

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TRƯỜNG

Môn thi: Toán – Lớp 11

Thời gian làm bài: 120 phút (không kể thời gian giao đề)

Câu I. (4,0 điểm)

Cho hàm số $y = \frac{x^3}{3} - x^2 + x + m$ có đồ thị là (C) . Tìm tất cả các giá trị của m để tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm M có $x_M = 3$ chắn hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 2.

Câu II. (6,0 điểm)

1) Giải phương trình

$$\sqrt{2} \sin 2x - \frac{\pi}{4} = \sin x + \cos x - 1$$

2) Tìm số nguyên dương lẻ n sao cho

$$C_n^1 - 2 \cdot 2C_n^2 + 3 \cdot 2^2 C_n^3 - 4 \cdot 2^3 C_n^4 + \dots + n \cdot 2^{n-1} C_n^n = 2022.$$

$$I = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2022(2023 - x^2)} - 2022}{x - 1}$$

3) Tính giới hạn

Câu III. (4,0 điểm)

1) Giải phương trình: $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} = 3x - 16 + 2\sqrt{2x^2 + 5x + 3}$

2) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 - y^3 + 3x^2 + 6x - 3y + 4 = 0 \\ 3\sqrt{4x+1} + 2\sqrt{2x+4y-8} = x + 2y + 5 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbf{R})$$

Câu IV. (4,0 điểm)

1) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$ có đỉnh C thuộc đường thẳng $d: x + 2y - 6 = 0$, điểm $M(1;1)$ thuộc cạnh BD biết rằng hình chiếu vuông góc của điểm M trên cạnh AB, AD đều nằm trên đường thẳng $D: x + y - 1 = 0$. Tìm tọa độ đỉnh C .

2) Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Gọi O là giao điểm của hai đường chéo. Trên nửa đường thẳng Ox vuông góc với mặt phẳng chứa hình vuông, ta lấy điểm S sao cho góc $\widehat{SCB} = 60^\circ$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BC và SD .

Câu V. (2,0 điểm) Cho a, b, c, d là các số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 = 25$; $c^2 + d^2 = 16$ và $ac + bd \leq 20$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = a + d$.

-----Hết-----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:.....; Số báo danh:.....

HƯỚNG DẪN CHẤM
 THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TRƯỜNG
 Môn: Toán – Lớp 11

Câu	Lời giải sơ lược	Điểm
1(4,0 điểm)		

	Ta có $y' = x^2 - 2x + 1$ Theo giả thiết ta có $M(3; 3+m) \in (C)$, phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại M là: $y = y'(3)(x-3) + 3+m \Leftrightarrow y = 4(x-3) + 3+m \Leftrightarrow y = 4x - 9 + m$ Gọi $A = \Delta \cap Ox \Rightarrow A\left(\frac{9-m}{4}; 0\right)$; $B = \Delta \cap Oy \Rightarrow B(0; m-9)$ Diện tích tam giác OAB: $S_{OAB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} \left \frac{9-m}{4} \right m-9 = \frac{(m-9)^2}{8}$ Theo giả thiết: $S_{OAB} = 2 \Rightarrow \frac{(m-9)^2}{8} = 2 \Leftrightarrow (m-9)^2 = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 13 \\ m = 5 \end{cases}$ Vậy $m = 5; m = 13$.	2,0
2.1 (2 điểm) $\sqrt{2} \sin 2x - \frac{p}{4} = \sin x + \cos x - 1$ (1)		
	(1) $\sin 2x - \cos 2x = \sin x + \cos x - 1$ $\Leftrightarrow \sin 2x - \sin x = \cos 2x + \cos x - 1$ $\Leftrightarrow 2 \sin x \cos x - \sin x = 2 \cos^2 x + \cos x - 1$ $\Leftrightarrow \sin x(2 \cos x - 1) = (2 \cos x - 1)(\cos x + 1)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} & (a) \\ \sin x - \cos x = 1 & (b) \end{cases}$ $\Leftrightarrow (2 \cos x - 1)(\sin x - \cos x - 1) = 0$ (a) $\Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$ (b) $\Leftrightarrow \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{cases}$	0,5
2.2 (2 điểm).		
	Ta có $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + C_n^3 x^3 + \dots + C_n^n x^n$ Lấy đạo hàm 2 vế ta được: $n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 x + 3C_n^3 x^2 + \dots + C_n^n x^{n-1}$ Cho $x = -2$ $\Rightarrow n(-1)^{n-1} = C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 - \dots + nC_n^n (-2)^{n-1}$ Vì n lẻ nên ta có: $n = C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 - \dots + n2^{n-1} C_n^n = 2022$ Vậy $n = 2022$	1,0
2.3 (2 điểm)		
	$I = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2022} \left(\sqrt{2023-x^2} - \sqrt{2022} \right)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2022} (1-x^2)}{(x-1) \left(\sqrt{2023-x^2} + \sqrt{2022} \right)}$	1,0

	$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\sqrt{2022}(1+x)}{\sqrt{2023-x^2} + \sqrt{2022}} = \frac{-2\sqrt{2022}}{2\sqrt{2022}} = -1$ Vậy $I = -1$	1,0
3.1 (2 điểm)		
	ĐKXD: $x^3 - 1$ Đặt $t = \sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1}$, đk: $t > 0$ $\Rightarrow t^2 = 3x+4+2\sqrt{2x^2+5x+3}$ $\Rightarrow 3x+2\sqrt{2x^2+5x+3} = t^2 - 4$ PT trở thành: $t = t^2 - 4 - 16$ $\hat{t} = -4$ $\hat{t} = 5 \Rightarrow t = 5$	1,0
	Với $t = 5 \Rightarrow \sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} = 5 \Rightarrow 3x+4+2\sqrt{2x^2+5x+3} = 25$ $\hat{t} = 21 - 3x^3 = 0$ $\hat{t} = 2\sqrt{2x^2+5x+3} = 21 - 3x \Rightarrow 4(2x^2+5x+3) = 441 - 126x + 9x^2$ $\hat{t} = x \notin 7$ $\hat{t} = x^2 - 146x + 429 = 0 \Rightarrow x = 143 \vee x = 3 \Rightarrow x = 3$ Vậy phương trình có nghiệm là $x = 3$	1,0
3.2 (2 điểm) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 - y^3 + 3x^2 + 6x - 3y + 4 = 0 & (1) \\ 3\sqrt{4x+1} + 2\sqrt{2x+4y-8} = x + 2y + 5 & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbf{R})$		
	Điều kiện $\begin{cases} x^3 - 1/4 \\ 2x + 4y - 8 \geq 0 \end{cases}$	0,5
	Phương trình (1) tương đương với $(x+1)^3 + 3(x+1) = y^3 + 3y$ $\Leftrightarrow (x+1-y)[(x+1)^2 + (x+1)y + y^2 + 3] = 0$ (*) Vì $(x+1)^2 + (x+1)y + y^2 + 3 > 0, \forall x, y$ nên (*) $\Leftrightarrow x+1-y=0 \Leftrightarrow y=x+1$	0,5

Thay vào phương trình (2) của hệ ta được

$$3\sqrt{4x+1} + 2\sqrt[3]{6x-4} = 3x+7$$

$$\Leftrightarrow \left[3\sqrt{4x+1} - (2x+5) \right] + \left[2\sqrt[3]{6x-4} - (x+2) \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-4(x-2)^2}{3\sqrt{4x+1} + 2x+5} + \frac{-(x-2)^2(x+10)}{4\sqrt[3]{(6x-4)^2} + 2(x+2)\sqrt[3]{6x-4} + (x+2)^2} = 0$$

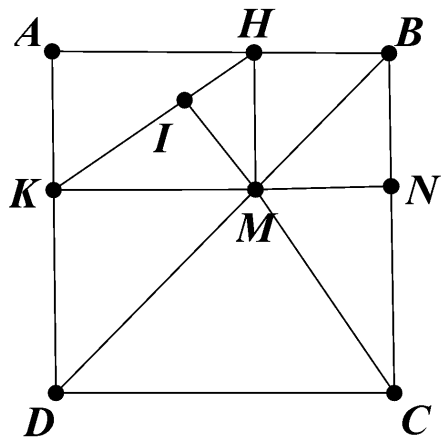
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2(\text{tm}) \Rightarrow y = 3(\text{tm}) \\ \frac{-4}{3\sqrt{2x+8} + x+12} + \frac{-(x+10)}{4\sqrt[3]{(6x-4)^2} + 2(x+2)\sqrt[3]{6x-4} + (x+2)^2} = 0(**) \end{cases}$$

Nhận xét: Với $x \geq -1/4$, vế trái của phương trình (**) luôn âm, nên (**) vô nghiệm

Vậy hệ phương trình có nghiệm (2;3)

1,0

4.1 (2 điểm)



Gọi H và K là hình chiếu vuông góc của M trên AB và AD; Gọi N là giao điểm của KM và BC, gọi I là giao điểm của CM và HK. Ta có $\triangle DKM$ vuông tại K và

$$\angle MDK = 45^\circ \Rightarrow KM = KD = NC.$$

Lại có $MH = MN$ (do MHBN là hình vuông) suy ra

$$\triangle KMH = \triangle CNM \Rightarrow \angle HKM = \angle MCN. \text{ Mà } \angle NMC = \angle MKC$$

$$\text{nên } \angle MKC + \angle HKM = \angle NMC + \angle MCN = 90^\circ$$

$$\Rightarrow CI \perp HK.$$

1,0

Đường thẳng CI qua M(1;1) và vuông góc với đường thẳng d nên có phương trình:

$$-(x-1) + (y-1) = 0 \Leftrightarrow x - y = 0. \text{ Do điểm C thuộc đường thẳng CI và đường thẳng } \Delta \text{ nên}$$

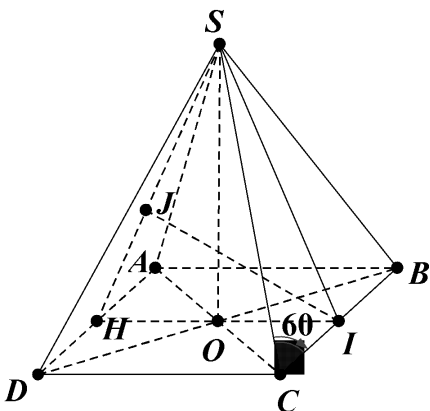
$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + 2y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

tọa độ điểm C là nghiệm hệ pt

Vậy C(2;2).

1,0

4.2 (2 điểm)



Gọi I, H là trung điểm của BC và SD.

Ta có SO là trục hình vuông và $\angle SCB = 60^\circ \Rightarrow SA = SB = SC = SD = CB = a$ và $BC \parallel mp(SCD)$ nên $d(BC, SD) = d(I, mp(SAD))$

Ta lại có $AD \perp (SIH) \Rightarrow (SIH) \perp (SAD)$ theo giao tuyến SH. Trong mặt phẳng (SIH) dựng

$$IJ \perp SH \Rightarrow IJ \perp (SAD) \Rightarrow d(I, (SAD)) = IJ$$

1,0

	$IJ = \frac{SO \cdot HI}{SH} = \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ Tam giác SIH có: Vậy $d(BC, SD) = \frac{a\sqrt{6}}{3}$	1,0
5 (2 điểm) Cho a, b, c, d là các số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 = 25$, $c^2 + d^2 = 16$ và $ac + bd \geq 20$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = a + d$.		
	Từ $a^2 + b^2 = 25$; $c^2 + d^2 = 16$ tồn tại hai góc $\alpha; \beta$ sao cho $\begin{cases} a = 5 \sin \alpha; b = 5 \cos \alpha \\ c = 4 \cos \beta; d = 4 \sin \beta \end{cases}$ Khi đó biểu thức $ac + bd \geq 20$ có dạng $\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \geq 1$ hay $\sin(a + b) \geq 1$ Do đó $\sin(a + b) = 1$ do đó $b = \frac{\pi}{2} - a + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. Vậy $\sin b = \cos a$	1,0
	Ta có $P = 5 \sin \alpha + 4 \sin \beta = 5 \sin \alpha + 4 \cos \alpha \leq \sqrt{41} \Rightarrow P_{\max} = \sqrt{41}$ Vậy giá trị lớn nhất của P là $\sqrt{41}$	1,0

- Hướng dẫn chấm này chỉ trình bày sơ lược một cách giải. Bài làm của học sinh phải chi tiết, lập luận chặt chẽ, tính toán chính xác mới được tính điểm tối đa.
- Với các cách giải đúng nhưng khác đáp án, tổ chấm trao đổi và thống nhất điểm chi tiết nhưng không được vượt quá số điểm dành cho bài hoặc phần đó. Mọi vấn đề phát sinh trong quá trình chấm phải được trao đổi trong tổ chấm và chỉ cho điểm theo sự thống nhất của cả tổ.
- Điểm toàn bài là tổng số điểm của các phần đã chấm, không làm tròn điểm