$.

Ответ: $\frac{1}{7} S$.

4. Решение.

Раскрасим клетки доски в шахматном порядке. Из условия задачи следует, что количества монет в клетках одного цвета имеют одинаковую четность, а количества монет в клетках разного цвета имеют различную четность.

Если n четно, т.е. $n = 2k$, $k \in N$, то общее число клеток на доске равно $n^2 = 4k^2$. Соответственно клеток черного и белого цвета будет по $2k^2$ – четные количества. Отсюда следует, что общее количество монет на доске будет четно, а оно равно 83 – противоречие. Следовательно, n – нечетно.

Раскрасим при нечетном n клетки доски в шахматном порядке так, чтобы угловые клетки были черными. (В этом случае число черных клеток на доске на единицу превышает число белых).

Пусть в каждой черной клетке находится нечетное число монет, тогда максимально возможное число черных клеток равно 83 и соответственно общее число клеток на доске не превышает $83+82=165$.

Пусть в каждой белой клетке находится нечетное число монет, тогда максимально возможное число белых клеток равно 83 и соответственно общее число клеток на доске не превышает $83+84=167$.

В любом случае имеем $n^2 \leq 167$. С учетом того, что n – нечетное имеем $n \leq 11$.

Покажем, что на доске 11×11 можно разместить 83 монеты в соответствии с требованием задачи. В каждую черную клетку (их 61) положим по одной монете. Затем в произвольные 11 белых клеток положим по две монеты. Всего монет на доске будет $61+2 \cdot 11=83$.

Ответ: 11×11 .

5. Доказательство

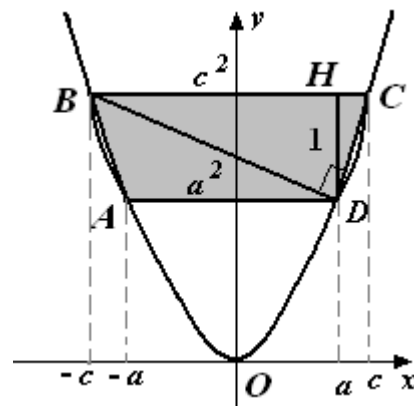
Пусть AD – меньшее основание трапеции. Заметим, что окружность, описанная около трапеции $ABCD$, также является описанной около треугольника BCD . Если центр K этой окружности лежит на большем основании BC , то $KB=KC=R$, и значит BC является диаметром этой окружности. Тогда $\angle BDC = 90^\circ$ как опирающийся на диаметр.

И наоборот, если мы докажем, что $\angle BDC = 90^\circ$, то это будет означать, что BC – диаметр окружности, описанной около треугольника BCD (а значит и около трапеции $ABCD$).

Пусть вершины трапеции $ABCD$ имеют следующие координаты:

$A(-a; a^2)$, $B(-c; c^2)$, $C(c; c^2)$, $D(a; a^2)$, где $a > 0$, $c > 0$. Если H основание высоты, опущенной из точки D на сторону BC , то $H(a; c^2)$.

Имеем: $AD = 2a$, $BC = 2c$, $CH = c - a$, $BH = a - (-c) = a + c$, $DH = c^2 - a^2 = 1$.



Тогда $BC^2 = 4c^2$, $CD^2 = CH^2 + DH^2 = (c - a)^2 + 1$.

$$BD^2 = BH^2 + DH^2 = (c + a)^2 + 1.$$

Далее, имеем: $CD^2 + BD^2 - BC^2 = (c - a)^2 + 1 + (c + a)^2 + 1 - 4c^2 =$
 $= c^2 - 2ac + a^2 + a^2 + 2ac + c^2 + 2 - 4c^2 = 2a^2 - 2c^2 + 2 =$
 $= -2(c^2 - a^2) + 2 = -2 \cdot 1 + 2 = 0$

Отсюда следует, что $CD^2 + BD^2 = BC^2$, а значит $\angle C = 90^\circ$. Отсюда следует требование задачи.

Что и требовалось доказать.