

## BANQUE D'EPREUVES ECRIN 1995

SERIE P

### COMPOSITION DE PHYSIQUE I

Lundi 29 mai 1995 de 8 h à 12 h

On tiendra compte dans la note de l'orthographe et de la présentation (jusqu'à - 10 %) ainsi que de la correction du style et de la richesse de la langue.

"L'usage de la calculatrice est autorisé".

Le sujet comporte deux problèmes indépendants notés respectivement sur 60 points pour le premier et sur 40 points pour le second. A l'intérieur de chaque problème, les deux parties sont largement, compte tenu des résultats intermédiaires donnés dans l'énoncé.

#### PROBLEME 1- OPTIQUE ACTIVE. METHODE INTERFEROMETRIQUE

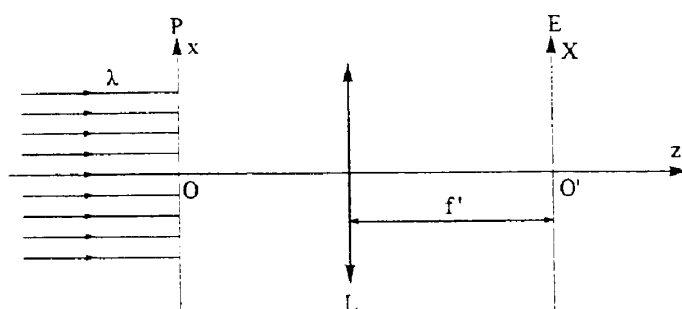
Le problème est consacré à l'étude d'une méthode utilisée pour le traitement et l'amélioration en temps réel d'images astronomiques. Il s'agit d'éliminer en partie les défauts de l'image dus à la turbulence atmosphérique, celle-ci se traduisant essentiellement par des perturbations de phase des ondes issues de l'objet étudié, les perturbations d'amplitude étant négligeables.

On doit donc mesurer précisément ces défauts de phase pour les corriger en temps réel par une déformation du miroir du télescope commandée au moyen d'éléments piézo-électriques.

Le problème s'intéresse ici simplement au principe utilisé pour la détection des défauts de phase.

A toute grandeur sinusoïdale de la forme  $a = a_0 \cos(\omega t + \phi)$  on associe l'amplitude complexe  $A = a_0 e^{j\phi}$  ( $j^2 = -1$ ).

#### PARTIE I



On considère le montage de la figure 1 :

figure 1

Dans le plan P on place successivement différents objets diffractants éclairés par une onde plane monochromatique se propageant suivant l'axe optique Oz et de longueur d'onde  $\lambda$ . La lentille L est une lentille mince convergente de distance focale  $f'$ . On observe sur un écran E situé dans le plan focal image de la lentille L.

1. L'objet diffractant est une fente F rectangulaire de centre O et de largeur b suivant Ox, de grande dimension suivant l'axe perpendiculaire Oy.

a) Rappeler le principe d'Huyghens-Fresnel permettant de calculer l'amplitude diffractée par cette fente.

b) Que signifie "grande dimension" suivant Oy ?

c) On considère un point M de l'écran de coordonnées (X, 0) dans le plan O'XY. Exprimer, à une constante multiplicative près, l'amplitude A(X) de l'onde issue de la fente et reçue en M.

d) En déduire l'expression de l'éclairement correspondant E(X) en notant  $E_0$  l'éclairement maximum. Représenter l'allure de cette courbe en dégageant ses caractéristiques essentielles.

e) Représenter la figure observée sur l'écran (plan O'XY).

f) Donner le déphasage entre A(X) et la vibration produite en M par la lumière qui est passée par le centre O de la fente.

On conservera pour la suite la lumière qui passerait par O comme origine des phases.

2) On considère à présent que la fente F est centrée en  $x = x_0$ .

a) Déterminer simplement la nouvelle expression de l'amplitude A(X) au point M(X, 0) de l'écran.

b) Quels changements observe-t-on sur l'écran ?

3) On considère à présent que l'objet diffractant est constitué de deux fentes identiques aux précédentes et centrées respectivement en  $x = 0$  et  $x = 2b$ .

a) Quelle est alors l'expression de l'amplitude  $A_1(X)$  au point M(X, 0) de l'écran ?

b) En déduire l'éclairement  $E_1(X)$  et donner l'allure de la courbe associée.

c) Interpréter simplement le résultat obtenu : on fera apparaître  $A_1$  comme le produit de la fonction A par une fonction que l'on reconnaîtra et dont on donnera l'interprétation physique.

4) On considère à présent que l'objet diffractant est un réseau infini de fentes identiques aux précédentes et centrées aux points d'abscisse  $2pb$  où p est entier positif ou négatif. Le réseau est donc de période  $2b$ .

a) Avec des fentes infiniment fines, en quels points de l'écran observerait-on un éclairement non nul ?

b) En utilisant le résultat de la question 3.c, en déduire l'allure de la figure obtenue sur l'écran en tenant compte de la largeur b de chaque fente.

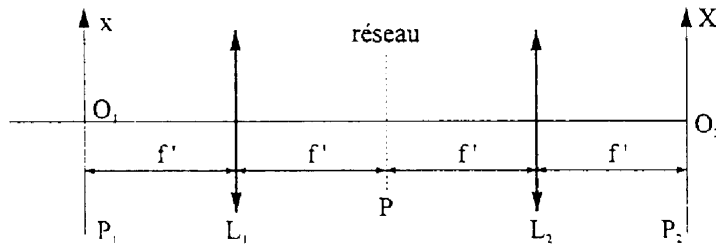
c) Montrer que si l'on ne conserve que les franges infiniment fines les plus brillantes, il ne reste que trois franges dont on précisera les positions et les amplitudes relatives.

5) On considère à présent que le réseau est translaté dans la direction Ox d'une quantité vt (chaque fente de largeur b étant alors centrée en  $2pb + vt$ ). En utilisant les résultats de l'ensemble des questions précédentes, montrer qu'on observe trois franges en  $X = 0$ , et en  $X = \pm(\lambda f'/2b)$ , d'éclairements relatifs

$1, 4/\pi^2$  et  $4/\pi^2$  et dont les amplitudes respectives sont déphasées de 0, et  $\pm \phi(t)$ , avec  $\phi(t) = (\pi vt/b)$ .

**PARTIE 2 - DETECTION DES DEFAUTS DE PHASE**

On considère à présent le dispositif de la figure 2.



$L_1$  et  $L_2$  sont deux lentilles minces convergentes identiques de distance focale  $f'$ . Le plan focal image de  $L_1$  coïncide avec le plan focal objet de  $L_2$ . L'écran est dans le plan focal image  $P_2$  de  $L_2$ , et les objets étudiés dans cette partie sont dans le plan focal objet  $P_1$  de  $L_1$ .

1) Montrer que  $P_1$  et  $P_2$  sont conjugués à travers le système des deux lentilles. Quel est le grandissement correspondant ?

2) On place un point source en  $O_1$ .

a) En l'absence de réseau, quelle serait son image à travers  $L_1$  et  $L_2$  ?

b) Si on place dans le plan P le réseau étudié dans la partie précédente en 4), montrer qu'on observe alors trois points images de la source.

c) Si le réseau est en translation parallèlement à  $Ox$  à la vitesse  $\vec{v} = v\vec{u}_x$  constante, montrer que les amplitudes complexes de ces trois images sont déphasées.

3) Le résultat se généralise de la façon suivante :

a) Si  $W(x,y)$  est la répartition d'amplitude complexe associée à une onde dans le plan  $P_1$ , quelle est l'amplitude complexe dans le plan  $P_2$  en l'absence de réseau,  $W_i(X,Y)$  ?

b) En présence du réseau en translation, on obtient alors trois images décalées et déphasées au lieu d'une soit :

$$W_n(X,Y,t) = W_i(X,Y) + (2/\pi)W_i(X - (\lambda f'/2b), Y)\exp(-j\pi vt/b) + (2/\pi)W_i(X + (\lambda f'/2b), Y)\exp(+j\pi vt/b).$$

Ce résultat est-il en accord avec l'ensemble des résultats précédents ?

4) Le signal issu d'une étoile ponctuelle en l'absence de turbulence atmosphérique se formerait au foyer du télescope. Le plan focal image du télescope coïncide avec le plan focal objet d'une lentille placée avant le dispositif de la figure 2.

a) Montrer qu'alors, en l'absence de turbulence, on pourrait écrire dans le plan  $P_1$  :  $W(x,y) = W_0$ . On considérera  $W_0$  comme constant (on néglige la diffraction due à l'ouverture finie du télescope).

b) Les turbulences atmosphériques transforment la fonction  $W$  en introduisant des défauts de phase, on obtient alors dans le plan  $P_1$  :

$$W(x, y) = W_0 \exp(j\psi(x, y))$$

Exprimer alors l'éclairement  $E_i(X, Y, t)$  au point de l'écran de coordonnées  $(X, Y)$ .

5) Le réseau est en fait un réseau radial, constitué de  $N$  fentes régulièrement réparties et tournant à la vitesse angulaire  $\omega_g$  autour de son axe (figure 3). L'axe de rotation est situé à la distance  $R$  de l'axe optique du dispositif ( $L_1$ ,  $L_2$ ), le décalage étant suivant  $Oy$ .

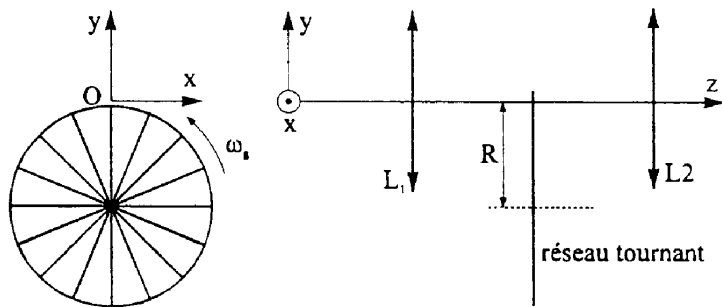


figure 3

a) Calculer au niveau de l'axe optique l'espacement des fentes du réseau et leur vitesse de défilement.

On admettra que les résultats précédents peuvent s'appliquer à ce réseau non infini et que les  $N$  fentes sont éclairées.

Montrer que  $E_i(X,Y,t)$  contient des termes de pulsation  $0$ ,  $\omega$ ,  $2\omega$  où on précisera la valeur de  $\omega$  en fonction de  $\omega_g$  et  $N$ .

b) Montrer que le terme à la pulsation  $\omega$  est de la forme  $\cos(\omega t + \beta(X,Y))$  avec (en raisonnant au 1<sup>er</sup> ordre) :

$$\beta(X,Y) = -s \frac{\pi y}{\pi x} (-X, -Y) \text{ (Exprimer } s \text{ en fonction des données)}$$

Une matrice de détecteurs placés dans le plan focal image de  $L_2$  donne une réponse en tension proportionnelle à l'intensité lumineuse. Le signal de chaque détecteur est alors filtré pour récupérer la composante à la pulsation  $\omega$ , puis convertir la phase de ce signal en tension. Un algorithme permet alors de calculer  $\psi(x,y)$  puis de commander le miroir du télescope en conséquence avec des éléments piézo-électriques.

## PROBLEME 2 - A PROPOS DE LA COMETE SHOEMAKER-LEVY 9

La comète Shoemaker-Levy 9 est passée en juillet 1992 suffisamment près de Jupiter pour se fragmenter et éclater en morceaux à cause des forces de marées dues à Jupiter. Les différents morceaux de la comète se sont finalement écrasés sur Jupiter en juillet 1994, et cette collision a été suivie en détail et en direct par les astronomes du monde entier.

Le but de ce problème est de comprendre, à l'aide de modèles très simples, l'origine de la fragmentation, puis de tirer un ordre de grandeur de la taille maximale des morceaux issus de cette fragmentation.

On supposera que le référentiel Jupiterocentrique est galiléen et on négligera dans tout le problème les effets dus au Soleil dans ce référentiel. Jupiter est supposée sphérique, homogène, de masse  $M_J$ , de rayon  $R_J$  et de masse volumique  $\mu_J$ .

Données :  $R_J = 71400 \text{ km}$   $M_J = 1,91 \cdot 10^{27} \text{ kg}$   
 Constante de la gravitation universelle:  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ USI}$

**PARTIE I—ESTIMATION DE LA LIMITE DE ROCHE**

On cherche ici à déterminer la distance en dessous de laquelle un corps (la comète) s'approchant de Jupiter se séparerait en plusieurs morceaux sous l'effet des forces de marée dues à Jupiter. Pour cela on fait les hypothèses suivantes :

- i) La comète de masse volumique  $\mu_c$  est en orbite circulaire de rayon  $d$  autour de Jupiter.
- ii) La comète est constituée de deux sphères identiques de masse  $m$  et de rayon  $r$ , homogènes et disposées comme indiqué sur la figure 4. Ces deux sphères ne sont liées entre elles que par leur attraction gravitationnelle mutuelle. On suppose que la disposition des deux sphères reste inchangée, les centres étant toujours alignés avec le centre de Jupiter.

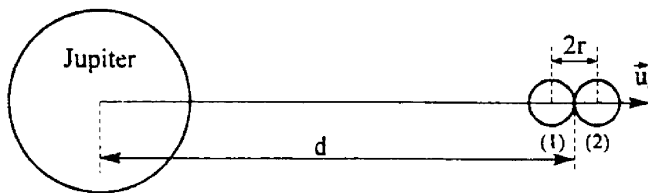


figure 4

iii) Lors des calculs d'attraction gravitationnelle sur une sphère de masse  $m$  et de rayon  $r$ , on suppose que toute la masse  $m$  est concentrée au centre de la sphère.

1) Etablir que le mouvement du centre d'inertie de la comète est uniforme et relier sa période  $T$  au rayon de la trajectoire et aux données. Donner l'expression de  $\omega^2$  ( $\omega = 2\pi/T$ ). On donnera une expression approchée au premier ordre en  $r/d$ , expression que l'on utilisera dans la suite du problème.

2) Faire un bilan des forces s'exerçant sur chacune des deux sphères constituant la comète dans le cas d'un contact maintenu.

3) a) En appliquant le théorème de la résultante cinétique, en déduire deux équations.

b) A quelle condition le contact entre les deux solides est-il rompu ?

c) En déduire que le contact est rompu lorsque  $d$  devient inférieur à  $d_{\text{lim}}$ . (On appelle  $d_{\text{lim}}$  limite de Roche)

Exprimer  $d_{\text{lim}}/R_J$ . Application numérique : on donne  $\mu_c = 1,00 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

Exprimer  $f$  module de l'attraction mutuelle des deux solides en fonction de  $d_{\text{lim}}$ ,  $G$ ,  $M_J$  et  $m$ .

d) Pourquoi parle-t-on de forces de marées ?

**PARTIE 2—INFLUENCE DES FORCES DE COHESION**

Les observations ont montré que la fragmentation de la comète s'est produite lorsque celle-ci est arrivée à une distance  $d_0 = 1,5 R_J$  de Jupiter. Ceci peut s'interpréter si l'on suppose qu'en plus de leur attraction mutuelle, les deux sphères sont liées par des forces de cohésion.

1) On note  $F_{\text{cohésion}}$  le module de la force de cohésion d'une sphère sur l'autre, et  $f$  le module de leur attraction mutuelle.

Etablir alors que  $F_{\text{cohésion}} = f \left( \left( \frac{d_{\text{lim}}}{d_0} \right)^3 - 1 \right)$

Application numérique : Calculer  $F_{\text{cohésion}} / f$

2) Les forces de cohésion entre deux morceaux d'un solide sont à courte portée et proportionnelles à la surface de contact entre les deux morceaux. Dans le cas de la glace (constituant essentiel de la comète), on peut estimer la force de cohésion  $P_0$  par unité de surface à partir de l'observation suivante : la taille limite sur Terre des stalactites de glace est de 3,0 m, au-delà elles s'effondrent sous l'effet des forces de pesanteur. En considérant le cas d'une stalactite cylindrique, en déduire la valeur de  $P_0$ . (On donne  $g$ , accélération de la pesanteur à la surface de la Terre  $g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$ ). Application numérique.

On assimilera la masse volumique de la glace à  $\mu_c$ .

3) Pour calculer les forces de cohésion dans le cas de la comète, on considère que les deux parties de masse  $m$  sont en fait deux demi-sphères accolées de rayon  $r'$ .

a) Exprimer  $r'$  en fonction de  $r$ .

b) En utilisant les questions 1) et 2), en déduire une estimation de la dimension  $r$  des morceaux issus de la fragmentation (on conservera pour cela le modèle des deux sphères pour le calcul de l'attraction mutuelle, et celui des demi-sphères pour celui des forces de cohésion). Exprimer  $r$  en

fonction de  $P_0$ ,  $\mu_c$ ,  $G$  et  $\alpha = \left( \frac{d_{\text{lim}}}{d_0} \right)^3 - 1$ .

Application numérique : calculer  $r$ .

---