



Chapitres 06 et 07 Variations de fonctions

I. Sens de variation

Exemple

On considère la **fonction carré** f définie sur l'intervalle $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2$$

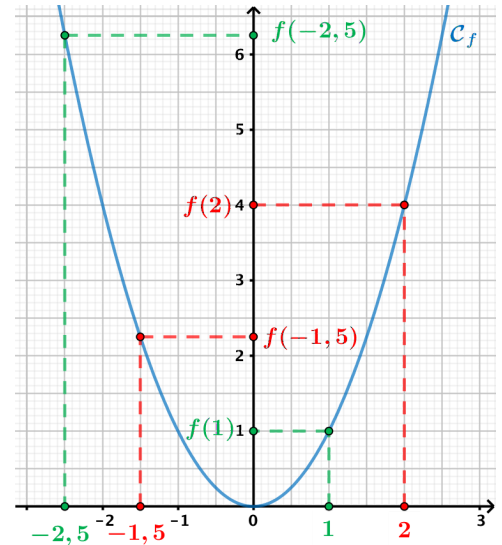
- Pour des valeurs croissantes choisies pour x dans l'intervalle $] - \infty; 0]$, leurs images $f(x)$ sont **décroissantes**.
Par exemple, $-2,5 < -1,5$ mais $f(-2,5) > f(-1,5)$
- Pour des valeurs croissantes choisies pour x dans l'intervalle $[0; + \infty[$, leurs images $f(x)$ sont **croissantes**.
Par exemple, $1 < 2$ et $f(1) < f(2)$

On dit que la fonction f est **décroissante sur l'intervalle** $] - \infty; 0]$ et **croissante sur l'intervalle** $[0; + \infty[$.

Remarques

- Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe de la fonction carré est appelée une **parabole** de sommet O .
- Dans un repère orthogonal, la courbe de la fonction carré est **symétrique** par rapport à l'axe des ordonnées. C'est une fonction **paire**

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)$$

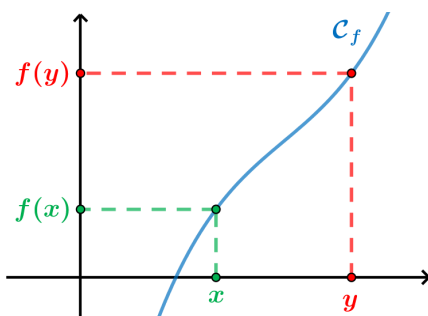


Définition 1

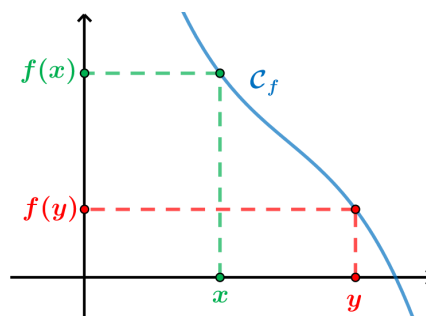
Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

- f est **croissante** sur I si $\forall x, y \in I, x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$
- f est **décroissante** sur I si $\forall x, y \in I, x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$
- f est **constante** sur I si $\forall x, y \in I, f(x) = f(y)$
- f est **monotone** sur I si f est soit **croissante** sur I , soit **décroissante** sur I .

Si les inégalités sont strictes ($<$ ou $>$), on dira que f est **strictement croissante** ou **strictement décroissante** sur I , mais aussi **strictement monotone** sur I .



f est croissante
 $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$



f est décroissante
 $x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$

Remarques

- Une fonction peut changer de variations sur son ensemble de définition (elle n'est pas monotone : elle peut être successivement croissante ou décroissante). Pour étudier chaque changement de variations, on prendra les valeurs de x et y dans un même intervalle (où la fonction est monotone, ce qui n'est pas toujours simple à déterminer de prime abord).
- On dit qu'une fonction **croissante** conserve l'ordre. Dans ce cas, les antécédents et leurs images sont **rangés dans le même ordre**.

- On dit qu'une fonction **décroissante** renverse l'ordre. Dans ce cas, les antécédents et leurs images sont **rangés dans l'ordre inverse**.
- Une fonction **constante** sur I peut être considérée comme **croissante et décroissante** sur I .

Méthode

 Vidéo <https://youtu.be/zHYaPOWi4Iw>

 Vidéo https://youtu.be/_KaMRG51Ts

Pour trouver les variations d'une fonction f , on considère deux réels x et y tels que $x < y$ et on essaye de déterminer le **signe de** $f(x) - f(y)$. Dans le cas de la fonction carré, on obtient

$$f(x) - f(y) = x^2 - y^2$$

On reconnaît alors la troisième identité remarquable $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ et donc

$$f(x) - f(y) = (x + y)(x - y)$$

Or, $x < y \Rightarrow x - y < 0$

- Si x et y sont deux nombres négatifs**, alors $x + y$ est négatif et $f(x) - f(y)$ est le produit de deux facteurs négatifs donc $f(x) - f(y) \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(y)$
On en déduit que f est **décroissante sur l'intervalle $] - \infty ; 0]$**
- Si x et y sont deux nombres positifs**, alors $x + y$ est positif et $f(x) - f(y)$ est le produit d'un facteur positif et d'un facteur négatif donc $f(x) - f(y) \leq 0 \Rightarrow f(x) \leq f(y)$
On en déduit que f est **croissante sur l'intervalle $] 0 ; + \infty [$**

II. Maximum, minimum

Exemple

Si l'on reprend la fonction carré, pour tout nombre réel x , on peut affirmer que $f(x) \geq 0$. 0 est le **minimum** de la fonction f .

Définition 2

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Soit a et b deux nombres de l'intervalle I .

- f admet un **minimum** m en a sur I si $\forall x \in I, f(x) \geq m = f(a)$
- f admet un **maximum** M en b sur I si $\forall x \in I, f(x) \leq M = f(b)$

Remarques

- Les minima et les maxima sont des **extrema** (**extremum** au singulier).
- La **fonction carré** ne possède **aucun maximum sur $\mathbb{R}$** mais en possède sur n'importe quel intervalle fini. Par exemple, sur l'intervalle $[-2; 2]$, la fonction carré possède un maximum égal à 4 en $x = -2$ et en $x = 2$.

III. Tableau de variations

Un tableau de variations résume les variations d'une fonction en faisant apparaître les intervalles où elle est monotone et les extrema locaux (minima et maxima). Lorsque la fonction ne possède pas de minimum ou de maximum ou encore si elle est définie en $-\infty$ ou en $+\infty$ et si elle diminue ou grandit de manière infinie, on utilise les symboles $-\infty$ et $+\infty$ respectivement.

Exemple

À l'aide des informations des paragraphes précédents, on peut dresser le tableau de variations de la **fonction carré** définie sur $\mathbb{R}$.

Remarque

On note f à la deuxième ligne car il s'agit bien des **variations** de la **fonction** f contrairement à un **tableau de signes** où l'on note $f(x)$ car il s'agit bien du signe du **nombre** $f(x)$ en fonction des valeurs de x (positif ou négatif).

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	$+\infty$	0	$+\infty$

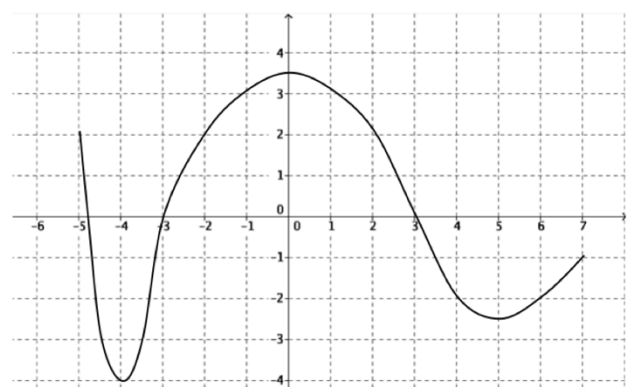
Méthode

Déterminer graphiquement les variations d'une fonction et dresser un tableau de variations

 Vidéo <https://youtu.be/yGqqoBMq8Fw>

On considère la représentation graphique la fonction f .

- Donner son ensemble de définition.
- Donner les variations de la fonction.



- Donner les extremums de la fonction en précisant où ils sont atteints.
- Résumer les résultats précédents dans un tableau de variations.

Solution

- La fonction f est **définie sur** $[-5; 7]$.
- La fonction f est **croissante** sur les intervalles $[-4; 0]$ et $[5; 7]$. Elle est **décroissante** sur les intervalles $[-5; -4]$ et $[0; 5]$.
- Le **maximum** de f est 3,5. Il est atteint en $x = 0$.
Le **minimum** de f est -4. Il est atteint en $x = -4$.
- On dresse le **tableau de variations** de f .

x	-5	-4	0	5	7
f	2	-4	3,5	-2,5	-1

IV. Taux d'accroissement d'une fonction

Définition 3

Soit une fonction f définie sur un intervalle I et soient x et y deux nombres réels de cet intervalle ($x \neq y$), le **taux d'accroissement** entre x et y est le quotient

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

D'après le paragraphe I, il est clair que si ce **taux d'accroissement** est **positif**, $f(y) - f(x)$ et $y - x$ sont de même signe et donc f **est croissante sur** I .

À l'inverse, si ce **taux d'accroissement** est **négatif**, $f(y) - f(x)$ et $y - x$ sont de signes opposés et donc f **est décroissante sur** I .

On en déduit la propriété suivante.

Propriété 1

Soit une fonction f définie sur un intervalle I .

$$\forall x, y \in I, x \neq y, \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq 0 \Leftrightarrow f \text{ est croissante sur } I$$

$$\forall x, y \in I, x \neq y, \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq 0 \Leftrightarrow f \text{ est décroissante sur } I$$

Le taux d'accroissement permettra d'introduire la notion de dérivée en première



Applications aux fonctions de références

Fonctions affines

Soient a et b des réels et la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$. Le taux d'accroissement entre deux réels x et y ($x \neq y$) égale

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = \frac{ay+b-(ax+b)}{y-x} = \frac{ay+b-ax-b}{y-x} = \frac{ay-ax}{y-x} = \frac{a(y-x)}{y-x} = a$$

Donc, si $a > 0$, le taux d'accroissement est positif donc la fonction f **est strictement croissante sur** $\mathbb{R}$.

Si $a < 0$, le taux d'accroissement est négatif donc la fonction f **est strictement décroissante sur** $\mathbb{R}$.

Si $a = 0$, le taux d'accroissement est nul donc la fonction f **est constante sur** $\mathbb{R}$.

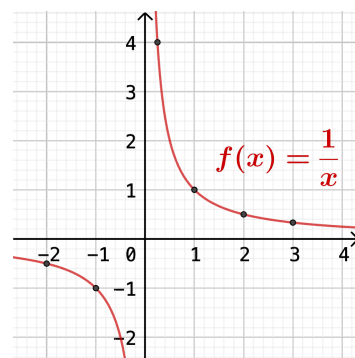
Fonction inverse

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

La **fonction inverse** est définie sur deux intervalles distincts $] - \infty; 0[$ et $]0; + \infty[$. Soient des réels x et y dans le même intervalle ($x \neq y$), le taux d'accroissement entre x et y égale

$$\begin{aligned} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} &= \frac{\frac{1}{y}-\frac{1}{x}}{y-x} = \frac{\frac{x-y}{xy}}{y-x} = \frac{\frac{x-y}{xy}}{y-x} = \frac{x-y}{xy} \times \frac{1}{y-x} = \frac{1}{xy} \times \frac{x-y}{y-x} \\ \frac{f(y)-f(x)}{y-x} &= -\frac{1}{xy} \end{aligned}$$



On distingue alors deux cas : $x, y \in R_-^*$ et $x, y \in R_+^*$. Les réels x et y sont alors de même signe donc le taux d'accroissement est **strictement négatif**, on déduit que la **fonction inverse est strictement décroissante** sur chacun des intervalles $] - \infty; 0[$ et $]0; + \infty[$. On peut aussi tracer le tableau de variations de la fonction.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	0 ↘ $-\infty$		$+\infty$ ↘ 0

Remarques

- La **double barre** indique que la fonction n'est pas définie en 0.
- $R^* = R \setminus \{0\}$ désigne l'ensemble des nombres réels sauf 0, c'est-à-dire $] - \infty; 0[\cup]0; + \infty[$.
- On ne peut pas dire que la fonction inverse est décroissante sur R^* (la partie positive de la courbe se situe au-dessus de la partie négative) mais qu'elle est strictement décroissante sur R_-^* et sur R_+^* .
- Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe de la fonction inverse est une **hyperbole** de centre O .
- La courbe de la fonction inverse est symétrique par rapport à l'origine. C'est une fonction **impaire**.

$$\forall x \in R^*, f(-x) = -f(x)$$

Fonction cube

Soit la fonction f définie sur R par $f(x) = x^3$

Soient des réels x et y ($x \neq y$), le taux d'accroissement entre x et y égale

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = \frac{y^3-x^3}{y-x} = \frac{(y-x)(y^2+xy+x^2)}{y-x} = y^2 + xy + x^2$$

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = \frac{1}{2}(x^2 + 2xy + y^2) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = \frac{1}{2}(x+y)^2 + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \geq 0$$

Le taux d'accroissement est positif donc la **fonction cube h est croissante sur R** .

On peut aussi tracer le tableau de variations de la fonction.

Remarques

- Pour tracer la fonction cube, on peut utiliser un tableau de valeurs.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-8	-1	0	1	8

- Dans un repère orthogonal, la courbe de la fonction cube est **symétrique** par rapport à l'**origine** du repère. C'est une fonction **impaire**.

$$\forall x \in R, f(-x) = -f(x)$$

Une fonction particulière : la fonction valeur absolue

Soit la fonction f définie sur R par

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Soient des réels x et y ($x \neq y$).

1^{er} cas : $x, y \in R_+^*$

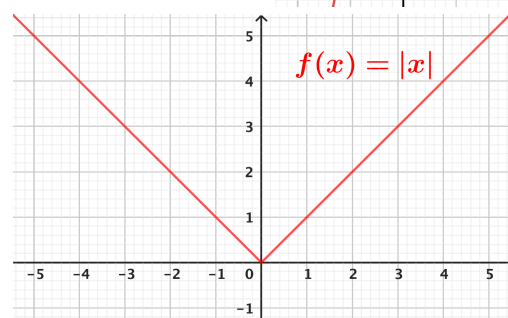
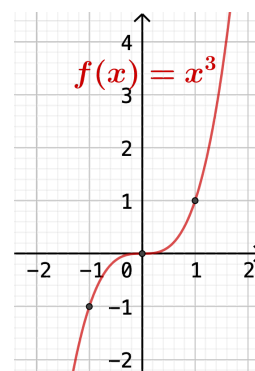
$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = \frac{y-x}{y-x} = 1 > 0$$

2^e cas : $x, y \in R_-^*$

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = \frac{-y-(-x)}{y-x} = -\frac{y-x}{y-x} = -1 < 0$$

On en déduit que f est strictement décroissante sur R_-^* et strictement croissante sur R_+^* .

x	$-\infty$	$+\infty$
f	$-\infty$	$+\infty$



Exercice 1

- Tracer la fonction k définie sur R par

$$k(x) = |3x + 2|$$

Et déterminer ses variations.

- Tracer la fonction h définie sur R par

$$h(x) = |3x + 2| - |x + 6|$$

Et déterminer ses variations.

Exercice 2

Tracer la fonction r définie sur R par $r(x) = \sqrt{x}$ et déterminer ses variations.

V. Positions relatives des courbes représentatives des fonctions de référence

Propriété 2

Soit x un nombre de l'intervalle $[0; 1]$,

$$0 \leq x^3 \leq x^2 \leq x \leq \sqrt{x} \leq 1$$

Soit x un nombre de l'intervalle $[1; +\infty[$,

$$1 \leq \sqrt{x} \leq x \leq x^2 \leq x^3$$

Démonstration

- Soit x un nombre de l'intervalle $[0; 1]$,

$$0 \leq x \leq 1$$

On multiplie les membres de cette inégalité par $x \geq 0$, le sens des inégalités est donc conservé,

$$0 \leq x^2 \leq x$$

On multiplie une nouvelle fois par x

$$0 \leq x^3 \leq x^2$$

En rassemblant les inégalités, on obtient ainsi

$$0 \leq x^3 \leq x^2 \leq x \leq 1$$

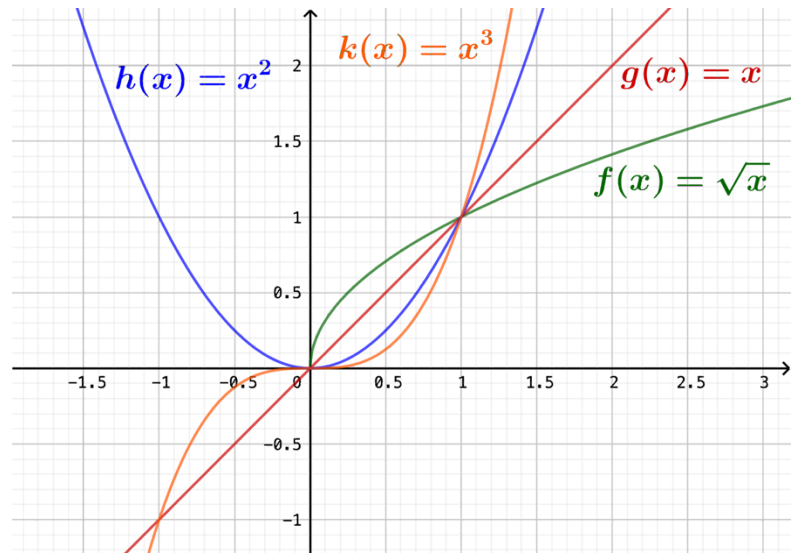
D'après le paragraphe 1,

$$x^2 \leq x \Rightarrow \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x} \Rightarrow x \leq \sqrt{x}$$

$$x \leq 1 \Rightarrow \sqrt{x} \leq \sqrt{1} \Rightarrow \sqrt{x} \leq 1$$

Donc

$$0 \leq x^3 \leq x^2 \leq x \leq \sqrt{x} \leq 1$$



- Soit x un nombre de l'intervalle $[1; +\infty[$,

$$x \geq 1$$

On multiplie les membres de cette inégalité par $x \geq 0$, le sens des inégalités est donc conservé,

$$x^2 \geq x$$

On multiplie une nouvelle fois par x

$$x^3 \geq x^2$$

En rassemblant les inégalités, on obtient ainsi

$$x^3 \geq x^2 \geq x \geq 1$$

D'après le paragraphe 1,

$$x^2 \geq x \Rightarrow \sqrt{x^2} \geq \sqrt{x} \Rightarrow x \geq \sqrt{x}$$

$$x \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x} \geq \sqrt{1} \Rightarrow \sqrt{x} \geq 1$$

Donc

$$1 \leq \sqrt{x} \leq x \leq x^2 \leq x^3$$

Remarque

Les courbes représentatives des fonctions h (carré) et f (racine carrée) sont **symétriques** par rapport à celle de g (identité) sur R_+ . On dit que ces deux fonctions sont des **fonctions réciproques**. Si on applique ces deux fonctions à un nombre positif, on retrouve le même nombre à l'arrivée. En effet,

$$\forall x \in R_+, \sqrt{x^2} = (\sqrt{x})^2 = x$$

VI. Algorithmes de calcul

1. Recherche de solutions d'équations

Pour trouver une valeur approchée d'une solution d'une équation du type $f(x) = k$ où $k \in R$, on utilisera principalement en seconde deux méthodes : la méthode par **dichotomie** et la **méthode par balayage**.

Méthode par dichotomie

Considérons une fonction f définie et continue sur un intervalle $[a; b]$ (la notion de continuité sera vu ultérieurement au lycée mais l'idée la plus simple est de dire que la courbe de f est une ligne continue). Soit un réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$. L'idée de l'algorithme est simple : à chaque étape, on prend le milieu de l'intervalle précédent et on garde l'intervalle contenant k . Ainsi, à la première étape, on calcule $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$. Si k est compris entre $f(a)$ et $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$, on utilisera l'intervalle $\left[a; \frac{a+b}{2}\right]$ à la deuxième étape. Si k est compris entre $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ et $f(b)$, on utilisera l'intervalle $\left[\frac{a+b}{2}; b\right]$ à la deuxième étape.

Exemple

Considérons la fonction définie sur R par

$$f(x) = x^4 + x^3 + x + 1$$

On cherche à trouver une solution arrondie à 0,01 près de l'équation $f(x) = 2$ sur l'intervalle $[0; 1]$

Solution

Remarquons que

$$f(0) = 1 \quad f(1) = 4 \quad f(0,5) = 1,6875$$

On se place donc à la deuxième étape sur l'intervalle $[0,5; 1]$

$$f(0,75) \approx 2,488$$

On se place donc à la 3^e étape sur l'intervalle $[0,5; 0,75]$

$$f(0,625) \approx 2,022$$

On se place donc à la 4^e étape sur l'intervalle $[0,5; 0,625]$

$$\frac{0,5+0,625}{2} = 0,5625 \quad f(0,5625) \approx 1,841$$

On se place donc à la 5^e étape sur l'intervalle $[0,5625; 0,625]$

$$\frac{0,5625+0,625}{2} = 0,59375 \quad f(0,59375) \approx 1,927$$

On se place donc à la 6^e étape sur l'intervalle $[0,59375; 0,625]$

$$f(0,609375) \approx 1,974$$

On se place donc à la 7^e étape sur l'intervalle $[0,609375; 0,625]$

$$f(0,6171875) \approx 1,997$$

On se place donc à la 8^e étape sur l'intervalle $[0,6171875; 0,625]$

$$f(0,62109375) \approx 2,009$$

On voit ainsi que l'arrondi à 0,01 près d'une solution de l'équation $f(x) = 2$ est 0,62.

Remarques

- On aurait pu présenter les solutions sous la forme d'un tableau pour simplifier l'écriture.

x	0	1	0,5	0,75	0,625	0,5625	0,59375	0,609375	0,6171875	0,62109375
$f(x)$	1	4	1,6875	2,488	2,022	1,841	1,927	1,974	1,997	2,009

- La méthode permet de trouver une solution de l'équation mais pas toutes les équations d'un intervalle donné.
- La méthode divisant la longueur de l'intervalle par 2, le nombre d'étapes peut être relativement élevé et les calculs fastidieux si on les réalise à la main, d'où l'idée de confier cette tâche à un logiciel !
- Dans certains cas, la solution exacte peut être compliquée voire impossible à trouver avec des fonctions usuelles.

Exercice

Réaliser un programme en python qui permette de modéliser cette méthode.

Méthode par balayage

On se place dans le même contexte que la méthode précédente mais une fois que l'on a déterminé deux entiers consécutifs c et $c + 1$ pour lesquels k est compris entre $f(c)$ et $f(c + 1)$, on calcule l'image du nombre $c + 0,1$, puis celle de $c + 0,2$ et ainsi de suite jusqu'à $c + 0,9$. Le principe est alors identique à la méthode par dichotomie et on garde l'intervalle dont l'image contient k puis on utilise successivement des pas de 0,01 puis 0,001, etc.

Exemple

Reprenons l'exemple de la première méthode. On obtient successivement les tableaux suivants.

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
-----	---	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	---

$f(x)$	1	1,101	1,210	1,335	1,490	1,688	1,946	2,283	2,722	3,285	4
--------	---	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	---

x	0,6	0,61	0,62	0,63	0,64	0,65	0,66	0,67	0,68	0,69	0,7
$f(x)$	1,946	1,975	2,006	2,038	2,070	2,103	2,137	2,172	2,208	2,245	2,283

x	0,61	0,611	0,612	0,613	0,614	0,615	0,616	0,617	0,618	0,619	0,62
$f(x)$	1,975	1,978	1,982	1,985	1,988	1,991	1,994	1,997	1,9999	2,003	2,006

On déduit le même résultats que précédemment.

Remarques

- Cette méthode s'utilise de manière simple à l'aide d'une calculatrice.
- On doit aller jusqu'au pas 0,001 pour obtenir une précision à 0,01 près.

2. Calcul approché de la longueur d'une courbe

En seconde, on peut utiliser la méthode des cordes pour calculer une valeur approchée de la longueur de la courbe d'une fonction f sur l'intervalle $[a; b]$. Le principe est de couper l'intervalle $[a; b]$ en n intervalles de même longueur et d'approcher la fonction sur ces intervalles par la corde qui relie les deux extrémités de l'intervalle.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons

$$h = \frac{b-a}{n}$$

Et considérons les points $M_k(x_k; y_k)$ définis par

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, x_k = a + kh \text{ et } y_k = f(x_k)$$

Si l'on note l la longueur de la courbe représentative de f sur $[a; b]$, on obtient ainsi

$$\forall k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, M_k M_{k+1} = \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (y_{k+1} - y_k)^2} = \sqrt{h^2 + (f(x_{k+1}) - f(x_k))^2}$$

Et donc

$$l \approx \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{h^2 + (f(x_{k+1}) - f(x_k))^2}$$

Remarques

- Le symbole Σ (sigma) permet d'écrire mathématiquement une somme. $\sum_{k=0}^{n-1} \dots$ se lit « somme pour k allant de 0 à $n-1$ de... ».
- $M_0 = (a; f(a))$ et $M_n = (b; f(b))$

Voici un algorithme en Python qui permet d'effectuer ce calcul approché.

```
from math import *
# définition de la fonction f (ici fonction carré)
def f(x):
    return x**2
def longueur_courbe(f,a,b,n):
    # h est la longueur de chaque intervalle
    h=(b-a)/n
    L = 0.0
    for k in range(n):
        # Coordonnées du point actuel
        x_i=a+k*h
        x_s=a+(k+1)*h
        # Coordonnées du point suivant
        y_i=f(x_i)
        y_s=f(x_s)
        # Longueur du segment entre (x_i, y_i) et (x_s, y_s)
        longueur_corde=sqrt((x_s-x_i)**2+(y_s-y_i)**2)
        # Ajout de la longueur du segment à la longueur totale
        L=L+longueur_corde
    return L
# Calcul de la longueur de la courbe de la fonction carré entre 0 et 10 si l'on découpe en 100
print(longueur_courbe(f,0,10,100))
```

Dans l'exemple, on trouve que la longueur approchée de la courbe de la fonction carré dans l'intervalle $[0; 10]$ est d'environ 101,0465

Remarque

Il existe une formule permettant de calculer de manière exacte cette longueur mais elle fait appel à des mathématiques de première (dérivée) et de terminale (intégrale).

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Dans notre cas où f est la fonction carré, on obtient

$$l = \int_0^{10} \sqrt{1 + (2x)^2} dx = \int_0^{10} \sqrt{1 + 4x^2} dx = \left[\frac{x}{2} \sqrt{1 + 4x^2} + \frac{1}{4} \ln \ln \left(2x + \sqrt{1 + 4x^2} \right) \right]_0^{10} = 5\sqrt{401} + \frac{1}{4} \ln \ln (20 + \sqrt{401})$$

Ainsi,

$$l \approx 101,047$$

$\ln$ désigne la fonction logarithme népérien qui est vue en terminale.