

Ondes électromagnétiques : morceaux choisis.

1- Micro-ondes : longueurs d'onde de 1 mm à 1 m (on prend les limites en fréquence données par l'énoncé : de 300 MHz à 300 GHz). Premier physicien... : Heinrich Hertz (allemand, 1857 – 1894). Proche infrarouge : de l'ordre du micromètre.

2- $\theta_L = \arcsin \frac{n_2}{n_1}$ (angle de réfraction limite). A.N. : $\theta_L \approx 75^\circ 34'$

3- Loi de Descartes en M : $\sin i = n_1 \sin r$. Or $r = \frac{\pi}{2} - \theta$; d'où $\sin i = n_1 \cos \theta$ (on considère que tous les angles

utilisés, i , r , θ , sont entre 0 et $\frac{\pi}{2}$). La condition $\theta > \theta_L$ équivaut

alors à $\sin i < n_1 \cos \theta_L = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$. On a donc

$i_{\max} = \arcsin \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \approx \arcsin \sqrt{2\Delta n_1}$. A.N. : $\sin(i_{\max}) \approx 0,36$.

4- $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} n_1 (PB + BC + CP') = \frac{2\pi}{\lambda} n_1 (BC + CB')$ (on choisit en fait le plan (π) particulier passant par B). Par ailleurs, A représente d'après l'énoncé la longueur d'onde dans le vide et il n'est donc pas utile de la noter λ_0 . D'où

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} n_1 \left(\frac{a}{\cos \theta} (1 + \cos 2\theta) \right) = 4\pi n_1 \frac{a}{\lambda} \cos \theta$$

5- L'interférence est constructive et la propagation est donc possible si φ est un multiple entier de 2π . Les modes θ_m sont

donc donnés par $\cos \theta_m = m \frac{\lambda}{2n_1 a}$ avec $m \in \mathbb{Z}$. Le nombre de modes est en fait limité par la condition

$\cos \theta_m < \cos \theta_L$, ce qui donne $m < \frac{2a}{\lambda} \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \approx \frac{2a}{\lambda} \sqrt{2\Delta n_1}$. D'où $N_M = 1 + E\left(\frac{2a}{\lambda} \sqrt{n_1^2 - n_2^2}\right)$.

6- La même condition conduit, m et a étant fixés, à $f > m \frac{c}{2a} \frac{1}{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}$; on a donc, pour un ordre m fixé, un

comportement de filtre passe-haut de fréquence de coupure $f_m = m \frac{c}{2a} \frac{1}{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}$.

7- Il faut que le mode $m = 1$ ne puisse pas se propager, ce qui s'écrit $\cos \theta_1 \geq \cos \theta_L$; ce qui équivaut à $a \leq \frac{\lambda}{2\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}$. A.N. : $a \leq 2,07 \mu\text{m}$.

8- Le rayon « direct » ($m = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, attention erreur d'énoncé) parcourt la distance L , le rayon « le plus long » ($\theta = \theta_L$)

parcourt lui la distance $\frac{L}{\sin \theta_L}$; les deux à la vitesse $\frac{c}{n_1}$. D'où $\Delta T = n_1 \frac{L}{c} \left(\frac{n_1}{n_2} - 1 \right) \approx \frac{L\Delta}{c}$. A.N. : il manque dans

l'énoncé la valeur de L , prenons par exemple $L = 1 \text{ km}$: $R_{\max}^{\text{sauf}} \approx 6,5 \cdot 10^6 \text{ bits.s}^{-1} \approx 8,2 \cdot 10^5 \text{ octets.s}^{-1}$.

9- Le rayon se propage dans le plan défini par l'axe de la fibre et le rayon lumineux incident. En effet, les lois de Descartes disent que le rayon réfracté et le rayon réfléchi appartiennent au plan d'incidence. Au centre de la face d'entrée, le plan d'incidence est par définition même celui que l'on a indiqué. Ensuite, de proche en proche, on voit sans difficulté que le plan d'incidence est toujours le même. On peut donc définir sa trajectoire par une équation $r(z)$ dans ce plan.

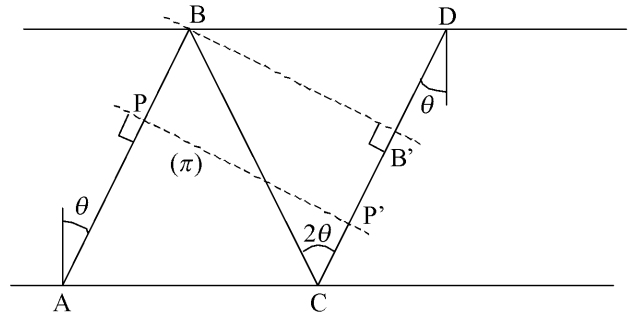
L'équation s'obtient en écrivant $n(r) \sin \theta(r) = c^{\text{te}} = n_1 \sin \theta_0$, donc $n^2(r) \sin^2 \theta(r) = n_1^2 \sin^2 \theta_0$. Or

$$\left(\frac{dr}{dz} \right)^2 = \left(\frac{1}{\tan \theta(r)} \right)^2 = \frac{1}{\sin^2 \theta(r)} - 1 \quad 1 + \left(\frac{dr}{dz} \right)^2 = \frac{n^2(r)}{n_1^2 \sin^2 \theta_0} \quad [1].$$

Donc

Attention : incohérence d'énoncé : il semble qu'à partir de maintenant a représente le rayon du cœur et non plus son diamètre.

10- De $n(a) = n_2$ (continuité de l'indice), on déduit $F(1) = 1$.



$$\left(\frac{dr}{dz}\right)^2 = \frac{\sin^2 i - (n_1^2 - n_2^2)F\left(\frac{r}{a}\right)}{n_1^2 - \sin^2 i}$$

De [1] et de l'expression de l'indice on tire $\frac{dr}{dz}$. Le cas limite est celui pour lequel $\frac{dr}{dz}$ s'annule pour $r = a$: cela donne $\sin^2 i_{\max} = n_1^2 - n_2^2$, même résultat qu'à la question 3).

11- Le portrait de phase correspond aux trajectoires dans le plan $(r, \frac{dr}{dz})$. On a :

$\left(\frac{dr}{dz}\right)^2 + \frac{n_1^2 - n_2^2}{n_1^2} \sin^2 \theta_0 F\left(\frac{r}{a}\right) = (\cotan \theta_0)^2$. Une trajectoire de phase ici est une courbe fermée (prendre par exemple $F(u) = u^2$) donc $r(z)$ est périodique.

12- $R_{\max}^{\text{grad}} = \frac{1}{\Delta T} = \frac{2c}{n_1 L} \left(\frac{n_1}{n_1 - n_2}\right)^2 \approx 410 \cdot 10^6 \text{ bits.s}^{-1} \approx 52 \cdot 10^6 \text{ octets.s}^{-1}$ (pour la même longueur $L = 1 \text{ km}$). On peut aussi

écrire $\frac{R_{\max}^{\text{grad}}}{R_{\max}^{\text{saut}}} = 2 \frac{n_1^2}{n_2(n_1 - n_2)} \approx 2 \frac{n_1}{\Delta} \approx 63$. On voit l'intérêt de la fibre à gradient d'indice...

13- Zone de rayonnement : $r \gg \lambda$. Hypothèses : il faut ajouter à $r \gg \lambda$ la relation $\lambda \gg$ extension spatiale du dipôle (ou, ce qui est équivalent, que les charges sont non relativistes). L'approximation dipolaire se trouve alors automatiquement vérifiée.

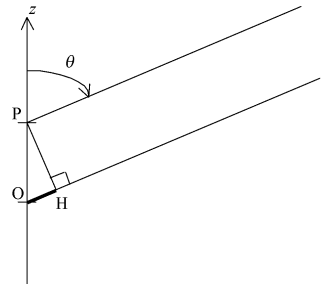
14- Considérons un élément de volume $d\tau$ autour du point P . Alors

$$I(z,t) dz u_z = j(z,t) d\tau = \sum_{\vec{r}} q_i \vec{v}_i = \sum_{\vec{r}} q_i \frac{d\vec{OS}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{\vec{r}} q_i \vec{OS}_i = \frac{d(\vec{dp})}{dt} = d\vec{p}(t) u_z$$

, si les charges ponctuelles q_i sont situées aux points S_i . D'où $d\vec{p}(t) = I(z,t) dz$.

15- Calcul classique de différence de marche à l'infini (car $r \gg L$) dans la direction θ : elle

vaut $OH = z \cos \theta$ et donc le déphasage cherché vaut $\varphi = \frac{\omega}{c} z \cos \theta$ (puisque les deux dipôles en P et en O sont en phase).



16- Le champ $\vec{E}(M,t)$ produit à grande distance par l'antenne entière résulte de la superposition des champs $d\vec{E}$ créés par les dipôles $d\vec{p}$ associés aux divers éléments dz de l'antenne. En tenant compte du déphasage établi au 15), et en faisant l'approximation que l'angle θ est le même quel que soit le point P de l'antenne, ainsi que le vecteur $\vec{u}_\theta$, et que le facteur r au dénominateur (tout ceci étant justifié à

l'aide de $r \gg L$), on a donc : $\vec{E}(M,t) = \int_{z=-L}^{+L} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{d\vec{p}(t - \frac{r}{c} + \frac{z \cos \theta}{c})}{r} \sin \theta u_\theta$. Soit, en notation complexe en $e^{i\omega t}$, et

compte tenu de $d\vec{p}(t) = I(z,t) dz$:

$$\vec{E}(M,t) = \frac{\sin \theta}{4\pi\epsilon_0 c^2} u_\theta \int_{z=-L}^{+L} i\omega I_0 f(z) e^{i\omega(t - \frac{r}{c} + \frac{z \cos \theta}{c})} dz = \frac{i\omega I_0 \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{e^{i\omega(t - \frac{r}{c})}}{r} u_\theta \int_{z=-L}^{+L} f(z) e^{i\omega \frac{z \cos \theta}{c}} dz$$

. On reconnaît bien,

au terme $\frac{e^{i\omega(t - \frac{r}{c})}}{r}$, une onde sphérique.

17- On reporte $f(z)$ pour obtenir :

$$\vec{E}(M,t) = \frac{i\omega I_0 \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{e^{i\omega(t - \frac{r}{c})}}{r} u_\theta \int_{z=-\frac{\lambda}{4}}^{+\frac{\lambda}{4}} \cos\left(\frac{2\pi z}{\lambda}\right) e^{i\omega \frac{z \cos \theta}{c}} dz = \frac{i\omega I_0 \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{e^{i\omega(t - \frac{r}{c})}}{r} u_\theta \int_{z=-\frac{\pi c}{2\omega}}^{+\frac{\pi c}{2\omega}} \cos\left(\frac{\omega}{c} z\right) e^{i\omega \frac{z \cos \theta}{c}} dz$$

L'intégrale ci-dessus (calcul assez lourd) vaut par l'énoncé. Au final, on tombe bien sur l'expression fournie

18- A grande distance : structure locale d'onde plane progressive se propageant vers $+\vec{u}_r$. D'où
 $\vec{B}(M,t) = \frac{1}{c} \vec{u}_r \wedge \vec{E}(M,t)$. Et donc $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0 c} \vec{E} \wedge (\vec{u}_r \wedge \vec{E}) = \frac{1}{\mu_0 c} E^2 \vec{u}_r$ (double produit vectoriel, avec $\vec{E} \cdot \vec{u}_r = 0$)

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{4\pi^2 \epsilon_0 c} \left(\frac{I_0}{r} \right)^2 \left(\frac{\cos\left[\frac{\pi}{2} \cos(\theta)\right]}{\sin(\theta)} \right)^2 \sin^2\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \vec{u}_r$$

). D'où

19- Remarque : la valeur de $\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta$ ne sert pas ici mais à la question suivante.

$$P_r = \oint_{4\pi \text{ sr}} \vec{\Pi} \cdot r^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi \vec{u}_r = \frac{I_0^2}{8\pi^2 \epsilon_0 c} \int_0^\pi \frac{\cos^2\left[\frac{\pi}{2} \cos(\theta)\right]}{\sin^3(\theta)} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{A}{4\pi \epsilon_0} \frac{I_0^2}{c}$$

où A est l'intégrale de l'énoncé.

20- Un calcul numérique donne $A \approx 1,219$. En remplaçant $\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)$ par $0,95 \sin^2 \theta$, comme suggéré par l'énoncé, on obtient $A \approx 0,95^2 \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = 0,95^2 \frac{4}{3} \approx 1,203$. Le résultat du calcul numérique semble donc convenable.

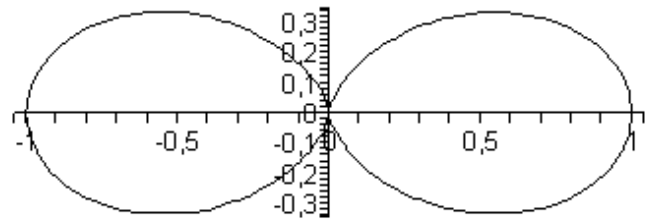
$$21- R = \frac{2P_r}{I_0^2} = \frac{A}{2\pi \epsilon_0 c} \approx 73 \Omega.$$

22- Il n'est pas évident de prouver que $\left(\frac{\cos\left[\frac{\pi}{2} \cos(\theta)\right]}{\sin(\theta)} \right)^2$ est

maximal en $\theta = \frac{\pi}{2}$; si on fait l'approximation (certes critiquable dans ce but) de remplacer là encore $\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)$ par $0,95 \sin^2 \theta$, c'est trivial... Le maximum de puissance est alors bien émis dans le plan xOy normal à

$$\rho(\theta) = \left(\frac{\cos\left[\frac{\pi}{2} \cos(\theta)\right]}{\sin(\theta)} \right)^2$$

l'antenne. Et l'allure est la suivante :



23- On reprend l'expression de $\vec{E}$ donnée à la question 17), avec $\theta = \frac{\pi}{2}$ et on obtient :

$$\vec{E}_0(M,t) = \frac{i}{2\pi \epsilon_0 c} \frac{I_0}{r} e^{i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)} (-\vec{u}_z)$$

Pour $\vec{E}_p(M,t)$, il faut tenir compte du terme de déphasage $e^{-ip\psi}$ qui provient du

courant dans l'antenne p et de la différence de marche $p a \sin \phi$ par rapport à l'onde émise par l'antenne A_0 (et là encore, on a tenu compte tenu de $r \gg Na$ pour exprimer la différence de marche, et cela permet aussi de considérer que le terme au dénominateur vaut approximativement r pour toutes les antennes). On obtient alors :

$$\vec{E}_p(M,t) = \frac{i}{2\pi \epsilon_0 c} \frac{I_0}{r} e^{i\omega\left(t - \frac{r}{c} + \frac{p a \sin \phi}{c}\right)} (-\vec{u}_z) = \vec{E}_0(M,t) e^{-ip\Phi}$$

24- Erreur d'énoncé ? le résultat s'exprime plutôt en fonction de Φ que de Ψ . Par superposition, on a donc

$$\vec{E}(M,t) = \vec{E}_0(M,t) \sum_{p=0}^{N-1} e^{-ip\Phi} = \frac{1 - e^{-iN\Phi}}{1 - e^{-i\Phi}} \vec{E}_0(M,t)$$

$$\underline{E}(M,t) = \frac{e^{-i\frac{N\Phi}{2}}}{e^{-i\frac{\Phi}{2}}} \frac{\sin\frac{N\Phi}{2}}{\sin\frac{\Phi}{2}} \underline{E}_0(M,t) = \frac{\sin\frac{N\Phi}{2}}{\sin\frac{\Phi}{2}} \underline{E}_0\left(M, t - (N-1)\frac{\Phi}{2\omega}\right)$$

Donc

$$\underline{E}(M,t) = \frac{\sin\frac{N\Phi}{2}}{\sin\frac{\Phi}{2}} \underline{E}_0\left(M, t - (N-1)\frac{\Phi}{2\omega}\right)$$

d'où

25- $\Phi = \psi - Ka \sin \varphi$ donc on a bien $\psi - Ka \leq \Phi \leq \psi + Ka$. L'amplitude du champ est maximale lorsque

$\sin \frac{\psi - Ka \sin \varphi}{2} = 0$, soit pour $\frac{\psi - Ka \sin \varphi_m}{2} = m\pi$ avec m entier, soit encore $\frac{\psi}{2\pi} - \frac{a}{\lambda} \sin(\varphi_m) = m$. Remarque (pas demandé explicitement mais c'est pourtant intéressant et c'est ce à quoi sert l'inégalité obtenue au début de cette

question...) : les maxima absolus sont obtenus pour $\sin \frac{\Phi}{2} = 0$, soit $\Phi = 2m\pi$ avec m entier. Et ce, alors que Φ parcourt

un intervalle de largeur $2Ka$. On montre alors qu'il y a $E\left(\frac{2Ka}{2\pi}\right) = E\left(\frac{2a}{\lambda}\right)$ valeurs entières de m convenables ; pour chaque valeur de m on a deux valeurs de φ correspondantes et donc le nombre de maxima absolus qui seront observés vaut $2E\left(\frac{2a}{\lambda}\right)$.

26- L'amplitude de $\underline{E}(M,t)$ est $\frac{\sin\frac{N\Phi}{2}}{\sin\frac{\Phi}{2}} \frac{I_0}{2\pi\epsilon_0 cr}$ (d'après le résultat du 24) et l'expression de $\underline{E}_0(M,t)$ donnée au

23)). L'amplitude maximale est obtenue pour $\sin \frac{\Phi}{2} = 0$, soit $\frac{\Phi}{2} = m\pi$ avec m entier. Si l'on étudie le comportement de $\frac{\sin(Nx)}{\sin(x)}$ au voisinage de $x = m\pi$ en posant $x = m\pi + \varepsilon$, on obtient :

$$\frac{\sin(N(m\pi + \varepsilon))}{\sin(m\pi + \varepsilon)} = \frac{\sin(Nm\pi)\cos(N\varepsilon) + \cos(Nm\pi)\sin(N\varepsilon)}{\sin(m\pi)\cos\varepsilon + \cos(m\pi)\sin\varepsilon} = \frac{\cos(Nm\pi)\sin(N\varepsilon)}{\cos(m\pi)\sin\varepsilon} = \pm \frac{\sin(N\varepsilon)}{\sin\varepsilon}, \text{ qui tend vers } \pm N$$

lorsque ε tend vers 0. L'amplitude maximale du champ vaut donc $\frac{NI_0}{2\pi\epsilon_0 cr}$.

Le pic principal se situe à φ_0 tel que $\psi - Ka \sin \varphi_0 = 0$; la première annulation de l'amplitude à partir de ce pic principal

se situe à un angle φ'_0 tel que $\psi - Ka \sin \varphi'_0 = \frac{2\pi}{N}$. D'où l'on tire par différence $Ka(\sin \varphi_0 - \sin \varphi'_0) = \frac{2\pi}{N}$. On voit donc que la largeur du pic principal est d'autant plus petite que N est grand.

27- * le nombre et la position des maxima absolus ne dépend pas de N ; pour $a = \frac{\lambda}{2}$, on observe 2 maxima absolus (confirmé par les figures 13 et 14).

* le nombre total de lobes augmente lui avec N , alors que leur largeur diminue. Pour l'évaluer, on peut remarquer

que le nombre total de lobes est égal au nombre de zéros de l'amplitude ; sur l'intervalle considéré, $\frac{\sin\frac{N\Phi}{2}}{2}$ s'annule

pour $2E\left(\frac{2aN}{\lambda}\right)$ valeurs de φ , mais parmi ces valeurs il y en a $2E\left(\frac{2a}{\lambda}\right)$ pour lesquelles $\sin\frac{\Phi}{2}$ s'annule aussi et pour

lesquelles on a en fait un maximum. Il reste donc $2E\left(\frac{2aN}{\lambda}\right) - 2E\left(\frac{2a}{\lambda}\right)$ zéros de l'amplitude, ou le même nombre de lobes (confirmé par la figure 13 pour laquelle la formule ci-dessus donne bien 10 lobes).

28- Erreur d'énoncé ? Tout semble indiquer qu'il y a maintenant $N+1$ antennes, numérotées de $p=0$ à $p=N$: c'est ce que nous considérerons dans cette question. Cette question est par ailleurs quelque peu rédigée dans un style « devinette »...

Alors le même raisonnement qu'au 23) nous donne $\underline{E}_p(M,t) = \frac{i}{2\pi\epsilon_0 cr} \frac{N!}{p!(N-p)!} I_0 e^{i\omega\left(t - \frac{r}{c} + \frac{pasin\varphi}{c}\right)} (-u_z)$. D'où, par superposition des ondes émises par les $N+1$ antennes,

$$\underline{E}(M,t) = \frac{iI_0}{2\pi\epsilon_0 cr} e^{i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)} (-u_z) \sum_{p=0}^N \frac{N!}{p!(N-p)!} z^p = \frac{iI_0}{2\pi\epsilon_0 cr} e^{i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)} (-u_z) P_N(z)$$

. Et donc la valeur moyenne du vecteur

de Poynting est proportionnelle (pour sa dépendance angulaire) à $R_N(\varphi) = |P_N(z)|^2$. Or

$$R_N(\varphi) = \left| (1 + e^{iKa \sin \varphi})^N \right|^2 = (1 + e^{iKa \sin \varphi})^N (1 + e^{-iKa \sin \varphi})^N = (2 + 2\cos(Ka \sin \varphi))^N = \left(2\cos\frac{Ka \sin \varphi}{2} \right)^{2N} = \left(2\cos\frac{\pi a \sin \varphi}{\lambda} \right)^{2N}$$

Cette

fonction continue est bien maximale en $\varphi = 0$, et donc décroissante à partir de là. Sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin \varphi$ augmente de 0 à 1 et

donc $\frac{Ka \sin \varphi}{2}$ augmente de 0 à $\frac{Ka}{2}$. Pour que le diagramme de rayonnement soit une fonction décroissante de φ sur

cet intervalle (et ne s'annule pas), il suffit donc que $\frac{Ka}{2} < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow Ka < \pi \Leftrightarrow \frac{a}{\lambda} < \frac{1}{2}$. Ce qui semble parfaitement confirmé par l'observation de la figure 15.

29- Pour le cas $a = \frac{\lambda}{2} \Leftrightarrow Ka = \pi$, on peut aisément comparer les figures 13 et 15 par exemple.

La modulation de phase permet de choisir la (les) direction(s) des lobes principaux : la direction perpendiculaire au plan des antennes n'est pas nécessairement un lobe principal, alors que c'en est toujours un pour la modulation d'amplitude.

La modulation d'amplitude semble ceci dit éviter la présence de lobes secondaires : si ceux-ci sont gênants, on pourra la préférer.